ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 531.38

©2003. **И.Н. Гашененко**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В задаче Эйлера о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки изучаются трехмерные алгебраические поверхности интегральных уровней и их топологические бифуркации. В предположении, что центр масс тела лежит в главной плоскости инерции, исследовано трехпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм и составлен полный список неособых интегральных многообразий. Обсуждаются вопросы устойчивости равномерных вращений тела вокруг вертикали.

Введение. Движение тяжелого тела вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями Эйлера–Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела в подвижных осях, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор вертикали и $\mathbf{r}$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс тела. Три алгебраических интеграла уравнений (1) известны:

$$H = \frac{1}{2}A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = h, \quad G = A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \quad I = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение

$$\mathcal{F} = H \times G : \mathbb{R}^3(\omega) \times S^2(\gamma) \to \mathbb{R}^2(h, g),$$

называемое интегральным. Множество его критических точек состоит из тех точек, в которых интегралы (2) зависимы. Образом множества критических точек отображения $\mathcal{F}$ является бифуркационная диаграмма Σ в плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$. В каждой точке бифуркационной диаграммы отображение $\mathcal{F}$ не является локально расслаивающим. Прообразы $\mathcal{Q}^3_{h,g} = \mathcal{F}^{-1}(h, g)$ играют важную роль в качественном анализе движений, так как они инвариантны относительно фазового потока динамической системы (1). Зафиксируем константы интегралов (2), тогда трехмерное множество уровней первых интегралов

$$\mathcal{Q}^3_{h,g} = \{H = h,\, G = g,\, I = 1\} \subset \mathbb{R}^3(\omega) \times \mathbb{R}^3(\gamma), \tag{3}$$

будем называть *интегральным многообразием* или, следуя терминологии [1], изоэнергетической поверхностью. Для регулярных значений интегрального отображения $\mathcal{F}$ множество $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ является гладким многообразием с заданной топологией. Топологический тип $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ изменяется в критических значениях (h, g), которые принадлежат бифуркационному множеству $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$. Приведенным (эффективным) потенциалом называют функцию

$$U_g(\boldsymbol{\nu}) = \frac{g^2}{2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu},$$

заданную на сфере Пуассона $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$. Топология изоэнергетических поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ и их перестройки при изменении значения энергии h полностью определяются функцией $U_g(\boldsymbol{\nu})$. Пусть $\pi : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) \mapsto \boldsymbol{\nu}$ есть проекция пространства $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\nu})$

на второй сомножитель, тогда *область возможности движения*

$$\mathcal{U}_{h,g} = \{U_g(\boldsymbol{\nu}) \le h\} \subset S^2$$

является проекцией $\pi(\mathcal{Q}^3_{h,g})$ многообразия $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ на сферу Пуассона. Слой над произвольной точкой $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in S^2$ гомеоморфен либо окружности (если $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{U}_{h,g} \backslash \partial\mathcal{U}_{h,g}$), либо точке (если $\boldsymbol{\nu} \in \partial\mathcal{U}_{h,g}$), либо пуст (если $\boldsymbol{\nu} \notin \mathcal{U}_{h,g}$). Следовательно, топологически $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ может быть описано следующим образом [1]. Если проекция $\mathcal{U}_{h,g}$ совпадает со всей сферой Пуассона, то $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ представляет собой S^1-расслоение над сферой, топологически эквивалентное расслоению единичных касательных векторов. Если $\mathcal{U}_{h,g}$ не совпадает со всей сферой, то есть имеет дырки, то $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ можно получить из прямого произведения $\mathcal{U}_{h,g} \times S^1$, если над каждой граничной точкой проекции $\mathcal{U}_{h,g}$ слой S^1 сжать в точку S^0. Таким образом, справедливы следующие утверждения [1]:

Теорема 1.

- Если h меньше минимального значения функции $U_g(\boldsymbol{\nu})$, то $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ – пусто.
- Если h больше максимального значения функции $U_g(\boldsymbol{\nu})$, то $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$.
- Если h не является критическим значением функции $U_g(\boldsymbol{\nu})$, то $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ является гладким трехмерным ориентируемым многообразием. В этом случае множество $\mathcal{U}_{h,g}$ на сфере Пуассона есть объединение $D^2_{i_1} \cup ... \cup D^2_{i_m}$ непересекающихся двумерных подмногообразий с краем, где D^2_k – 2-диск с k дырками, а многообразие $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ гомеоморфно несвязному объединению $N^3_{i_1} \cup ... \cup N^3_{i_m}$ трехмерных многообразий, где $N^3_0 \equiv S^3$ – трехмерная сфера, а N^3_k (при $k \ge 1$) – это связная сумма k экземпляров $S^1 \times S^2$.

Программа интенсивного топологического изучения интегральных многообразий механических систем с симметрией была предложена С.Смейлом [2]. В соответствии с этой программой (ее развернутое изложение имеется в [3]) изучение фазовых траекторий исходной системы (1) сводится, во-первых, к описанию бифуркационных диаграмм $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$ и топологии многообразий $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ и, во-вторых, к исследованию поведения динамической системы на каждой отдельной поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$. Идеи Смейла нашли успешное применение во многих классических и современных задачах механики [1, 4-6]. В задаче Эйлера о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки интегральные многообразия и их топологические бифуркации изучали А.Якоб [3], С.Б.Каток [7] и Я.В.Татаринов [4, 8, 9]. Эти важные результаты были отмечены в монографиях [10, 11]. Затем исследования были продолжены в работах [12, 13]. Однако, общая проблема классификации возможных интегральных многообразий оказалась более сложной, чем это предполагалось ранее.

В этой работе предложен метод, позволяющий полностью описать бифуркации интегральных многообразий в случае, когда центр масс тела принадлежит главной плоскости инерции. Проанализировано трехпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм и изучено пятипараметрическое семейство интегральных многообразий. В результате исследования получено 46 типов невырожденных бифуркационных диаграмм и обнаружено гладкое интегральное многообразие $\mathcal{Q}^3_{h,g} = N^3_3$, не имеющее аналога ни в одном из случаев, изученных ранее [3, 4, 7].

Структура особых интегральных многообразий позволяет анализировать устойчивость стационарных вращений. В работе [8] доказано, что критические точки приведенного потенциала $U_g(\boldsymbol{\nu})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с относительными равновесиями исходной механической системы. В задачах динамики твердого тела равномерные вращения являются относительными равновесиями. Переходим к их краткому описанию.

