УДК 531.35

©2002. **Б.И. Коносевич**

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СНАРЯДА

Изучается движение осесимметричного артиллерийского снаряда в поле силы тяжести под действием аэродинамических сил и моментов. При малых углах атаки динамика полета снаряда обычно моделируется системой дифференциальных уравнений, линеаризованной по переменным, описывающим угловые колебания оси симметрии. Для приближенного интегрирования этих уравнений в классической баллистике разработана трехэтапная схема, которая в наиболее полном виде изложена в известной работе В.С. Пугачева [1]. В настоящей статье получена оценка погрешности этой схемы.

Введение. В первых теоретических исследованиях по внешней баллистике сферический снаряд (ядро) рассматривался как материальная точка. С появлением нарезных орудий усилия многих ученых были направлены на разработку методов исследования динамики полета и вычисления траектории снаряда как твердого тела. Как отмечается в [2], превратить разработанную ими интуитивно очевидную схему в строгую математическую теорию удалось В.С. Пугачеву в работе [1].

Эта схема состоит из трех этапов. Сначала интегрируются уравнения движения снаряда, моделируемого материальной точкой. В результате известными функциями времени становятся коэффициенты уравнений углового движения оси симметрии, линеаризованных при малых углах атаки. Затем с помощью специального асимптотического метода строится в явном виде приближенное решение уравнений углового движения. Наконец, это решение подставляется в уравнения поступательного движения и определяются поправки к исходной траектории.

Основное внимание в работе [1] уделяется оценке погрешности приближенного решения уравнений углового движения, получаемого на втором этапе. Оценка погрешности траектории центра масс снаряда, получаемой на третьем этапе, в указанной работе отсутствует. В книге [3] показно, что классическая трехэтапная схема может быть обоснована для случая оперенного снаряда, если воспользоваться теорией дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Однако обосновать правомочность применения классической схемы к быстровращающемуся артиллерийскому снаряду на основе этой теории нельзя, хотя опыт показывает целесообразность и эффективность расчетов по такой схеме ([3], с. 342).

Обоснование классической схемы должно, очевидно, состоять в установлении малости погрешности определяемой по этой схеме траектории полета снаряда по сравнению с "точной" траекторией, определяемой исходной системой уравнений движения. Выводу такой оценки и посвящена данная статья, а именно, в ней найден порядок искомой погрешности по отношению к введенному в уравнения движения малому параметру.

1. Уравнения движения снаряда. Уравнения движения осесимметричного снаряда, содержащие малый параметр ε, получены в [4] в виде системы (4), (7). В этих уравнениях фазовые переменные $x,\ y,\ z,\ v,\ \theta,\ \psi,\ p,\ q,\ r,\ \alpha,\ \beta$ отнесены к модулям их верхних характерных значений, которые указаны в таблице, приведенной в [4]. Чтобы вывести из них систему уравнений движения снаряда, линеаризованную по переменным углового движения $q,\ r,\ \alpha,\ \beta,$ достаточно отбросить дополнительные члены $h_\Omega,\ h_\Delta$ в (7), а в (4) вместо аэродинамических функций $K_x = R_x/m,\ K_y = R_y/mv\sin\delta,\ K_z = R_z/mv\sin\delta,$ $K_p = M_p/I_1$ удержать их значения при $\zeta = \sin\delta = 0$, равные

$$\frac{1}{m}R_{x0},\ \frac{1}{mv}R'_{y0},\ \frac{1}{mv}R'_{z0},\ \frac{1}{I_1}M_{p0}\ (y, v, p). \tag{1}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по углу атаки δ, нулевым нижним индексом отмечены значения функций при $\delta = 0$. Порядки отброшенных членов сохранятся, если дополнительно линеаризовать уравнения движения по переменной ψ. Для сокращения записи в них используются следующие векторные и комплексные переменные

$$\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p), \quad \xi^5 = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p), \quad \xi^3 = (y, v, p),$$
$$\Omega = q + ir, \quad \Delta = \alpha + i\beta.$$

Будем обозначать через $O(\varepsilon^n)$ $[O^*(\varepsilon^n)]$ величины, порядок которых в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени больше либо равен ε^n [строго равен ε^n]. При этом для положительных величин будем писать $O_+(\varepsilon^n)$ $[O^*_+(\varepsilon^n)]$.

В отличие от [4], примем более точное предположение для квадрата скорости, а именно, что его наименьшее значение, достигаемое вблизи вершины траектории при больших углах стрельбы, равно $O^*(\varepsilon)$, а не $O^*(\varepsilon^2)$. Тогда при всех возможных траекториях полета снаряда вектор ξ принадлежит замкнутому параллелепипеду

$$\Xi = \{\xi : (0, 0, -\varepsilon^2 C^*_z, \sqrt{\varepsilon}C_{v*}, -C^*_\theta, -\varepsilon^2 C^*_\psi, C_{p*}) \le \xi \le (C^*_x, C^*_y, \varepsilon^2 C^*_z, C^*_v, C^*_\theta, \varepsilon^2 C^*_\psi, C^*_p)\}. \tag{2}$$

Здесь буквой C с индексами обозначены положительные постоянные порядка 1. Векторы ξ^5, ξ^3 принадлежат соответствующим областям Ξ^5, Ξ^3.

