ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 531.38

©2003. **Е.А. Данилейко**

НОВОЕ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе получено новое решение уравнений движения гиростата в магнитном поле, характеризующееся двумя линейными по основным переменным задачи инвариантными соотношениями.

Известно, что нейтральный ферромагнетик и сверхпроводящее твердое тело при вращении в магнитном поле становятся намагниченными вдоль оси вращения (это явление носит название эффекта Барнетта-Лондона [1, 2]). Особенностью рассматриваемой задачи о движении твердого тела в магнитном поле в данной постановке является то обстоятельство, что дифференциальные уравнения движения имеют только два первых интеграла, что отражается на количестве дополнительных первых интегралов, необходимых для полного интегрирования этих уравнений [3, 4]. Достаточно эффективным подходом в исследовании свойств дифференциальных уравнений движения твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона является подход, основанный на методе инвариантных соотношений [5]. С помощью этого метода найдены многие частные решения уравнений движения [6 – 9].

1. Постановка задачи. Уравнения движения гиростата в магнитном поле запишем в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + Ba\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}. \tag{2}$$

Эти уравнения имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \tag{3}$$

В формулах (1) – (3) обозначено $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор, построенный в неподвижной точке; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Точка над переменными x и ν обозначает производную по времени t в подвижной системе координат. Влияние эффекта Барнетта-Лондона в этих уравнениях обусловлено слагаемым $Ba\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nu}$.

Поставим задачу об определении условий существования у дифференциальных уравнений (1), (2) двух линейных инвариантных соотношений

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \qquad x_2 = c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3, \tag{4}$$

где b_i, c_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ – постоянные, подлежащие определению.

Ранее два линейных инвариантных соотношения для уравнений (1), (2) изучались в работе [10] в предположении, что $c_3 = b_3 = 0$.

Согласно методу инвариантных соотношений [5], продифференцируем левую и правую части соотношений (4) в силу уравнений (1), (2). Тогда, после соответствующих преобразований, получим уравнения следующего вида

$$\begin{aligned} a_{13}x_3^2 + \eta_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)x_3 + \eta_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 0,\\ a_{23}x_3^2 + \mu_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)x_3 + \mu_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где η_1, μ_1 – многочлены первого, а η_2, μ_2 – многочлены второго порядка по ν_1, ν_2, ν_3, которые здесь не выписываем в силу громоздкости. Потребуем, чтобы уравнения (5) выполнялись тождественно для любых значений переменной x_3. Тогда

$$a_{13} = a_{23} = 0, \tag{6}$$

$$\eta_i(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 0, \qquad \mu_i(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 0 \quad (i = 1,2). \tag{7}$$

В силу равенств (6), третья координатная ось подвижной системы координат является главной.

Принимая во внимание, что инвариантные соотношения (5) заданы для первой и второй компонент вектора момента количества движения, без ограничения общности задачи, в качестве подвижной системы координат может быть принята главная система координат $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Обозначим $a_{ii} = a_i$ $(i = 1,2,3)$.

Подставим (4) в уравнение (2). В скалярном виде имеем

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= a_3x_3\nu_2 - a_2\nu_3(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3),\\ \dot\nu_2 &= a_1\nu_3(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) - a_3\nu_1x_3,\\ \dot\nu_3 &= a_2\nu_1(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3) - a_1\nu_2(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3). \end{aligned} \tag{8}$$