1. Равномерные вращения тела вокруг вертикали. Если угловая скорость неизменна в теле ($\boldsymbol{\omega} = \mathrm{const}$), тогда она неизменна и в пространстве: тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, вдоль которой направлен вектор $\boldsymbol{\omega}$. Из первого уравнения (1) следует простое равенство

$$(A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r} = 0, \tag{4}$$

которое показывает, что три постоянных в теле вектора $A\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}$ лежат в одной плоскости. Уравнение (4) определяет *конус Штауде*, неизменно связанный с телом. Этот конус второго порядка задан в подвижном базисе и является геометрическим местом осей равномерных вращений. С помощью первых интегралов (2) можно показать, что единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ сохраняет свое направление в теле, а не только в пространстве. Следовательно, осью равномерного вращения тела в пространстве может служить только вертикаль

$$\boldsymbol{\omega} = \pm|\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\nu}. \tag{5}$$

Уравнение

$$(A_2 - A_3)\nu_2\nu_3 r_1 + (A_3 - A_1)\nu_3\nu_1 r_2 + (A_1 - A_2)\nu_1\nu_2 r_3 = 0 \tag{6}$$

определяет на единичной сфере Пуассона линию пересечения конуса осей равномерных вращений с этой сферой. Осями равномерных вращений могут быть лишь те из образующих конуса Штауде, для которых векторное уравнение $(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu})|\boldsymbol{\omega}|^2 + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu} = 0$, полученное подстановкой (5) в первое уравнение (1), позволяет определить неотрицательную величину $|\boldsymbol{\omega}|^2$. Все такие образующие конуса (4), а также соответствующие им точки сферической кривой (6) О.Штауде называл *допустимыми* [14].

Пусть центр масс твердого тела расположен в главной плоскости инерции, тогда без ограничения общности можно положить

$$|\mathbf{r}| = 1, \quad r_1 > 0, \quad r_2 > 0, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_2. \tag{7}$$

При этом следует, что конус (4) вырождается в пару пересекающихся плоскостей. Сферическая кривая (6) в данном случае состоит из двух ортогональных окружностей большого круга:

$$\nu_3 = 0, \quad (A_2 - A_3)\nu_2 r_1 + (A_3 - A_1)\nu_1 r_2 = 0. \tag{8}$$

Компоненты постоянных векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$, соответствующих равномерным вращениям, запишем в виде двух семейств, зависящих от параметров τ, σ:

$$\begin{gathered}\nu_3 = \omega_3 = 0, \;\; \nu_1 = -(1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}, \;\; \nu_2 = \tau(1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}, \;\; \omega_1 = \mu\nu_1, \;\; \omega_2 = \mu\nu_2, \\ \mu = \left|\frac{(r_1\tau + r_2)(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}}{(A_1 - A_2)\tau}\right|^{\frac{1}{2}}, \;\; \tau \in \mathbb{R};\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\nu_1 = \frac{r_1\sigma^2}{A_3 - A_1}, \;\; \nu_2 = \frac{r_2\sigma^2}{A_3 - A_2}, \;\; \nu_3 = \pm(1-\sigma_0\sigma^4)^{\frac{1}{2}}, \;\; \omega_i = \sigma^{-1}\nu_i, \\ &\sigma_0 = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_3)^2} + \frac{r_2^2}{(A_2 - A_3)^2}, \;\; \sigma \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10}$$

Величина $\mu^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2$ принимает неотрицательные значения, следовательно, знак функции $(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}$ должен совпадать со знаком выражения $\tau/(r_1\tau + r_2)$. В случаях осевой симметрии эллипсоида инерции ($A_1 = A_3$ или $A_2 = A_3$) семейство (10) не существует.

2. Бифуркационное множество. Подставим компоненты постоянных векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$, заданные параметрическими зависимостями (9), (10), в интегралы H, G. В результате найдем параметрические уравнения бифуркационного множества $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h,g)$. Образом множества критических точек (9) интегрального отображения $\mathcal{F}$ является бифуркационная кривая B_1, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} &h = \frac{A_2 r_1\tau^3 + (3A_2 - 2A_1)r_2\tau^2 + (3A_1 - 2A_2)r_1\tau + A_1 r_2}{2(A_1 - A_2)\tau(\tau^2+1)^{\frac{1}{2}}}, \\ &g = \frac{(A_1 + A_2\tau^2)|r_1\tau + r_2|^{\frac{1}{2}}}{|\tau|^{\frac{1}{2}}(A_1 - A_2)^{\frac{1}{2}}(\tau^2+1)^{\frac{3}{4}}}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\tau \in (-\infty, -r_2 r_1^{-1}] \cup [-r_2 r_1^{-1}, 0) \cup (0, \infty)$. Множеству критических точек (10) соответствует бифуркационная кривая B_2:

$$\begin{aligned} &h = \frac{1}{2}\frac{A_3}{\sigma^2} + \frac{3}{2}\sigma^2\sigma_*, \\ &g = \frac{A_3}{\sigma} + \sigma^3\sigma_*, \;\; 0 < |\sigma| < {\sigma_0}^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\sigma_* = r_1^2(A_1 - A_3)^{-1} + r_2^2(A_2 - A_3)^{-1}$.

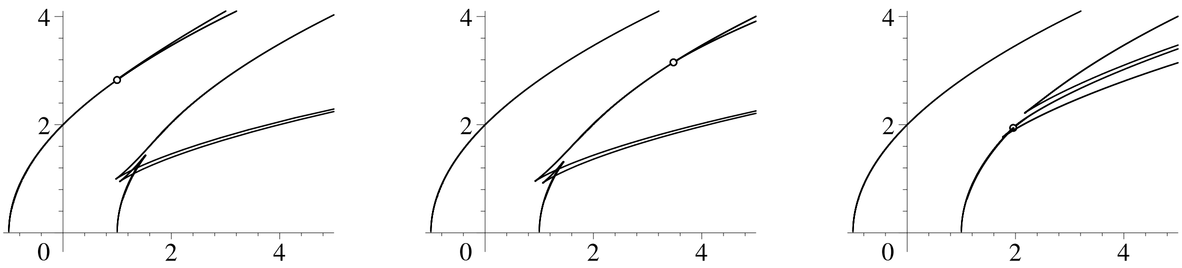
Уравнениями (11), (12) задано трехпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм на плоскости $\mathbb{R}^2(h,g)$. В качестве независимых параметров, характеризующих распределение масс в твердом теле, выберем величины

$$\alpha = A_2/A_1, \quad \beta = A_3/A_1, \quad r_* = r_2/r_1.$$

Бифуркационная диаграмма Σ состоит из гладких дуг, которые могут пересекаться и касаться друг друга в некоторых точках. Изучим особые точки диаграммы Σ.