Как известно, аэродинамические силы и моменты $R_x,\ R_y,\ R_z,\ M_y,\ M_z$ в полетном диапазоне скоростей приблизительно пропорциональны v^2, а коэффициенты демпфирующих моментов M_p, M_Ω — v. Поэтому, относя функции (1), а вместе с ними $M_{\Omega 0},\ M'_{y0},\ M'_{z0}$ к v^2 или v, получим функции, которые равны $O^*(1)$ в Ξ^3:

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ M_{1D},\ M_{2D},\ M_2,\ M_3\ (y, v, p) = O^*(1), \quad (y, v, p) \in \Xi^3. \tag{3}$$

Все их частные производные первого и второго порядков считаются равными $O(1)$ в Ξ^3. Это обозначается следующим образом

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ M_2,\ M_3,\ M_{1D},\ M_{2D}\ (y, v, p) = O^2(1), \quad (y, v, p) \in \Xi^3. \tag{4}$$

По смыслу рассматриваемых сил и моментов, $R_2, M_3 > 0$; $R_1, M_{1D}, M_{2D} < 0$. Одновременно с выделением множителя v^2 в функциях $R'_{y0},\ R'_{z0}$ откорректируем порядок соответствующих им членов в уравнениях движения, приняв его равным ε^4 вместо ε^5 в уравнениях поступательного движения и ε^2 вместо ε^3 в уравнениях углового движения.

Полученная линеаризованная система уравнений движения снаряда состоит из *подси-*

стемы уравнений поступательного движения и продольного вращения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon^3 v\cos\theta, \qquad \dot{y} = \varepsilon^3 v\sin\theta, \qquad \varepsilon^2\dot{z} = \varepsilon^5 v\psi, \\ \dot{v} &= \varepsilon^3\frac{v^2}{m}R_1(y,v) - \varepsilon^4 g\sin\theta, \\ \dot{\theta} &= -\varepsilon^4\frac{g\cos\theta}{v} + \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2(y,v)\alpha - R_3(y,v,p)\beta], \\ \varepsilon^2\dot{\psi} &= \varepsilon^6\frac{g}{v}\psi\sin\theta + \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_3(y,v,p)\alpha + R_2(y,v)\beta], \\ \dot{p} &= \varepsilon^4\frac{p}{I_1}vM_{1D}(y,v) \end{aligned} \tag{5}$$

и *подсистемы уравнений углового движения* оси симметрии снаряда

$$\dot{\Omega} = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta, \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\varepsilon^2\psi,\varepsilon). \tag{6}$$

В (6) приняты обозначения

$$\begin{aligned} &a(y,v,p,\varepsilon) = [\varepsilon^2 vM_{2D}(y,v) + iI_1p]/I_2,\ b(y,v,p,\varepsilon) = v^2[\varepsilon^2 M_2(y,v,p) + iM_3(y,v)]/I_2, \\ &k(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^2 v[R_2(y,v) + iR_3(y,v,p)]/m,\ l(v,\theta,\psi,\varepsilon) = \varepsilon^2 g(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta)/v. \end{aligned} \tag{7}$$

Система (5),(6) рассматривается на отрезке времени $[t_0; t_{max}]$ длины $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$; здесь t_0 — момент выстрела, t_{max} — верхняя граница моментов t_1 падения снаряда на землю. При этом из последнего уравнения (5) с учетом начального условия $p(t_0,\varepsilon) = O^*(1)$ следует, что $p(t,\varepsilon) = O^*(1)$ для $t \in [t_0; t_{max}]$. В векторной форме подсистема (5) записывается так

$$\dot{\xi} = f(\xi,\varepsilon) + f_\alpha(\xi,\varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi,\varepsilon)\beta. \tag{8}$$

Определения векторов-столбцов $f,\ f_\alpha,\ f_\beta$ вытекают из сравнения (5) и (8).

2. Приближенное решение уравнений углового движения. Обозначим через $\xi,\ \Omega,\ \Delta\ (t,\varepsilon)$ точное решение исходной системы (6),(8) при заданных в момент t_0 начальных условиях $\xi(t_0,\varepsilon) \in \Xi;\ \ \Omega, \Delta(t_0,\varepsilon) = O(1)$. Предполагается, что $\xi(t,\varepsilon) \in \Xi$ при $t \in [t_0; t_{max}]$ для всех возможных траекторий полета снаряда.

Пусть $e_1,\ d_1\ (\xi^5,\varepsilon)$ — значения $\Omega,\ \Delta,$ при которых зануляются правые части (6):

$$e_1 = bl/(ib - ak), \quad d_1 = -al/(ib - ak). \tag{9}$$

Определенная в (7) функция $a(\xi^3,\varepsilon)$ имеет производную по t в силу (5) вида $\dot{a}(\xi^5,\varepsilon) = a_0^1(\xi^3,\varepsilon) + a_1^1(\xi^5,\varepsilon)$, где $a_0^1(\xi^3,\varepsilon) = i\varepsilon^4 pvM_{1D}(y,v)/I_2 = O(\varepsilon^4)$ — главный, $a_1^1 = O(\varepsilon^5)$ — дополнительный членыю. Введем функции $w,\ \lambda_j = n_j + i\omega_j$, зависящие от $\xi^3,\ \varepsilon,$ и функции $\lambda_j^+(\xi^5,\varepsilon)\quad (j = 1,2)$ по формулам

$$w = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{a_0^1}{2}, \quad \lambda_j = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w}, \quad \lambda_j^+ = \lambda_j - \frac{\dot{w}}{4w} \qquad (j = 1,2), \tag{10}$$

верхний знак соответствует $j = 1$, а нижний — $j = 2$.