Потребуем, чтобы равенства (7) выполнялись для любых значений ν_1, ν_2, ν_3. Тогда получим следующие условия на параметры задачи (1), (2) и параметры инвариантных соотношений (4):

$$\begin{gathered} b_0\lambda_3 = 0, \quad c_0\lambda_3 = 0, \quad b_2c_3 = 0, \quad b_3c_1 = 0, \quad b_0c_3 + b_2\lambda_3 = 0, \quad b_3c_0 + c_1\lambda_3 = 0,\\ a_3\lambda_2 + c_0(a_3 - a_2) = 0, \quad -a_3\lambda_1 + b_0(a_1 - a_3) = 0, \quad a_3b_2 + c_1(a_3 - a_2) = 0,\\ a_3c_1 + b_2(a_3 - a_1) = 0, \quad a_1b_2b_3 + c_3(a_1b_1 - a_2c_2) = 0, \quad a_2c_1c_3 - b_3(a_1b_1 - a_2c_2) = 0,\\ a_3B_{23} + c_3(a_3 - a_2) = 0, \quad -a_3B_{13} + b_3(a_1 - a_3) = 0, \quad a_1b_0b_3 - a_2c_0c_3 + \lambda_3(a_1b_1 - a_2c_2) = 0,\\ a_3B_{33} + a_3c_2 - b_1(a_3 - a_1) = 0, \quad a_1(b_2B_{13} - b_3B_{12}) + a_2(c_2B_{23} - b_1c_3 - c_3B_{22}) = 0,\\ a_1(b_1(B_{13} - b_3) - b_3(c_2 + B_{11})) + a_2(c_1B_{23} + c_2b_3 - c_3B_{12} + c_1c_3) = 0,\\ a_1(b_1(B_{12} - b_2) - b_2(c_2 + B_{11}) + b_3c_3) + a_2(c_1(b_1 + B_{22}) + c_2(c_1 - B_{12}) - b_3c_3) = 0,\\ a_1b_0(c_2 + B_{11}) - a_2c_0(c_1 - B_{12}) - a_1b_3\lambda_3 + s_1 = 0,\\ a_1b_0(B_{12} - b_2) + a_2c_0(b_1 + B_{22}) - a_2c_3\lambda_3 + s_2 = 0,\\ a_1b_0(b_3 - B_{13}) - a_2c_2\lambda_3 - a_2c_0B_{23} - s_3 = 0, \quad a_1b_1 - a_2c_2 + 2a_3(c_2 - b_1) = 0,\\ C_{12} = a_1b_1(B_{12} - b_2) + a_2c_1(b_1 + B_{22}) - a_2b_3c_3, \quad C_{13} = a_1b_1B_{13} + a_2c_1(B_{23} - c_3),\\ C_{23} = a_1b_2(B_{13} - b_3) + a_2c_2B_{23}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$C_{11} = C_{33} + a_1(b_1c_2 - b_3B_{13} + b_1B_{11}) + a_2(-c_1^2 + c_3^2 + c_1B_{12} - c_3B_{23}),$$
$$C_{22} = C_{33} + a_1(-b_2^2 + b_3^2 + b_2B_{12} - b_3B_{13}) + a_2(b_1c_2 + c_2B_{22} - c_3B_{23}).$$

Следовательно, если параметры инвариантных соотношений и параметры уравнений (1), (2) удовлетворяют равенствам (9), то исходная система (1), (2) допускает два инвариантных соотношения (4). Для нахождения зависимостей $x_3 = x_3(t)$, $\nu_i = \nu_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ необходимо обращаться к уравнениям (8) и уравнению

$$\begin{gathered}
\dot{x}_3 = x_3a_3(B_{13}\nu_2 - B_{23}\nu_1) + b_0c_0(a_2 - a_1) + a_2c_0\lambda_1 - a_1b_0\lambda_2+ \\
+\nu_1(a_2c_1(b_0 + \lambda_1) - a_1b_1(c_0 + \lambda_2) - a_1b_0(c_1 + b_2) - a_2(c_3\lambda_3 - 2b_1c_0))+ \\
+\nu_2(a_2c_2(b_0 + \lambda_1) - a_1b_2(c_0 + \lambda_2) + a_2c_0(b_2 + c_1) + a_1(b_3\lambda_3 - 2b_0c_2))+ \\
+\nu_3(a_2c_3(b_0 + \lambda_1) - a_1b_3(c_0 + \lambda_2) + a_2b_3c_0 - a_1b_0c_3)+ \\
+\nu_1^2(a_2(2b_1c_1 - b_3c_3) - a_1b_1(b_2 + c_1)) + \nu_2^2(a_1(b_3c_3 - 2b_2c_2) + a_2c_2(b_2 + c_1))+ \\
+\nu_3^2b_3c_3(a_2 - a_1) + \nu_1\nu_2((b_2c_1 + 2b_1c_2)(a_2 - a_1) + a_1(b_3^2 - b_2^2) + a_2(c_1^2 - c_3^2))+ \\
+\nu_1\nu_3((b_3c_1 + b_1c_3)(a_2 - a_1) - a_1b_2b_3 + a_2b_1c_3)+ \\
+\nu_2\nu_3((b_3c_2 + b_2c_3)(a_2 - a_1) - a_1b_3c_2 + a_2c_1c_3)),
\end{gathered} \tag{10}$$