Значению параметра $\tau_0 = r_*(1-\beta)/(\beta - \alpha)$ соответствует точка кривой B_1, в которой начинается допустимая ветвь бифуркационной кривой B_2. Эту точку ветвления бифуркационной диаграммы $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h,g)$ обозначим через P_0. Существуют три варианта возможных расположений кривой B_2 по отношению к B_1. Если $\tau_0 \in (-\infty, -r_*]$, то P_0 принадлежит ветви кривой B_1, проходящей через точку $(h,g) = (|\mathbf{r}|, 0)$; если $\tau_0 \in [-r_*, 0)$, то P_0 принадлежит ветви, проходящей через точку $(h,g) = (-|\mathbf{r}|, 0)$; если $\tau_0 \in (0, \infty)$, то P_0 принадлежит той ветви кривой B_1, которая не пересекает ось Oh на плоскости $\mathbb{R}^2(h,g)$. Расположение точки P_0 на одной из трех ветвей кривой B_1 полностью определено значениями параметров α, β, изменением одного лишь параметра r_* точку P_0 нельзя переместить на другую ветвь. В результате несложных вычислений находим, что при выполнении условий $\beta > 1 > \alpha$ значение τ_0 всегда принадлежит интервалу $(-r_*, 0)$. На рис. 1, *а* показана диаграмма, соответствующая этому случаю.

При выполнении условий $1 > \beta > \alpha$ значение τ_0 принадлежит интервалу $(0, \infty)$. Для этого варианта бифуркационная диаграмма изображена на рис. 1, *б*. При выполнении условий $1 > \alpha > \beta$ значение τ_0 всегда принадлежит интервалу $(-\infty, -r_*)$, соответствующая диаграмма изображена на рис. 1, *в*.



а) $\alpha = 0.255,\ \beta = 1.25,\ r_* = 0.05$ *б)* $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.8,\ r_* = 0.1$ *в)* $\alpha = 0.6,\ \beta = 0.5,\ r_* = 0.1$

Рис. 1. Бифуркационные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$.

Величина A_3 не входит в уравнение (11), поэтому нам нужно изучить зависящее от r_*, α двухпараметрическое семейство плоских алгебраических кривых. Особые точки кривой B_1 найдем из условий $dh/d\tau = dg/d\tau = 0$. Непосредственным дифференцированием получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} g\frac{dg}{d\tau} &= (\tau^2+1)^{-1}(A_1 + A_2\tau^2)\frac{dh}{d\tau}, \\ \frac{dh}{d\tau} &= \frac{A_1 r_1 \varphi_1(\tau)}{2(A_1 - A_2)\tau^2(\tau^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \\ \varphi_1(\tau) &= \alpha\tau^5 + (4\alpha - 3)\tau^3 + (3\alpha - 4)r_*\tau^2 - r_*. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, особым точкам бифуркационной кривой B_1 соответствуют значения параметра τ, являющиеся действительными решениями уравнения $\varphi_1(\tau) = 0$, или

$$\alpha\tau^5 + (4\alpha - 3)\tau^3 + (3\alpha - 4)r_*\tau^2 - r_* = 0. \tag{14}$$

Число особых точек кривой B_1 зависит от числа действительных корней этого уравнения. Можно показать, что уравнение (14) с действительными коэффициентами имеет не более трех действительных корней. Вычислим число перемен знаков у коэффициентов полинома $\varphi_1(\tau)$ и применим, например, теорему Декарта: *число положительных корней полинома с действительными коэффициентами равно или на четное число меньше числа перемен знаков в ряду его коэффициентов*. Получим, что при $\alpha \in (0, 1)$ уравнение (14) имеет только один положительный корень. Далее рассмотрим полином $\varphi_1(-\tau)$ и с помощью той же теоремы оценим число отрицательных корней. Получим, что при $\alpha \in (0, 3/4)$ уравнение (14) имеет не более двух отрицательных корней, а при $\alpha \in [3/4, 1)$ отрицательных корней не существует. Запишем $\varphi_1(\tau)$ в виде

$$\varphi_1(\tau) = (\alpha\tau^2 + 1)(\tau^3 - r_*) + 4(\alpha - 1)(\tau + r_*)\tau^2,$$

откуда сразу следует, что действительные корни уравнение (14) расположены вне отрезка $[-r_*, r_*^{\frac{1}{3}}]$, так как для всех $\tau \in [-r_*, r_*^{\frac{1}{3}}]$ выполнено неравенство $\varphi_1(\tau) < 0$. Заметим, что с помощью неравенства $\tau < r_*^{\frac{1}{3}}$ В.В.Румянцев записал одно из достаточных условий устойчивости равномерных вращений (см. неравенство (2.24) в работе [14]).

Найдем значения параметров (α, r_*), при которых кривая B_1 имеет одну либо три особые точки. Приравнивая нулю дискриминант уравнения (14)

$$\alpha(4-3\alpha)^5 r_*^4 - 2c_1 r_*^2 + (4\alpha-3)^5 = 0, \tag{15}$$

где $c_1 = 128(\alpha^6+1) - 1350(\alpha^4+1)\alpha + 4134(\alpha^2+1)\alpha^2 - 5825\alpha^3$, получим уравнение разделяющей кривой на плоскости параметров (α, r_*). Если зафиксировать значение $\alpha \in (0, 3/4)$, то из уравнения (15) можно найти единственное положительное решение $r_* = \rho_1(\alpha)$. Для всех достаточно малых значений параметра $r_* < \rho_1(\alpha)$ уравнение (14), разрешенное относительно τ, имеет три различных действительных корня $\tau_1 > 0 > \tau_2 > \tau_3$, которые соответствуют точкам возврата P_1, P_2, P_3 бифуркационной кривой B_1. Если существуют отрицательные корни уравнения (14), то они принадлежат интервалу $(-\infty, -r_*)$. Точки возврата не принадлежат ветви кривой B_1, которая соответствует $\tau \in [-r_*, 0)$.