В статье [4] на основе нелинейных уравнений движения снаряда установлен следующий результат, который верен и для линеаризованных уравнений (5),(6). Пусть $\Omega, \Delta(t_0;\varepsilon) = O(1)$, а на траектории полета снаряда выполнено условие Маиевского $1 - 4I_2v^2M_3/I_1^2p^2 > 0$ и неравенства $n_1, n_2 \le O_+(\varepsilon^4)$. Тогда $\Omega, \Delta(t;\varepsilon) = O(1)$, $t \in [t_0; t_{max}]$.

Заметим, что поскольку $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то при $n_1, n_2 \leq O_+(\varepsilon^4)$ будет

$$\left|\exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau,\varepsilon)\, d\tau\right| = \exp \int\limits_{t_0}^{t} n_j(\tau,\varepsilon)\, d\tau = 1 + O_+(\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}],\ j = 1, 2. \tag{11}$$

При известной точной зависимости $\xi(t,\varepsilon)$ рассмотрим следующее приближенное решение подсистемы (6), построенное асимптотическим методом:

$$\begin{gathered}\widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) = i\widetilde{s}_1(t,\varepsilon)[\lambda_1^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_1(t,\varepsilon) + \\ + i\widetilde{s}_2(t,\varepsilon)[\lambda_2^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_2(t,\varepsilon) + e_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon), \\ \widetilde{\Delta}(t,\varepsilon) = \widetilde{s}_1(t,\varepsilon) \exp i\varphi_1(t,\varepsilon) + \widetilde{s}_2(t,\varepsilon) \exp i\varphi_2(t,\varepsilon) + d_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon).\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\widetilde{s}_j(t,\varepsilon) = C_j \frac{w^{1/4}(\xi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)} \exp \nu_j(t,\varepsilon), \\ \nu_j(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} n_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau, \quad \varphi_j(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \omega_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau \quad (j = 1, 2).\end{gathered} \tag{13}$$

Выражения для комплексных постоянных $C_j = \widetilde{s}_j(t_0,\varepsilon),\ j = 1, 2,$ получаются из условий $\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Delta}(t_0,\varepsilon) = \Omega, \Delta(t_0,\varepsilon)$. Отсюда следует, что $C_j = O(1),\ j = 1, 2$.

Так же, как в [5, 6], устанавливается следующая оценка погрешности приближенного решения (12) подсистемы (6) по сравнению с ее точным решением при одинаковых начальных условиях:

$$\Omega(t,\varepsilon) - \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \widetilde{\Delta}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \tag{14}$$

Вывод этой оценки основан на преобразовании (6) к квазидиагональному виду путем перехода от Ω, Δ к переменным s_1, s_2 по формулам

$$\begin{gathered}\Omega = is_1[\lambda_1^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_1(t,\varepsilon) + \\ + is_2[\lambda_2^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_2(t,\varepsilon) + e_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon), \\ \Delta = s_1 \exp i\varphi_1(t,\varepsilon) + s_2 \exp i\varphi_2(t,\varepsilon) + d_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon).\end{gathered} \tag{15}$$

3. Постановка задачи. Согласно классической схеме интегрирования, приближенное решение уравнений (6),(8) выражается формулами

$$\xi_c = \xi^{(0)} + \widetilde{\xi}^{(1)}, \quad \Omega_c = \widetilde{\Omega}^{(0)}, \quad \Delta_c = \widetilde{\Delta}^{(0)}. \tag{16}$$

Здесь зависимость $\xi^{(0)}(t,\varepsilon)$ определяется по модели материальной точки:

$$\dot{\xi}^{(0)} = f(\xi^{(0)}), \tag{17}$$

при $\xi^{(0)}(t_0,\varepsilon) = \xi(t_0,\varepsilon)$. После этого $\widetilde{\Omega}^{(0)}, \widetilde{\Delta}^{(0)}(t,\varepsilon)$ определяются системой (6), рассматриваемой при $\xi = \xi^{(0)}(t,\varepsilon)$, как ее приближенное решение, аналогичное (12):

$$\begin{gathered}\widetilde{\Omega}^{(0)}(t,\varepsilon) = i\widetilde{s}_1^{(0)}(t,\varepsilon)[\lambda_1^+(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_1^{(0)}(t,\varepsilon) + \\ + i\widetilde{s}_2^{(0)}(t,\varepsilon)[\lambda_2^+(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_2^{(0)}(t,\varepsilon) + e_1(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon), \\ \widetilde{\Delta}^{(0)}(t,\varepsilon) = \widetilde{s}_1^{(0)}(t,\varepsilon) \exp i\varphi_1^{(0)}(t,\varepsilon) + \widetilde{s}_2^{(0)}(t,\varepsilon) \exp i\varphi_2^{(0)}(t,\varepsilon) + d_1(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon).\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь

$$\widetilde{s}_j^{(0)}(t,\varepsilon) = C_j \frac{w^{1/4}(\xi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon)} \exp \nu_j^{(0)}(t,\varepsilon),$$

$$\nu_j^{(0)}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} n_j(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau, \quad \varphi_j^{(0)}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \omega_j(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau \quad (j=1,2), \tag{19}$$

а комплексные постоянные $C_j = \widetilde{s}_j(t_0,\varepsilon),\ j=1,2,$ выражаются теми же формулами, что и для решения (12). Наконец, полагая $\widetilde{\Delta}^{(0)}(t,\varepsilon) = \widetilde{\alpha}^{(0)}(t,\varepsilon) + i\widetilde{\beta}^{(0)}(t,\varepsilon)$, при $\widetilde{\xi}^{(1)}(t_0,\varepsilon) = 0$ находим зависимость $\widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)$ из уравнения

$$\dot{\widetilde{\xi}}^{(1)} = \frac{\partial f(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \xi}\widetilde{\xi}^{(1)} + f_\alpha(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon)\widetilde{\alpha}^{(0)}(t,\varepsilon) + f_\beta(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon)\widetilde{\beta}^{(0)}(t,\varepsilon). \tag{20}$$

Целью данной работы является оценка погрешности $\xi_c(t,\varepsilon)$ в решении (16).