которое получено из третьего скалярного уравнения векторного уравнения (1).

2. Случай $\lambda_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. Обратимся к условиям (9). В силу принятых ограничений они приводят к следующим равенствам:

$$\begin{gathered}
b_0 = c_0 = b_2 = c_1 = 0,\ \ c_2 = b_1,\ \ a_2 = a_1,\ \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \ b_1 = -\frac{s_3}{a_1\lambda_3},\ \ b_3 = \frac{s_1}{a_1\lambda_3},\ \ c_3 = \frac{s_2}{a_1\lambda_3}, \\
b_1 = -\frac{a_3}{a_1}B_{33}, \quad b_3(a_1 - a_3) = a_3B_{13}, \quad c_3(a_1 - a_3) = a_3B_{23}, \quad B_{11} = \frac{a_1 - 2a_3}{a_3}b_1 - \frac{c_3}{b_3}B_{12}, \\
B_{22} = \frac{a_1 - 2a_3}{a_3}b_1 - \frac{b_3}{c_3}B_{12}, \qquad C_{12} = a_1(b_1B_{12} - b_3c_3), \qquad C_{13} = \frac{a_1}{a_3}b_1b_3(a_1 - a_3), \\
C_{23} = \frac{a_1}{a_3}b_1c_3(a_1 - a_3), \quad C_{11} = C_{33} - \frac{a_1b_1c_3}{b_3}B_{12} + \frac{a_1}{a_3}((a_1 - a_3)(b_1^2 - b_3^2) + (2a_3 - a_1)c_3^2), \\
C_{22} = C_{33} - \frac{a_1b_1b_3}{c_3}B_{12} + \frac{a_1}{a_3}((a_1 - a_3)(b_1^2 - c_3^2) + (2a_3 - a_1)b_3^2).
\end{gathered} \tag{11}$$

В соотношениях (11) значения b_1, b_3, c_3 выражены через компоненты вектора $\mathbf{s}, \lambda_3$ и параметр a_1. Остальные условия представлены в виде равенств, в которые входят параметры уравнения (1) и параметры инвариантных соотношений (4). Это связано с тем, что параметры B_{ij}, C_{ij} по своему механическому смыслу могут принимать произвольные значения и поэтому формальное исключение параметров инвариантных соотношений (4) приведет к более громоздким формулам.

Условие $a_2 = a_1$ позволяет поворотом подвижной системы координат выбрать эту систему координат таким образом, что $s_2 = 0$. Тогда из формул (11) следует, что $c_3 = 0$.