Теперь найдем условие, при выполнении которого кривая B_2 имеет точку возврата. В особых точках кривой B_2 должны выполняться равенства $dh/d\sigma = dg/d\sigma = 0$. Дифференцированием (12) находим

$$\frac{dg}{d\sigma} = 3\sigma^2\sigma_* - \frac{A_3}{\sigma^2}, \qquad \frac{dh}{d\sigma} = 3\sigma\sigma_* - \frac{A_3}{\sigma^3}. \tag{16}$$

Следовательно, координаты искомой особой точки (обозначим ее через P_4) можно получить подстановкой $\sigma = A_3^{1/4}(3\sigma_*)^{-1/4}$ в параметрические уравнения (12). При выполнении условия

$$3\sigma_* > A_3\sigma_0 \tag{17}$$

особая точка P_4 принадлежит допустимой ветви бифуркационной кривой B_2. Заметим, что неравенство (17) позволяет выделить в пространстве параметров области устойчивых равномерных вращений твердого тела [9]. Подставим выражения σ_0, σ_* в неравенство (17) и с помощью обозначения

$$\rho_2 = \frac{|\alpha-\beta|}{(1-\beta)} \frac{(3-4\beta)^{\frac{1}{2}}}{(4\beta-3\alpha)^{\frac{1}{2}}} \tag{18}$$

сформулируем следующее утверждение: если $\beta \geq 3/4$, то условие (17) не выполняется; если $3\alpha < 4\beta < 3$, то (17) выполняется только для достаточно малых положительных значений $r_* < \rho_2(\alpha, \beta)$; если $3\alpha \geq 4\beta$, то условие (17) выполняется для всех $r_* > 0$.

Изучим возможное расположение точки ветвления P_0 по отношению к точкам P_1, P_2, P_3 бифуркационной кривой B_1. Подставим значение τ_0 в уравнение (14):

$$\alpha(\beta-1)^5 r_*^4 + (\beta-1)^2(\beta-\alpha)^2(3\alpha^2+\alpha\beta-8\alpha+\beta+3)r_*^2 + (\beta-\alpha)^5 = 0. \tag{19}$$

Если $1 > \beta > \alpha$, то уравнение (19) имеет только один действительный положительный корень ρ_3. Если $3/4 > \alpha > \beta$, то при выполнении дополнительного условия

$$9\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha\beta - 30\alpha + 6\beta + 9 \geq 0 \tag{20}$$

уравнение (19) имеет два действительных положительных корня ρ_3, $\rho_3^{'}$. Если $\beta = \alpha$, то все корни (19) равны нулю. В остальных случаях уравнение (19), разрешенное относительно r_*, не имеет действительных корней.

Чтобы найти точки самопересечения кривой B_1 составим из правых частей (11) функции, соответствующие h^2, h/g^2, и приравняем значения этих функций в двух различных точках $\tau, \tau^{'}$. В результате получим систему из двух полиномиальных уравнений от неизвестных $\tau, \tau^{'}$. После исключения $\tau^{'}$ получим одно уравнение $\varphi_2(\tau) = 0$, действительные решения которого определяют все точки самопересечения бифуркационной кривой B_1. Полином $\varphi_2(\tau)$ имеет кратные корни только тогда, когда параметры α, r_*, удовлетворяющие условиям (7), связаны соотношением (15) либо соотношением

$$\alpha(4-3\alpha)^5 r_*^8 + 2\alpha c_2 r_*^6 - 3c_3 r_*^4 + 2\alpha \tilde{c}_2 r_*^2 + \alpha^2(4\alpha-3)^5 = 0, \tag{21}$$

где полиномиальные коэффициенты имеют вид

$$c_2 = 17\alpha^6 - 228\alpha^5 + 5832\alpha^4 - 12240\alpha^3 + 8757\alpha^2 - 2664\alpha + 528, \;\; \tilde{c}_2 = \alpha^6 c_2(\alpha^{-1}),$$

$$c_3 = 9(\alpha^8+1) - 76(\alpha^6+1)\alpha + 720(\alpha^4+1)\alpha^2 - 7536(\alpha^2+1)\alpha^3 + 13764\alpha^4.$$

С учетом неравенств $0 < \alpha < 1$ уравнение (21) имеет один действительный положительный корень ρ_4. Дальнейший анализ полиномиального уравнения $\varphi_2(\tau) = 0$ приводит к следующим утверждениям: если $\alpha \in [3/4, 1)$, то кривая B_1 не имеет самопересечений; если $\alpha \in (0, 3/4)$ и выполнены условия $\rho_4 < r_* < \rho_1$, то кривая B_1 имеет одну точку самопересечения; если $\alpha \in (0, 3/4)$ и, кроме того, $r_* < \rho_4$, то кривая B_1 имеет три точки самопересечения.

3. Классификация бифуркационных диаграмм. Если центр масс тела принадлежит главной оси инерции, то из результатов С.Б.Каток [7] следует, что в этом случае существуют семь типов бифуркационных диаграмм общего положения. Диаграммы характеризуются значениями параметров α, β и, следовательно, на плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ существуют двумерные области, соответствующие различным типам диаграмм. Любая невырожденная диаграмма может быть отнесена к одному из этих семи типов.

Теперь пусть центр масс тела находится в главной плоскости инерции. При выполнении условий (7) область

$$D = \{\alpha, \beta : \, \alpha < 1, \;\; \alpha > \beta - 1, \;\; \alpha > 1 - \beta\}$$

состоит из допустимых значений параметров α, β. В области D главные моменты инерции удовлетворяют неравенствам треугольника. Если величина r_2 является малой, то вырождение диаграмм происходит на множестве

$$R_1 = \{\beta = 1, \, \alpha \in (0,1)\} \cup \{\alpha = 3/4, \, \beta \in (1/4, 7/4)\} \cup \{\beta = 3/4, \, \alpha \in (1/4, 1)\} \cup$$

$$\cup \{\alpha = \beta \in (1/2, 1)\} \cup \{\alpha = \frac{(9-8\beta)}{(5-4\beta)^2}, \, \beta \in (\beta_0, 3/4)\} \cup \{\beta = \frac{(9-8\alpha)}{(5-4\alpha)^2}, \, \alpha \in (\alpha_0, 3/4)\},$$

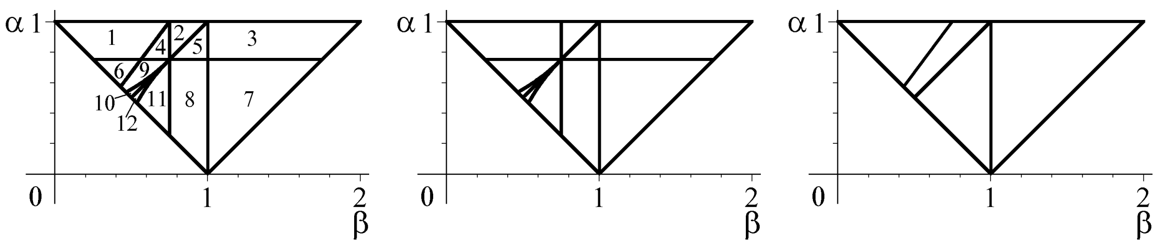
где $\alpha_0 = \beta_0 \approx 0.4647$. Множество R_1 делит область D на десять подобластей (см. рис. 2, *б*) с различными типами бифуркационных диаграмм общего положения. Если величина r_1 является малой, то параметры α, β, принадлежащие множеству

$$R_2 = \{\alpha = \beta \in (1/2, 1)\} \cup \{\beta = 1, \, \alpha \in (0,1)\} \cup \{3\alpha = 4\beta, \, \beta \in (3/7, 3/4)\},$$

соответствуют вырождению бифуркационных диаграмм. Множество R_2 разбивает D на четыре подобласти (см. рис. 2, *в*) с различными типами диаграмм.