4. Вспомогательные оценки. По предположению, $\xi(t,\varepsilon) \in \Xi$ при $t \in [t_0; t_{max}]$ для всех траекторий полета снаряда. Введем в векторном пространстве R^7 норму

$$||\xi|| = \max_{j=1,\dots,7} |\xi_j|. \tag{21}$$

Поскольку функция $f(\xi,\varepsilon)$ в правых частях уравнений (8), (17) непрерывно дифференцируема в Ξ, то она удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$||f(\xi,\varepsilon) - f(\widetilde{\xi},\varepsilon)|| \le l_f ||\xi - \widetilde{\xi}||, \tag{22}$$

где в качестве постоянной l_f можно принять

$$l_f = \max_{\xi\in\Xi} ||\partial f(\xi,\varepsilon)/\partial\xi|| = \max_{\xi\in\Xi}\max_{i=1,\dots,7}\sum_{j=1}^{7} |\partial f_i(\xi,\varepsilon)/\partial\xi_j|$$

или любое большее число. Так как пятая и шестая компоненты f содержат v в знаменателях, а $1/v^2 = O(\varepsilon^{-1})$, то частные производные этих компонент по v равны $O(\varepsilon^3)$ и $O(\varepsilon^5)$. Все остальные частные производные от компонент f имеют те же порядки, что и сами компоненты. Следовательно, в (22) будет $l_f = O(\varepsilon^3)$, то есть $l_f = \varepsilon^3 L_f$, где $L_f = O_+(1)$.

Из того, что $\xi(t,\varepsilon) \in \Xi$, не следует, что $\xi^{(0)}(t,\varepsilon) \in \Xi$. Поэтому некорректно применять условие (22) при $\widetilde{\xi} = \xi^{(0)}(t,\varepsilon)$. Чтобы преодолеть это затруднение, воспользуемся тем, что постоянная l_f слабо изменяется при переходе от исходной области Ξ к некоторым содержащим ее областям. Рассмотрим сначала область Ξ_1, которая получается, если в (2) заменить неравенства $|\varepsilon^2 z| \le \varepsilon^2 C_z^*$, $|\varepsilon^2\psi| \le \varepsilon^2 C_\psi^*$ неравенствами $|\varepsilon^2 z| \le 1$, $|\varepsilon^2\psi| \le 1$. Функция f от z не зависит, а порядки производных ее компонент по $\varepsilon^2\psi$ не ниже, чем ε^3. Поэтому оценка $l_f = \varepsilon^3 L_f$ сохраняется в Ξ_1. Рассмотрим теперь область Ξ_ε, содержащую область Ξ_1 и близкую к ней:

$$\Xi_\varepsilon = \{\xi : (-\varepsilon, -\varepsilon, -1, \sqrt{\varepsilon}(C_{v*} - \varepsilon), -C_\theta^* - \varepsilon, -1, C_{p*} - \varepsilon) \le \xi \le$$
$$\le (C_x^* + \varepsilon, C_y^* + \varepsilon, 1, C_v^* + \varepsilon, C_\theta^* + \varepsilon, 1, C_p^* + \varepsilon)\}. \tag{23}$$

В (23) все постоянные порядка 1 изменены не более, чем на ε, по сравнению с определением Ξ_1. Поэтому в Ξ_ε функция f удовлетворяет условию (22) с постоянной $l_f = \varepsilon^3 L_f$.

В дальнейшем понадобятся оценки порядков в Ξ (а следовательно, и в Ξ_ε) для функций в правых частях уравнений (6), (8) и в формулах (12), (13). Уравнения (5) и выражения (7) для коэффициентов уравнений (6) записаны таким образом, что порядки по ε всех входящих в них функций определяются только порядком v. Значения порядка 1 скорость v принимает на начальном участке траектории, а на остальной части траектории (при больших углах стрельбы) будет $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$. Таким образом, для каждой из функций необходимо определить ее порядки при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$, и тогда наинизший из них будет равен результирующему порядку данной функции на всей траектории полета снаряда. Не приводя здесь эти оценки, отметим, что для функций $f,\ f_\alpha,\ f_\beta$ и функций (7): a, b, k, l они непосредственно следуют из их выражений. Чтобы получить оценки порядков функций (9), (10): $e_1,\ d_1,\ w,\ \lambda_j = n_j + \omega_j\ (j = 1, 2)$, их частных производных и производных по t в силу уравнений движения, следует выделить ведущие члены их разложений по степеням ε и с учетом (3), (4) найти порядки этих членов при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$.