Таким образом, инвариантные соотношения (4) примут вид

$$x_1 = b_1\nu_1 + b_3\nu_3, \qquad x_2 = b_1\nu_2, \tag{12}$$

а уравнения движения (1), (2) на инвариантных соотношениях (12) будут редуцированы к системе:

$$\dot{\nu}_1 = a_3 x_3 \nu_2 - a_1 b_1 \nu_2 \nu_3,$$
$$\dot{\nu}_2 = a_1 b_1 \nu_1 \nu_3 + a_1 b_3 \nu_3^2 - a_3 \nu_1 x_3, \tag{13}$$
$$\dot{\nu}_3 = -a_1 b_3 \nu_2 \nu_3,$$

$$\dot{x}_3 = b_3 \nu_2 (x_3(a_1 - a_3) + a_1 \lambda_3 + a_1 b_3 \nu_1 - a_1 b_1 \nu_3). \tag{14}$$

Запишем интегралы (3) с учетом формул (12)

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \tag{15}$$

$$b_1(1 - \nu_3^2) + b_3 \nu_1 \nu_3 + (x_3 + \lambda_3)\nu_3 = k. \tag{16}$$

Из равенства (16) выразим x_3:

$$x_3 = l_0 \nu_3^{-1} + b_1 \nu_3 - b_3 \nu_1 - \lambda_3, \tag{17}$$

где $l_0 = k - b_1$ (произвольная постоянная). Преобразуем уравнение (14) с помощью третьего уравнения из системы (13) и соотношения (17):

$$\dot{x}_3 = -\frac{\dot{\nu}_3}{a_1 \nu_3}(a_1 l_0 \nu_3^{-1} - a_3 x_3). \tag{18}$$

Общее решение дифференциального уравнения (18) таково

$$x_3 = \frac{a_1 l_0}{a_1 + a_3}\nu_3^{-1} + c\nu_3^{a_3/a_1}, \tag{19}$$

где c – произвольная постоянная. Исключая из равенств (17) и (19) переменную x_3, получим соотношение

$$-b_1 \nu_3^2 + b_3 \nu_1 \nu_3 + \lambda_3 \nu_3 + c\nu_3^{\frac{a_1 + a_3}{a_1}} = L_0, \tag{20}$$

где $L_0 = \dfrac{a_3 l_0}{a_1 + a_3}$.

Таким образом, уравнения Пуассона (13) допускают два первых интеграла (15) и (20). Из этих интегралов найдем переменные ν_1, ν_2 в зависимости от вспомогательной переменной ν_3:

$$\nu_1 = \alpha_0 \nu_3^{-1} \varphi(\nu_3),$$
$$\nu_2 = -\alpha_0 \nu_3^{-1} \sqrt{\psi^2(\nu_3) - \varphi^2(\nu_3)}, \tag{21}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{b_3(a_1 + a_3)}, \qquad \psi^2(\nu_3) = b_3^2 (a_1 + a_3)^2 (1 - \nu_3^2)\nu_3^2,$$
$$\varphi(\nu_3) = -c(a_1 + a_3)\nu_3^{\frac{a_1 + a_3}{a_1}} + a_3 l_0 + (a_1 + a_3) b_1 \nu_3^2 - \lambda_3 (a_1 + a_3)\nu_3. \tag{22}$$

Подставим выражения (21) в третье уравнение Пуассона из системы (13):

$$\dot{\nu}_3 = \frac{a_1}{a_1 + a_3}\sqrt{\psi^2(\nu_3) - \varphi^2(\nu_3)}. \tag{23}$$

Уравнение (23) позволяет найти зависимость $\nu_3 = \nu_3(t)$ путем обращения интеграла

$$\int \frac{d\nu_3}{\sqrt{\psi^2(\nu_3) - \varphi^2(\nu_3)}} = \frac{a_1}{a_1 + a_3}(t - t_0). \tag{24}$$

Подставляя найденную таким образом функцию $\nu_3 = \nu_3(t)$ в соотношения (12), (19), (21), найдем зависимости всех переменных задачи (1), (2) от времени:

$$\begin{gathered}
\nu_1(t) = \alpha_0[\nu_3(t)]^{-1}\varphi(\nu_3(t)), \\
\nu_2(t) = -\alpha_0[\nu_3(t)]^{-1}\sqrt{\psi^2(\nu_3(t)) - \varphi^2(\nu_3(t))}, \\
x_1(t) = b_1\nu_1(t) + b_3\nu_3(t), \\
x_2(t) = b_1\nu_2(t), \\
x_3(t) = \frac{a_1 l_0}{a_1 + a_3}[\nu_3(t)]^{-1} + c[\nu_3(t)]^{\frac{a_3}{a_1}}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Решение содержит пять параметров и две произвольные пстоянные (l_0 и c). Для того, чтобы полученное решение было действительным, необходимо потребовать либо, чтобы выражение под корнем в (23) было неотрицательным, либо, чтобы поверхности (15), (20) в пространстве переменных ν_1, ν_2, ν_3 пересекались. Рассмотрим случай пересечения поверхностей (15), (20) в плоскости $\nu_2 = \dfrac{1}{2}$:

$$\nu_1^2 + \nu_3^2 = \frac{3}{4}, \qquad \nu_1 = \frac{1}{b_3}\big(L_0\nu_3^{-1} + b_1\nu_3 - \lambda_3 - c\nu_3^{\frac{a_3}{a_1}}\big). \tag{26}$$

Первым примером условий совместности соотношений (26) может служить равенство $L_0 = 0$ и малое значение величины λ_3, при выполнении которых второе равенство из (26) примет вид

$$\nu_1 = \frac{1}{b_3}\big(b_1\nu_3 - \lambda_3 - c\nu_3^{\frac{a_3}{a_1}}\big).$$

Тогда, учитывая соотношения (20) и (22), уравнение (23) может быть представлено в виде:

$$\dot{\nu}_3 = \frac{1}{2}a_1 b_3 \nu_3.$$

Отсюда можем найти ν_3:

$$\nu_3 = e^{\frac{1}{2}a_1 b_3 (t - t_0)}.$$

Таким образом, решение (25) может быть записано в виде

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{3}{4} - e^{a_1 b_3 (t - t_0)}},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2},$$

$$\nu_3 = e^{\frac{1}{2}a_1 b_3 (t-t_0)},$$

$$x_1 = b_1 \sqrt{\frac{3}{4} - e^{a_1 b_3 (t-t_0)}} + b_3 e^{\frac{1}{2}a_1 b_3 (t-t_0)},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} b_1, \qquad x_3 = c e^{\frac{1}{2}a_3 b_3 (t-t_0)}.$$

Вторым примером является случай, когда произвольные параметры L_0 и c связаны условием

$$L_0 + b_1 - \lambda_3 - c = 0,$$

так как при этом поверхности (15), (17) пересекаются в некоторой точке $(\nu_1(\nu_3), \nu_2(\nu_3), \nu_3)$, где $\nu_3 \in [\nu_3^{(1)}, \nu_3^{(2)}]$.

Следует отметить, что сложность нахождения интеграла (24) в общем случае связана с его трансцендентной структурой.

1. *Егармин И.Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела // Аэрофизика и космические исследования. – М.: Физ.-техн. ин-т, 1983. – С. 95-96.
2. *Киттель И.* Введение в физику твердого тела. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
3. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – N 6. – С. 28-33.
4. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Там же. – 1984. – N 4. – С. 32-34.
5. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 6. – С. 26-30.
6. *Горр Г.В.* О линейном инвариантном соотношении в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Прикл. математика и механика. – 1997. – **61**, вып. 4. – С. 566-569.
7. *Горр Г.В., Суворова Н.Г.* Об одном классе полиномиальных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Там же. – 1997. – **61**, вып. 5. – С. 781-787.
8. *Скрыпник С.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях в задаче о движении тела в магнитном поле // Прикл. механика, Киев: – 1999. – **35**, N 2. – С. 98-104.
9. *Ткаченко Н.В.* Некоторые классы прецессионных движений твердого тела в магнитном поле // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 26-30.
10. *Скрыпник С.В.* Один класс двух линейных инвариантных соотношений в задаче о движении тела в магнитном поле // Тр. ИПММ НАНУ. – 2002. – **7**. – С. 175-180.

Донецкий гос. ун-т экономики и торговли

Получено 13.05.03