Случай $r_1r_2r_3 \neq 0$, когда центр масс тела находится вблизи главной оси инерции, рассмотрен в [12]. Исследовано бифуркационное множество, включающее диаграммы четырех видов. При этом допущена неточность в описании возможных типов многообразий $\mathcal{Q}^3_{h,g}, \mathcal{U}_{h,g}$ – их оказалось меньше, чем в предельном случае, рассмотренном в [7]. Например, на рис. 2, I в работе [12] отмечена треугольная область, ограниченная ветвями *(cb), (ba), (kj)*, которой должны соответствовать недостающие типы многообразий $\mathcal{Q}^3_{h,g} = S^3 \cup (S^1 \times S^2), \mathcal{U}_{h,g} = D^2 \cup (D^1 \times S^1)$.

При фиксированных значениях параметров α, β получим однопараметрическое семейство бифуркационных диаграмм, зависящих от $r_* \in (0, \infty)$. С изменением r_* диаграммы будут непрерывно деформироваться до тех пор, пока r_* не достигнет некоторого критического значения ρ_i. При этом все качественно различные диаграммы, отвечающие выбранным значениям α, β, образуют конечную последовательность. Множество $R_1 \cup R_2$ делит область D на подобласти $1 - 12$ (см. рис. 2, *а*) с различными типами последовательностей бифуркационных диаграмм.



а) $R_1 \cup R_2 \subset D$ *б)* $R_1 \subset D$, $r_* \to 0$ *в)* $R_2 \subset D$, $r_* \to \infty$

Рис. 2. Область D допустимых значений параметров α, β.

При перестройках множества Σ на кривых B_1, B_2 появляются новые особые точки. В этом случае параметры α, β, r_* принадлежат некоторой двумерной поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3(\alpha, \beta, r_*)$. При малом возмущении такие особые точки исчезают или меняют свой тип, а вместе с тем вид диаграммы Σ качественно изменяется.

Вырождение бифуркационных диаграмм происходит, например, в осесимметричных случаях $\alpha = \beta$ и $\beta = 1$, когда кривая B_2 исчезает, а точка ветвления P_0 уходит на бесконечность. Существуют и другие случаи вырождения диаграмм. Сформулируем основные признаки, разделяющие бифуркационные диаграммы, и укажем соответствующие поверхности в пространстве параметров $\mathbb{R}^3(\alpha, \beta, r_*)$ в виде функции $r_* = \rho_i(\alpha, \beta)$:

1. $r_* = \rho_1$ – появление пары особых точек P_2, P_3 на кривой B_1;

2. $r_* = \rho_2$ – появление особой точки P_4 на кривой B_2;

3. $r_* = \rho_3$, $r_* = \rho_3'$ – P_0 совпадает с одной из особых точек P_1, P_2, P_3 кривой B_1;

4. $r_* = \rho_4$ – особая точка P_2 попадает на другую ветвь кривой B_1;

5. $r_* = \rho_5$, $r_* = \rho_5'$ – кривая B_1 пересекает кривую B_2 в особой точке P_4;

6. $r_* = \rho_6$, $r_* = \rho_6'$ – P_0 совпадает с одной из точек самопересечения кривой B_1;

7. $r_* = \rho_7$ – кривая B_2 проходит через точку самопересечения кривой B_1;

8. $r_* = \rho_8$, $r_* = \rho_8^{'}$, $r_* = \rho_8^{''}$ – кривая B_2 пересекает кривую B_1 в одной из особых точек P_1, P_2, P_3.

Зафиксируем значения $(\alpha, \beta) \in D$, тогда вид бифуркационной диаграммы будет определяться значением параметра r_*. Вырождению диаграмм соответствуют решения полиномиальных уравнений $f_1 = 0, f_2 = 0, ..., f_8 = 0$, а полиномы f_i имеют следующий вид:

$$f_1 = \alpha(4-3\alpha)^5 r_*^4 - 2c_1 r_*^2 + (4\alpha-3)^5,$$

$$f_2 = (1-\beta)^2(4\beta-3\alpha)r_*^2 + (\alpha-\beta)^2(4\beta-3),$$

$$f_3 = \alpha(\beta-1)^5 r_*^4 + (\beta-1)^2(\beta-\alpha)^2(3\alpha^2+\alpha\beta-8\alpha+\beta+3)r_*^2 + (\beta-\alpha)^5,$$

$$f_4 = \alpha(4-3\alpha)^5 r_*^8 + 2\alpha c_2 r_*^6 - 3c_3 r_*^4 + 2\alpha\tilde{c}_2 r_*^2 + \alpha^2(4\alpha-3)^5,$$

$$f_5 = (1-\beta)^3 c_4^2 r_*^4 + (1-\beta)(\beta-\alpha)c_5 r_*^2 + (\alpha-\beta)^3\tilde{c}_4^2,$$

$$f_6 = \alpha^2(1-\beta)^{12}c_7^2 r_*^{12} + 2\alpha(1-\beta)^{10}(\alpha-\beta)^2 c_8 r_*^{10} + \alpha(1-\beta)^8(\alpha-\beta)^4 c_9 r_*^8 +$$

$$+4(1-\beta)^6(\alpha-\beta)^6 c_{10} r_*^6 + (1-\beta)^4(\alpha-\beta)^8\tilde{c}_9 r_*^4 + 2(1-\beta)^2(\alpha-\beta)^{10}\tilde{c}_8 r_*^2 + (\alpha-\beta)^{12}\tilde{c}_7^2,$$

$$f_7 = \alpha^2\beta(\beta-1)^4 c_{12}^3 r_*^8 + 4\alpha^2(\alpha-\beta)(\beta-1)^3 c_{13} r_*^6 + \alpha(\alpha-\beta)^2(\beta-1)^2 c_{14} r_*^4 +$$

$$+4\alpha(\alpha-\beta)^3(\beta-1)\tilde{c}_{13} r_*^2 + \beta(\alpha-\beta)^4\tilde{c}_{12}^3,$$

$$f_8 = \alpha^3(\beta-1)^5 c_{12}^2 c_{16}^3 r_*^{10} + \alpha^2(\beta-1)^3 c_{17} r_*^8 + 2\alpha(\alpha-\beta)(\beta-1)^2 c_{18} r_*^6 +$$

$$+2(\alpha-\beta)^2(\beta-1)\tilde{c}_{18} r_*^4 + (\alpha-\beta)^3\tilde{c}_{17} r_*^2 + (\alpha-\beta)^5\tilde{c}_{12}^2\tilde{c}_{16}^3,$$