5. Погрешность модели материальной точки. *Пусть* $\xi,\ \Omega,\ \Delta\ (t, \varepsilon),\quad t \in \in [t_0; t_{max}]$ *— решение полной системы* (6), (8) *при заданных в момент выстрела начальных условиях* $\xi,\ \Omega,\ \Delta\ (t_0, \varepsilon) = O(1)$*, а* $\xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ *— решение уравнения* (17) *при начальном условии* $\xi^{(0)}(t_0, \varepsilon) = \xi(t_0, \varepsilon)$*. Тогда*

$$||\xi(t, \varepsilon) - \xi^{(0)}(t, \varepsilon)|| = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \tag{24}$$

Чтобы вывести оценку (24), подставим точное решение $\xi,\ \Omega,\ \Delta\ (t, \varepsilon)$ уравнений (6), (8) в уравнение (8). Получим векторное тождество по t, причем, согласно (5), переменные $\alpha,\ \beta$ входят только в его пятую и шестую компоненты. Умножив шестую компоненту на мнимую единицу и сложив с пятой, будем иметь комплексное тождество

$$\dot\theta(t, \varepsilon) + i\dot\psi(t, \varepsilon) = \hat f(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + \hat f_\Delta(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)\Delta(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}],$$

где

$$\hat f(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^4 \frac{g}{v}(-\cos\theta + i\varepsilon^2 \sin\theta), \quad \hat f_\Delta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^4 \frac{v}{m}[R_2(y, v) + iR_3(y, v, p)]. \tag{25}$$

Подставим сюда выражение (15) для Δ и перейдем к интегральной форме записи. Получим тождественное по $t \in [t_0; t_{max}]$ равенство

$$\theta(t, \varepsilon) + i\psi(t, \varepsilon) = \theta(t_0, \varepsilon) + i\psi(t_0, \varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} \hat f(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\, d\tau + h_1(t, \varepsilon) + h_2(t, \varepsilon) + h_d(t, \varepsilon), \tag{26}$$

в котором

$$h_j(t, \varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \hat f_\Delta(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) s_j(\tau, \varepsilon) \exp\varphi_j(\tau, \varepsilon)\, d\tau \quad (j = 1, 2), \tag{27}$$

$$h_d(t, \varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \hat f_\Delta(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d_1(\tau, \varepsilon)\, d\tau. \tag{28}$$

Из (9), (25) следует, что $f_\Delta d_1 = O(\varepsilon^5)$ при $v = O^*_+(\varepsilon^{1/2})$, и $f_\Delta d_1 = O(\varepsilon^6)$ при $v = O^*_+(1)$, так что в результате $f_\Delta d_1 = O(\varepsilon^5)$. А поскольку $t \in [t_0; t_{max}]$, $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то из (28) сразу находим

$$h_d(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \tag{29}$$

Для интегралов вида (27) в [6] получена оценка, которая после сделанной в п. 1 корректировки переходит в следующую:

$$h_j(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}],\ j = 1, 2. \tag{30}$$

Можно показать, что фактически порядки h_1, h_2 выше, чем в (30), но с учетом (29) это никак не влияет на окончательный результат.

Из (29), (30) следует, что комплексное тождество (26) может быть записано в виде

$$\theta(t,\varepsilon) + i\psi(t,\varepsilon) = \theta(t_0,\varepsilon) + i\psi(t_0,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} \hat{f}(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau + \hat{h}(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}],$$

где $\hat{h}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$. Это означает, что векторное тождество, которое получается при подстановке точного решения $\xi,\ \Omega,\ \Delta\ (t,\varepsilon)$ в (8), записывается в виде

$$\xi(t,\varepsilon) = \xi(t_0,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau + h(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}], \tag{31}$$

где $h(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, то есть

$$||h(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^2 C_h, \quad t \in [t_0; t_{max}] \qquad (C_h = O_+(1)). \tag{32}$$

В результате подстановки $\xi^{(0)}(t,\varepsilon)$ в уравнение (17) и интегрирования получаем тождество

$$\xi^{(0)}(t,\varepsilon) = \xi(t_0,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau, \quad t \in [t_0; t_{max}]. \tag{33}$$

Так как $\xi(t,\varepsilon) \in \Xi \subset \Xi_\varepsilon$ для всех $t \in [t_0; t_{max}]$, а $\xi^{(0)}(t_0,\varepsilon) = \xi(t_0,\varepsilon)$, то $\xi^{(0)}(t,\varepsilon)$ вследствие непрерывности по t лежит в Ξ_ε в течение некоторого времени после выстрела. Точнее, существует момент $t' \in (t_0; t_{max}]$ такой, что $\xi^{(0)}(t,\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ для всех $t \in [t_0; t']$. Следовательно, на отрезке $[t_0; t']$ для векторов $\xi = \xi(t,\varepsilon)$, $\widetilde{\xi} = \xi^{(0)}(t,\varepsilon)$ выполнено условие Липшица (22) с постоянной $l_f = \varepsilon^3 L_f$. Из (31)–(33) тогда следует, что

$$||\xi(t,\varepsilon) - \xi^{(0)}(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^3 L_f \int\limits_{t_0}^{t} ||\xi(\tau,\varepsilon) - \xi^{(0)}(\tau,\varepsilon)||\, d\tau + \varepsilon^2 C_h, \quad t \in [t_0; t'].$$

Воспользовавшись леммой Гроноулла (см. [7]), получаем на $[t_0; t']$ оценку (24):

$$||\xi(t,\varepsilon) - \xi^{(0)}(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^2 C_h \exp \varepsilon^3 L_f (t - t_0) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t'].$$

Покажем, что она выполнена на всем интервале $[t_0; t_{max}]$, то есть $t' = t_{max}$. Для этого установим, что $\xi^{(0)}(t,\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ при всех $t \in [t_0; t_{max}]$, и тем самым для $\xi = \xi(t,\varepsilon)$, $\widetilde{\xi} = \xi^{(0)}(t,\varepsilon)$ обеспечено выполнение условия Липшица (22) на $t \in [t_0; t_{max}]$. Если допустить противное, то вектор $\xi^{(0)}(t',\varepsilon)$ принадлежит границе области Ξ_ε. При этом в момент $t = t'$ будет $\xi(t',\varepsilon) \in \Xi$, поскольку $\xi(t,\varepsilon) \in \Xi$ для всех $t \in [t_0; t_{max}]$. Границами областей Ξ, Ξ_ε являются части плоскостей $\xi_j = \mathrm{const}$ $(j = 1, \ldots, 7)$, ортогональных осям координат в пространстве векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_7)$. Область Ξ_ε сконструирована таким образом, что расстояние от любой точки $\xi^{(0)}$ ее границы до любой точки $\xi \in \Xi$, отсчитываемое в норме (21), больше либо равно $O^*(1)$, или $O^*(\varepsilon)$, или $O^*(\varepsilon^{3/2})$ в зависимости от того, по какой из компонент вектора $\xi - \xi^{(0)}$ достигается максимум $|\xi_j - \xi_j^{(0)}|$ при $j = 1, \ldots, 7$. Но в любом из этих случаев расстояние от точки $\xi^{(0)}$ границы Ξ_ε до любой из точек $\xi \in \Xi$ больше, чем $O(\varepsilon^2)$. В частности, для рассматриваемых точек имеем $||\xi(t',\varepsilon) - \xi^{(0)}(t',\varepsilon)|| > O(\varepsilon^2)$. Но это невозможно, так как, по доказанному выше, в момент t' оценка (24) еще выполняется.

6. Оценка погрешности $\xi_c = \xi^{(0)} + \widetilde{\xi}^{(1)}$ **.** Оценим норму разности

$$\xi(t,\varepsilon) - \xi_c(t,\varepsilon) = \xi(t,\varepsilon) - [\xi^{(0)}(t,\varepsilon) + \widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)], \quad t \in [t_0; t_{max}].$$

Эту разность можно представить в виде $\xi^{(1)}(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)$, где вектор возмущений $\xi^{(1)}(t,\varepsilon) = \xi(t,\varepsilon) - \xi^{(0)}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке (24), а $\widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)$ — решение уравнения (20) при нулевом начальном условии.

6.1. Интегральное тождество для $\xi^{(1)}$**.** Чтобы оценить $||\xi^{(1)}(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)||$, запишем в виде тождества по t дифференциальное уравнение (8) для ξ, положим в нем $\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)}$ и, приняв во внимание (17), преобразуем к интегральному тождеству для $\xi^{(1)}$. Затем выделим в функциях $f_\alpha,\ f_\beta\ (\xi^{(0)} + \xi^{(1)})$ члены, не зависящие от $\xi^{(1)}$, а в функции $f(\xi_{(0)} + \xi^{(1)})$ выделим линейные по $\xi^{(1)}$ члены. Тогда с учетом оценки (24) для $\xi^{(1)}$ дополнительные члены в выражениях этих функций будут равны $O(\varepsilon^6)$ и $O(\varepsilon^{13/2})$. Так как $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то в правой части интегрального тождества для $\widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)$ им соответствует дополнительный член, равный $O(\varepsilon^3)$. Далее, в соответствии с (14) полагаем $\alpha = \widetilde{\alpha} + O(\varepsilon^2),\ \beta = \widetilde{\beta} + O(\varepsilon^2)$. При этом порядок дополнительного члена не изменяется. Наконец, представив $\widetilde{\alpha},\ \widetilde{\beta}$ в виде $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}^{(0)} + (\widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha}^{(0)})$, $\widetilde{\beta} = \widetilde{\beta}^{(0)} + (\widetilde{\beta} - \widetilde{\beta}^{(0)})$, получаем векторное интегральное тождество

$$\begin{gathered}\xi^{(1)}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} [\frac{\partial f(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \xi} \xi^{(1)}(\tau,\varepsilon) + f_\alpha(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\widetilde{\alpha}^{(0)}(\tau,\varepsilon) + \\ + f_\beta(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\widetilde{\beta}^{(0)}(\tau,\varepsilon)]\, d\tau + h(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}],\end{gathered} \tag{34}$$

в котором к дополнительным членам присоединяется еще вектор h, а подынтегральные члены имеют структуру правой части (20).

Поскольку α, β входят только в пятое и шестое уравнения подсистемы (6), то у вектора-столбца h в (34) отличны от нуля только компоненты h_5, h_6. Объединим пятую и шестую компоненты тождества (34) в комплексное равенство

$$\begin{gathered}\theta^{(1)}(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2\psi^{(1)}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} [\frac{\partial \hat{f}(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \xi} \xi^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\widetilde{\Delta}^{(0)}(\tau,\varepsilon)]\, d\tau + \\ + \hat{h}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}],\end{gathered} \tag{35}$$

где $\hat{f},\ \hat{f}_\Delta$ определены в (25),

$$\hat{h}(t,\varepsilon)=\int\limits_{t_0}^{t}\hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)[\widetilde{\Delta}(\tau,\varepsilon)-\widetilde{\Delta}^{(0)}(\tau,\varepsilon)]\,d\tau,\quad t\in[t_0;t_{max}].\tag{36}$$

Тогда $h_5=\operatorname{Re}\hat{h},\ \ h_6=\operatorname{Im}\hat{h}$, и поэтому $||h||=\max(\operatorname{Re}\hat{h},\operatorname{Im}\hat{h})$. Покажем, что $\hat{h}(t,\varepsilon)=$ $=O(\varepsilon^3)$, и следовательно, в (34) будет $||h(t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^3),\ t\in[t_0;t_{max}]$.