где

$$c_4 = 8\alpha^2\beta + \alpha^2 - 16\alpha\beta^2 - 8\alpha\beta + 16\beta^2, \;\; \tilde{c}_4 = \alpha^3 c_4(\alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}),$$

$$c_5 = c_6(\alpha,\beta) + \alpha^7 c_6(\alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}), \;\; c_6 = 512(1-\alpha)\beta^5 + 512(\alpha-1)\beta^4 -$$

$$-32(13\alpha+2)(\alpha-1)\beta^3 + 48\alpha(\alpha-1)\beta^2 - \alpha^2(11\alpha-12)\beta - \alpha^3,$$

$$c_7 = 16\beta^2 + 8\alpha(\alpha-5)\beta + \alpha^2(25-9\alpha), \;\; \tilde{c}_7 = \alpha^3 c_7(\alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}),$$

$$c_8 = 768\beta^4\alpha + 128(5\alpha^3 - 25\alpha^2 - 5\alpha + 1)\beta^3 + 16\alpha(6\alpha^4 - 107\alpha^3 +$$

$$+258\alpha^2 + 161\alpha - 30)\beta^2 - 8\alpha^2(18\alpha^4 - 165\alpha^3 + 185\alpha^2 + 421\alpha - 75)\beta +$$

$$+\alpha^3(54\alpha^4 - 261\alpha^3 - 210\alpha^2 + 1435\alpha - 250), \;\; \tilde{c}_8 = \alpha^7 c_8(\alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}),$$

$$c_9 = 3840\beta^4\alpha + 1280(2\alpha^3 - 10\alpha^2 - 5\alpha + 1)\beta^3 +$$

$$+32(6\alpha^5 - 147\alpha^4 + 294\alpha^3 + 644\alpha^2 - 57\alpha - 20)\beta^2 -$$

$$-16\alpha(9\alpha^5 - 120\alpha^4 - 114\alpha^3 + 1143\alpha^2 + 151\alpha - 109)\beta +$$

$$+\alpha^2(144\alpha^4 - 2337\alpha^3 + 4290\alpha^2 + 2815\alpha - 1072), \;\; \tilde{c}_9 = \alpha^7 c_9(\alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}),$$

$$c_{10} = c_{11}(\alpha,\beta) + \alpha^8 c_{11}(\alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}), \;\; c_{11} = 640\beta^4\alpha^2 + 640\alpha(1-5\alpha)\beta^3 +$$

$$+8(483\alpha^3 + 84\alpha^2 - 89\alpha + 2)\beta^2 + 4\alpha(283\alpha + 25 - 948\alpha^2)\beta + 1065\alpha^4 - 291\alpha^3 - 134\alpha^2,$$

$$c_{12} = \alpha^2\beta + 8\alpha^2 - 8\alpha\beta - 16\alpha + 16\beta, \;\; \tilde{c}_{12} = \alpha^3 c_{12}(\alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}),$$

$$c_{13} = 9(4\alpha^2 - 5\alpha + 4)(\alpha-4)^3\beta^4 - 2(\alpha-4)(32\alpha^5 - 55\alpha^4 + 575\alpha^3 - 1076\alpha^2 + 784\alpha + 64)\beta^3 +$$

$$+96\alpha(2\alpha^5-6\alpha^4-41\alpha^3+91\alpha^2-48\alpha-16)\beta^2-96\alpha^2(2\alpha^4-21\alpha^3+29\alpha^2-16)\beta+$$
$$+64\alpha^3(\alpha-2)^3,\;\; c_{14}=c_{15}(\alpha,\beta)+\alpha^{10}c_{15}(\alpha^{-1},\beta\alpha^{-1}),$$
$$c_{15}=(15779\alpha^3-20280\alpha^2+6816\alpha-128)\beta^4+4(\alpha+1)(1403\alpha^3-1332\alpha^2-864\alpha+64)\beta^3-$$
$$-192\alpha(84\alpha^3-61\alpha^2-54\alpha+4)\beta^2+128\alpha^2(\alpha+1)(76\alpha^2-89\alpha+6)\beta-256\alpha^3(12\alpha^2-14\alpha+1).$$

Коэффициенты уравнения $f_8=0$ не приводим здесь из-за их громоздкости, а остальные коэффициенты $c_1, c_2, \tilde{c}_2, c_3$ использованы ранее в уравнениях (15), (21).

Табл. 1. Области существования бифуркационных параметров

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_3'	ρ_4	ρ_5	ρ_5'	ρ_6	ρ_6'	ρ_7	ρ_8	ρ_8'	ρ_8''
1, 2, 3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
4	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
5	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
6, 7	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
8	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
9	$+$	$+$	$\pm$	$\pm$	$+$	$-$	$-$	$\pm$	$\pm$	$<\rho_{1,2}$	$+$	$\pm$	$\pm$
10	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$<\rho_2$	$\pm$	$+$	$+$	$<\rho_{1,2}$	$+$	$\pm$	$\pm$
11	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$<\rho_6$	$-$	$-$
12	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$\pm$	$\pm$	$-$	$<\rho_6$	$+$	$-$

В табл. 1 знаком “$+$” отмечены области, в которых действительное положительное решение $r_*=\rho_i$ уравнения $f_i=0$ всегда существует. Бифуркационная диаграмма Σ качественно меняется, когда параметры α, β, r_* удовлетворяют уравнению $f_i=0$. Знаком “$-$” в табл. 1 отмечены области, в которых уравнения $f_i=0$ не имеют положительных решений. Знак “$\pm$” означает, что действительное положительное решение $r_*=\rho_i$ уравнения $f_i=0$ существует только в некоторой части отмеченной области. Дополнительное условие, которое должно быть наложено на допустимые решения уравнений $f_i=0$, записано в виде “$<\rho_k$”. Нумерация областей в таблице совпадает с нумерацией областей на рис. 2, *а*.

Таким образом классификация возможных диаграмм Σ сведена к нахождению областей существования и исследованию возможных вариантов взаимного расположения величин ρ_i, зависящих от α,β. Предположим, что (α,β,r_*) не удовлетворяют ни одному из уравнений $f_i=0$, тогда условиям $\beta>1>\alpha$ соответствуют только три вида диаграмм; условиям $1>\beta>\alpha$ соответствуют четырнадцать видов диаграмм; условиям $1>\alpha>\beta$ соответствуют двадцатьдевять качественно различных диаграмм.

Теорема 2. В случае, когда центр масс твердого тела лежит в одной из главных плоскостей инерции, бифуркационное множество интегрального отображения $\mathcal{F}$, описываемое параметрическими уравнениями (11),(12), включает 46 качественно различных типов невырожденных бифуркационных диаграмм Σ на плоскости $\mathbb{R}^2(h,g)$.

4. Интегральные многообразия $\mathcal{Q}^3_{h,g}$. Бифуркационная диаграмма Σ разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h,g)$ на открытые двумерные области. Некоторые из этих областей ограничены, другие – уходят на бесконечность (см. рис. 1). Внутри каждой области топологическая структура многообразий $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}^3_{h,g}$ остается неизменной.

Следуя Я.В.Татаринову [4], введем род многообразий $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}^3_{h,g}$: если $\mathcal{U}_{h,g}$ можно получить из сферы удалением l дисков D^2, то будем считать, что связные многообразия $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}^3_{h,g}$ имеют род l. Если интегральное многообразие несвязно, то присвоим ему многозначный род $l_1 l_2 ...$, где l_i – род его отдельной связной компоненты. В пределах одной связной области из $\mathbb{R}^2(h,g)\setminus\Sigma$ многозначный род $l_1 l_2 ...$ постоянен. Более того, с изменением параметров многозначный род многообразий $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}^3_{h,g}$ сохраняется в процессе трансформации бифуркационной диаграммы до тех пор, пока соответствующая область не стянется в кривую или точку.

Теорема 3. Если параметры твердого тела удовлетворяют условиям (7), то на любой особой поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ могут существовать не более четырех критических точек интегрального отображения $\mathcal{F}$.

Доказательство. Как следует из предыдущего анализа, бифуркационная кривая B_2 не имеет самопересечений на плоскости $\mathbb{R}^2(h,g)$, а кривая B_1 имеет только двойные точки самопересечения. Рассмотрим самый сложный случай. Если через точку самопересечения кривой B_1 проходит кривая B_2, то полным прообразом $\mathcal{F}^{-1}(h,g)$ этой точки плоскости является особая изоэнергетическая поверхность $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ с четырьмя критическими точками отображения $\mathcal{F}$. Две из них принадлежат семейству (9), две другие – семейству (10). При этом необходимо, чтобы значения параметров α, β принадлежали областям $9, 10$, указанным на рис. 2, и вместе с r_* удовлетворяли уравнению $f_7 = 0$. $\square$

Теорема 4. Пусть распределение масс твердого тела удовлетворяет условиям (7), тогда при любом фиксированном значении интеграла G приведенный потенциал $U_g(\boldsymbol{\nu})$ имеет не менее двух, но не более десяти критических точек на сфере Пуассона.

Доказательство. Положим $g = 0$, тогда из второго уравнения (11) следует равенство $\tau = -r_*$. Подстановкой $\tau = -r_*$ в (9) находим, что при нулевом значении g приведенный потенциал $U_g(\boldsymbol{\nu})$ всегда имеет ровно две критические точки на сфере $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$. Эти точки с координатами $\boldsymbol{\nu} = (\pm r_1, \pm r_2, 0)$ соответствуют равновесию тела, когда его центр масс занимает наивысшее или наинизшее положения. Других пересечений с осью $O\,h$ бифуркационные кривые B_1, B_2 не имеют.

Пусть $g > 0$, тогда любая линия уровня $g = \mathrm{const}$ пересекает от двух до шести гладких дуг кривой B_1 и, кроме того, не более двух гладких дуг кривой B_2. Например, в случае трех действительных корней уравнения (14) кривая B_1 состоит из шести гладких дуг, вдоль которых, как следует из (13), величина g монотонно возрастает с ростом h. Каждой точке кривой B_1 соответствует одна критическая точка функции $U_g(\boldsymbol{\nu})$ на сфере. На гладких дугах кривой B_2, как следует из (16), величина g также монотонно возрастает с ростом h. Каждой точке кривой B_2 соответствует пара критических точек функции $U_g(\boldsymbol{\nu})$ на сфере. В результате находим, что число критических точек функции $U_g(\boldsymbol{\nu})$, зависящей от g, не может быть выше десяти. Если линия уровня $g = \mathrm{const}$ проходит через особую точку диаграммы Σ, то при этом число критических точек приведенного потенциала не увеличивается, так как каждая особая точка соединяет несколько гладких дуг, а изолированных точек диаграмма Σ не имеет. $\square$

Заметим, что в предположении $r_3 = 0$ примеры приведенных потенциалов с десятью критическими точками были указаны Я.В.Татариновым [4, 9].

Следствие 1. Асимметричное твердое тело, центр масс которого находится в главной плоскости инерции, имеет не менее двух, но не более десяти равномерных вращений при каждом фиксированном значении интеграла G.

Следствие 2. Осесимметричное твердое тело, центр масс которого не принадлежит оси динамической симметрии, имеет не менее двух, но не более шести равномерных вращений при каждом фиксированном значении интеграла G.

Основные типы бифуркационных диаграмм для параметров, удовлетворяющих не-

Табл. 2. Неособые интегральные многообразия и их проекции на сферу

№	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	$viii$
l	0	1	2	3	4	11	12	111
$\mathcal{U}_{h,g}$	S^2	D^2	$D^1 \times S^1$	D^2_2	D^2_3	$D^2 \cup D^2$	$D^2 \cup (D^1 \times S^1)$	$D^2 \cup D^2 \cup D^2$
$\mathcal{Q}^3_{h,g}$	$\mathbb{R}P^3$	S^3	$S^1 \times S^2$	N^3_2	N^3_3	$S^3 \cup S^3$	$S^3 \cup (S^1 \times S^2)$	$S^3 \cup S^3 \cup S^3$

равенствам $A_1 > A_3 > A_2$, $r_*^2 > (\beta - \alpha)$, показаны на рис. 2 в работе [13]. При этом условии, обобщающем условия Гесса и Гриоли, полный список неособых изоэнергетических поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ содержит пять типов 3-многообразий: $\mathbb{R}P^3$, S^3, $S^1 \times S^2$, $S^3 \cup S^3$, $S^3 \cup (S^1 \times S^2)$. Пример более сложной диаграммы приведен на рис. 3: отмечены области с различными типами интегральных многообразий, еще три области ($l = 2, 3, 4$) расположены в треугольнике P_0, P_2, P_3.