Подставим в (36) выражения (12), (13), (18), (19) для $\widetilde{\Delta},\widetilde{\Delta}^{(0)}$ и запишем $\hat{h}$ в виде суммы

$$\hat{h}(t,\varepsilon)=\hat{h}_1(t,\varepsilon)+\hat{h}_2(t,\varepsilon)+\hat{h}_3(t,\varepsilon)\tag{37}$$

трех интегралов

$$\begin{aligned}
\hat{h}_1(t,\varepsilon)&=\int\limits_{t_0}^{t}\hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)[d_1(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-d_1(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\,d\tau,\\
\hat{h}_2(t,\varepsilon)&=\int\limits_{t_0}^{t}\Big[\big(g(\xi(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)-g(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big)\sum_{j=1}^{2}C_j\exp\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_j(\xi(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau_1\Big]\,d\tau,\\
\hat{h}_3(t,\varepsilon)&=\int\limits_{t_0}^{t}g(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big[\sum_{j=1}^{2}C_j\Big(\exp\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_j(\xi(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau_1-\\
&\qquad-\exp\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_j(\xi^{(0)}(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau_1\Big)\Big]\,d\tau.
\end{aligned}\tag{38}$$

где

$$g(\xi,t,\varepsilon)=\hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{w^{1/4}(\xi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi,\varepsilon)}.\tag{39}$$

6.2. Оценка $\hat{h}_1,\hat{h}_2$. Рассмотрим сначала $\hat{h}_1(t,\varepsilon)$. В области Ξ_ε в соответствии с (25) имеем $\hat{f}_\Delta=O(\varepsilon^4)$, а d_1, согласно (9), удовлетворяет условию Липшица по ξ с постоянной $L_d=O_+(1)$. Так как $\xi,\xi^{(0)}(t,\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon$ (см. п. 5), то эти соотношения справедливы для соответствующих функций под знаком интеграла $\hat{h}_1$ в (38). Приняв во внимание оценку (24) для $\xi^{(1)}$, заключаем, что подынтегральная функция здесь равна $O(\varepsilon^6)$. Поэтому

$$\hat{h}_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3),\quad t\in[t_0;t_{max}].\tag{40}$$

Переходя к интегралу $\hat{h}_2(t,\varepsilon)$, заметим, что функция $g(\xi,t,\varepsilon)$ в силу ее определения (39) и оценок $\hat{f}_\Delta(\xi,\varepsilon)=O^2(\varepsilon^4),\ \ w^{-1/4}(\xi,\varepsilon)=O^2(1)$ имеет в Ξ_ε постоянную Липшица $l_g=\varepsilon^4L_g$. Отсюда с учетом соотношений $C_1,C_2=O(1)$ и оценки (11) следует, что подынтегральная функция для $\hat{h}_2$ равна $O(\varepsilon^6)$, и значит,

$$\hat{h}_2(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3),\quad t\in[t_0;t_{max}].\tag{41}$$

6.3. Оценка $\hat{h}_3$. Запишем выражение (38) для $\hat{h}_3$ в виде

$$\hat{h}_3(t,\varepsilon)=\hat{h}_{31}(t,\varepsilon)+\hat{h}_{32}(t,\varepsilon),\tag{42}$$

где

$$\hat{h}_{31}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} g(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big[\sum_{j=1}^{2} C_j \exp\nu_j(\tau,\varepsilon)\big(\exp i\varphi_j(\tau,\varepsilon) - \exp i\varphi_j^{(0)}(\tau,\varepsilon)\big)\big]\,d\tau,$$
$$\hat{h}_{32}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} g(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big[\sum_{j=1}^{2} C_j \big(\exp\nu_j(\tau,\varepsilon) - \exp\nu_j^{(0)}(\tau,\varepsilon)\big)\exp i\varphi_j^{(0)}(\tau,\varepsilon)\big]\,d\tau. \qquad (43)$$

Пользуясь формулой $\exp i\varphi_j - \exp i\varphi_j^{(0)} = 2i\sin\frac{1}{2}(\varphi_j - \varphi_j^{(0)})\exp\frac{1}{2}i(\varphi_j + \varphi_j^{(0)})$, представим интеграл $\hat{h}_{31}$ в виде суммы $\hat{h}_{31}(t,\varepsilon) = \hat{h}_{311}(t,\varepsilon) + \hat{h}_{312}(t,\varepsilon)$ двух интегралов

$$\hat{h}_{31j}(t,\varepsilon) = 2iC_j\int\limits_{t_0}^{t} g(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\exp\nu_j(\tau,\varepsilon)\sin\frac{\varphi_j - \varphi_j^{(0)}}{2}\exp i\frac{\varphi_j + \varphi_j^{(0)}}{2}\,d\tau.$$

Преобразуем их с помощью формулы интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, взяв $dv = d[\exp\frac{1}{2}i(\varphi_j + \varphi_j^{(0)})]$. Сумму получающихся выражений оценим по модулю при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$. При этом к интегральному выражению, содержащему $d(\exp\nu_j)/d\tau = n_j\exp\nu_j$, при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ приходится снова применять формулу интегрирования по частям.