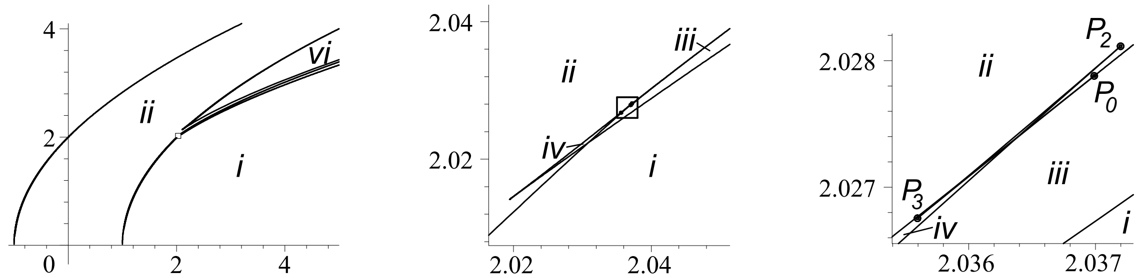


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для $\alpha = 0.59$, $\beta = 0.565$, $r_* = 0.05337$.

Теорема 5. В случае, когда центр масс твердого тела находится в одной из главных плоскостей инерции, топологическая структура неособых многообразий $\mathcal{Q}^3_{h,g}, \mathcal{U}_{h,g}$ определяется таблицей 2.

Доказательство теоремы 5 выходит за рамки настоящей работы. Укажем лишь значения параметров, при которых существует неособое многообразие $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ рода $l = 4$:

$$A = (2.0,\ 1.18,\ 1.13), \quad \mathbf{r} = (0.99849,\ 0.054917,\ 0.0), \quad h = 2.034237, \quad g = 2.02485.$$

Топологический тип многообразия $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ не меняется при малом возмущении указанных параметров. В частности, в задаче о движении тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки существуют все типы многообразий, перечисленные в табл. 2.

5. Об устойчивости равномерных вращений. Знание характера критических точек приведенного потенциала позволяет исследовать устойчивость равномерных вращений. Если функция $U_g(\boldsymbol{\nu})$ имеет минимум, то равномерное вращение в этой точке устойчиво; если функция $U_g(\boldsymbol{\nu})$ имеет седло, то равномерное вращение в этой точке неустойчиво; для точки, где $U_g(\boldsymbol{\nu})$ имеет максимум, непосредственных выводов об устойчивости сделать нельзя. Как показано в работах [4, 7], гладкие кривые, соответствующие минимумам, максимумам и седлам приведенного потенциала, могут быть выделены достаточно просто на любой бифуркационной диаграмме. При этом следует иметь в виду, что на каждом фиксированном уровне интеграла G разность числа минимаксных и числа седловых точек приведенного потенциала $U_g(\boldsymbol{\nu})$ равна эйлеровой характеристике сферы (то есть двум).

Принципиально иной подход к исследованию устойчивых вращений был развит Н.Г.Четаевым и В.В.Румянцевым. В работе [14] построена функция Ляпунова в форме связки интегралов линеаризованых уравнений возмущенного движения и получены достаточные условия устойчивости равномерных вращений твердого тела с неподвижной точкой. В наших обозначениях и при ограничениях (7) эти достаточные условия устойчивости равномерных вращений (9) имеют вид

$$\begin{aligned} &1) \quad (\alpha-\beta)(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}(\tau-\tau_0)\tau^{-1} > 0, \qquad 2) \quad \tilde{\mu}-(1+\tau^2)^{\frac{3}{2}} > 0, \\ &3) \quad \left[(r_*-\tau^3)(1+\tau^2)^{-\frac{3}{2}}\tilde{\mu}-r_*\right]\tau^{-1} > 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\tilde{\mu}$ – произвольная постоянная. Аналогичные достаточные условия устойчивости равномерных вращений (10) записываются в следующей форме

$$\begin{aligned} &(1) \quad \tilde{\mu}(\beta-1)(\beta-\alpha)(1-\sigma_0\sigma^4) > 0, \qquad (2) \quad \tilde{\mu}\sigma^6+(\beta-1) > 0, \\ &(3) \quad \tilde{\mu}\sigma^6 r_*^2(\beta-1)^3(\beta-\alpha)^{-2}+(\beta-\alpha)\tilde{\mu}\sigma^6+(\beta-1)(\beta-\alpha) > 0. \end{aligned} \tag{23}$$

При выполнении неравенств (22), (23) равномерные вращения (9), (10) являются устойчивыми по отношению к переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ [14]. С помощью условий (22), (23) В.В.Румянцев выделил на конусе Штауде области устойчивости. Следующие из условий (22), (23) границы областей устойчивости можно уточнить – они должны соответствовать бесконечно удаленным точкам, точкам ветвления или возврата кривых на бифуркационных диаграммах. Заметим, что найденные в работе [14] устойчивые вращения соответствуют только точкам минимума приведенного потенциала.

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Удмуртский ун-т, 1999. – Т. 2. – 448 с.
2. *Смейл С.* Топология и механика// Успехи матем. наук. – 1972. – **27**, вып. 2. – С. 77–121.
3. *Iacob A.* Invariant manifolds in motion of a rigid body about a fixed point// Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1971. – **16**, № 10. – P. 1497–1521.
4. *Татаринов Я.В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. – 1974. – № 6. – С. 99–105.
5. *Oshemkov A.A.* Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations// Advances in Sov. Math. – 1991. – **6**. – P. 67–146.
6. *McCord C.K., Meyer K.R., Wang Q.* The integral manifolds of the three body problem// Memoirs of the AMS. – 1998. – **132**, № 628. – 91 p.
7. *Каток С.Б.* Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела// Успехи матем. наук. – 1972. – **27**, вып. 2. – С. 126–132.
8. *Татаринов Я.В.* К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. – 1973. – № 5. – С. 70–77.
9. *Татаринов Я.В.* Геометрическая теория симметрии и топологический анализ интегралов в динамике твердого тела. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1975. – 141 с.
10. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
11. *Abraham R., Marsden J.E.* Foundations of Mechanics, 2nd Ed. – London, etc.: Benjamin/Cummings, 1978. – 806 p.
12. *Кузьмина Р.П.* О бифуркационном множестве в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 1. – С. 3–10.
13. *Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю.* Анализ изоэнергетических поверхностей для точных решений задачи о движении твердого тела// Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 18–30.
14. *Румянцев В.В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела// Прикл. математика и механика. – 1956. – **XX**, вып. 1. – С. 51–66.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 1.09.03