Для величин, входящих в эти выражения, необходимые оценки модулей и постоянных Липшица следуют из их определений и соотношений (3), (4), (11), (24). В частности, для частот ω_j $(j = 1, 2)$, согласно формулам (23) статьи [4], имеем

$$\omega_j = \frac{pI_1}{I_2}[1 \pm \sigma(y,v,p)] + \varepsilon^2 vO^2(1), \qquad \sigma = \left[1 - \frac{4v^2M_3(y,v)I_2}{p^2I_1}\right]^{1/2} = 1 + O^2(\varepsilon).$$

Отсюда следуют оценки в Ξ_ε модулей частот: $|\omega_1| \le M^*_{\omega_1}$, $|\omega_2| \le \varepsilon M^{*\prime}_{\omega_2}$ при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$, $|\omega_2| \le M^*_{\omega_2}$ при $v = O^*(1)$, и их постоянных Липшица по ξ: $l_{\omega_1} = L_{\omega_1}$, $l_{\omega_2} = \varepsilon^{1/2}L'_{\omega_2}$ при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$, $l_{\omega_2} = L_{\omega_2}$ при $v = O^*(1)$. В результате для $\hat{h}_{31}$ получаем

$$\hat{h}_{31}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \qquad (44)$$

Оценим теперь интеграл $\hat{h}_{32}$, определенный второй формулой (43). Он равен сумме $\hat{h}_{32}(t,\varepsilon) = \hat{h}_{321}(t,\varepsilon) + \hat{h}_{322}(t,\varepsilon)$ двух интегралов

$$\hat{h}_{32j}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} g(\xi^{(0)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)C_j\big[\exp\nu_j(\tau,\varepsilon) - \exp\nu_j^{(0)}(\tau,\varepsilon)\big]\exp i\varphi_j^{(0)}(\tau,\varepsilon)\,d\tau \quad (j = 1, 2).$$

Преобразуя их по формуле интегрирования по частям и оценивая по модулю при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$, получаем в результате $\hat{h}_{32}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{7/2})$, $t \in [t_0; t_{max}]$.

Подставив это значение вместе с (44) в (42), находим

$$\hat{h}_3(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \qquad (45)$$

6.4. Вывод оценки для ξ_c. На основании формул (37), (40), (41), (45) заключаем, что $\hat{h}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3)$ в интегральном тождестве (35), и поэтому функция $h(t,\varepsilon)$ в (34) удовлетворяет оценке $||h(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^3)$, $t \in [t_0; t_{max}]$. Это означает, что в (34) суммарный дополнительный член $h_{\xi^{(1)}}$ равен $O(\varepsilon^3)$, то есть $||h_{\xi^{(1)}}|| \le \varepsilon^3 M_h^*$, $t \in [t_0; t_{max}]$. С другой стороны, из уравнения (20) при нулевом начальном условии следует интегральное тождество для $\widetilde{\xi}^{(1)}$, которое отличается от (34) только отсутствием дополнительного члена. Вычитая эти тождества и переходя к нормам, будем иметь неравенство, которое с учетом полученной в п. 4 оценки $||\partial f(\xi,\varepsilon)/\partial\xi|| \le \varepsilon^3 L_f$ $(\xi \in \Xi_\varepsilon)$ записывается в виде

$$||\xi^{(1)}(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)|| \le \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^3 L_f ||\xi^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \widetilde{\xi}^{(1)}(\tau,\varepsilon)||\, d\tau + \varepsilon^3 M_h^*, \quad t \in [t_0; t_{max}].$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, выводим отсюда неравенство

$$||\xi^{(1)}(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^3 M_h^* \exp \varepsilon^3 L_f (t - t_0), \quad t \in [t_0; t_{max}].$$

Так как $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, а $\xi - \xi_c = \xi^{(1)} - \widetilde{\xi}^{(1)}$, приходим к следующему результату.

Пусть $\xi,\ \Omega,\ \Delta\ (t,\varepsilon)$, $t \in [t_0; t_{max}]$ — *решение полной системы* (6), (8) *при заданных в момент выстрела начальных условиях* $\xi,\ \Omega,\ \Delta\ (t_0,\varepsilon) = O(1)$, *а* $\xi_c(t,\varepsilon) = \xi^{(0)}(t,\varepsilon) + \widetilde{\xi}^{(1)}(t,\varepsilon)$ — *приближенное решение уравнения* (8)*, найденное по описанной в п.* 3 *схеме. Тогда*

$$||\xi(t,\varepsilon) - \xi_c(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \tag{46}$$

В статье [6] изучалась система уравнений, которая получается из (8) при подстановке вместо α, β выражений $\operatorname{Re} d_1(\xi,\varepsilon)$ и $\operatorname{Im} d_1(\xi,\varepsilon)$, где функция $d_1(\xi,\varepsilon)$ определена в (9). Такая система не содержит быстро колеблющихся переменных и позволяет определить зависимость ξ от t в один этап, а не в три этапа, как в классической схеме. Для ее погрешности в [6] установлена оценка, которая (с учетом сделанной в п. 1 данной работы корректировки порядков членов, содержащих подъемную и боковую силы) совпадает с (46).

Так как параметр ε введен вместо числа $\varepsilon_0 = 0{,}1$, и при этом в качестве масштабов для переменных x, y, z выбраны 10^4 м, 10^4 м, 10^2 м, то для исходных декартовых координат центра масс x, y, z оценка (46) устанавливает погрешность порядка 10 м.

1. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
2. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
3. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
4. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.
5. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности уточненного асимптотического решения линеаризованных уравнений движения оси симметрии снаряда // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2001. – Т. 6. – С. 61–66.
6. *Коносевич Б.И.* О применении асимптотических методов в теории полета осесимметричного снаряда// Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 63–75.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1970. – 720 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 30.10.02