

УДК 531.38

©2002. И.Н. Гашененко, Е.Ю. Кучер

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА**

Изучается структура фазового пространства в окрестности известных периодических решений задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Вычислены показатели Ляпунова линеаризованной системы уравнений возмущенного движения для семейств частных решений, полученных Ковалевским, Горячевым и Докшевичем. В пространстве параметров определены области динамической неустойчивости движения. Для типичных значений параметров приведены результаты компьютерного моделирования.

**Введение.** Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается уравнениями Эйлера–Пуассона

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \mathbf{r} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (1)$$

Эти уравнения допускают три алгебраических интеграла

$$\frac{1}{2}A\omega \cdot \omega - \mathbf{r} \cdot \nu = h, \quad A\omega \cdot \nu = g, \quad \nu \cdot \nu = 1.$$

Исследуем поведение решений уравнений (1) в окрестности частного периодического решения вида

$$\omega = \omega^*(t), \quad \nu = \nu^*(t), \quad (2)$$

которое без ограничения общности будем считать  $2\pi$ -периодическим. Детальное аналитическое и качественное описание известных периодических решений динамики твердого тела имеется в монографиях [1, 2].

Положим  $\omega = \omega^* + \delta\omega$ ,  $\nu = \nu^* + \delta\nu$  и обозначим  $\mathbf{x} = (\delta\omega, \delta\nu)^T$ . Запишем линеаризованную относительно  $\mathbf{x}$  систему уравнений возмущенного движения (уравнение в вариациях)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}, \quad (3)$$

где коэффициенты матрицы  $\mathcal{A}(t)$  являются периодическими функциями и для всех  $t$  выполняется равенство  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t + 2\pi)$ . Общие свойства дифференциальных уравнений (3) достаточно хорошо изучены [3]. Матрица  $\mathbf{X}(t)$  фундаментальной системы решений уравнения (3) удовлетворяет следующим соотношениям

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{X}(t + 2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi), \quad \det \mathbf{X}(t) = 1, \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица шестого порядка. Матрица  $\mathbf{X}(2\pi)$  называется матрицей монодромии, а ее собственные значения – мультипликаторами уравнения в вариациях. Мультипликаторы являются решениями характеристического уравнения

$$\det [\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}] = 0. \quad (5)$$

Каждому собственному вектору  $a^k$  матрицы монодромии  $\mathbf{X}(2\pi)$  с мультипликатором  $\rho_k$  соответствует решение  $\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{X}(t)a^k$  уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$\mathbf{x}^k(t + 2\pi) = \rho_k \mathbf{x}^k(t).$$

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_6$  – мультипликаторы уравнения (3), тогда характеристическими показателями уравнения (3) являются величины

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi} \ln \rho_k, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (6)$$

**1. Вычисление характеристических показателей.** В рассматриваемой постановке необходимо вычислить только два показателя (6), так как уравнение в вариациях имеет не менее четырех нулевых характеристических показателей из шести. Предположим, что для фиксированного набора конструктивных параметров  $A_i, r_i$ , определяющих распределение масс в твердом теле, известна начальная точка  $(\boldsymbol{\omega}(0), \boldsymbol{\nu}(0))$ , принадлежащая периодическому решению (2) системы (1). В этом случае для вычисления характеристических показателей уравнения (3) требуется проинтегрировать уравнения (1) с начальными условиями  $(\boldsymbol{\omega}(0), \boldsymbol{\nu}(0))$  и решить задачу Коши для матричного уравнения

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{X}, \quad (7)$$

с начальным условием  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$ . Если для периодического решения (2) известны явные зависимости фазовых переменных от времени, тогда требуется проинтегрировать только уравнение (7) с известными периодическими коэффициентами. В задачах динамики твердого тела коэффициенты матрицы  $\mathcal{A}(t)$  обычно зависят от сложных функций, полученных обращением эллиптических и гиперэллиптических квадратур. В редких случаях уравнение (7) может быть решено в явном виде.

Один из методов упрощения уравнения (3) связан с понижением порядка системы на фиксированном интегральном уровне. Тогда (3) сводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами (уравнению Хилла). Характеристические показатели этого уравнения могут быть найдены из различных достаточных условий. Некоторые результаты данного подхода перечислены в обзоре [4].

Метод редукции, использующий свойство обратимости линейной  $2\pi$ -периодической системы (3), рассмотрен в работе [5]. Уравнения в вариациях записываются в следующем виде

$$\dot{\mathbf{u}} = A_-(t)\mathbf{u} + A_+(t)\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = B_+(t)\mathbf{u} + B_-(t)\mathbf{v}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ , матрицы с индексами плюс (минус) состоят из четных (нечетных) функций. Система (8) инвариантна относительно линейных преобразований

$$\varphi_1 : (t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (-t, -\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \varphi_2 : (t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v}),$$

неподвижные точки которых принадлежат множествам

$$M_1 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{u} = 0\}, \quad M_2 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = 0\}.$$

Вместе с каждым решением  $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$  обратимая система (8) допускает решения, симметричные относительно множеств  $M_1$  и  $M_2$ . Введем обозначения  $\mathbf{u}^\pm(t), \mathbf{v}^\pm(t)$  для решений, составленных из четных или нечетных функций. Тогда фундаментальная матрица решений системы (8) записывается в виде

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^+(t) & \mathbf{u}^-(t) \\ \mathbf{v}^-(t) & \mathbf{v}^+(t) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{S}(0) = \mathbf{E}.$$

Если  $\rho$  является собственным значением матрицы монодромии  $\mathbf{S}(2\pi)$ , тогда матрицы  $\mathbf{S}(-2\pi) = \mathbf{S}^{-1}(2\pi)$ ,  $2\mathbf{S} = \mathbf{S}(2\pi) + \mathbf{S}(-2\pi)$  имеют собственные значения, равные соответственно  $\rho^{-1}$  и  $\rho + \rho^{-1}$ . Также известно [5], что обратимая система (8) имеет не менее двух мультипликаторов, равных единице, а все остальные мультипликаторы  $\varrho = (\rho + \rho^{-1})/2$  являются корнями квадратного уравнения

$$\det[\mathbf{v}^+(2\pi) - \varrho \mathbf{E}_2] = 0, \quad \text{где } \mathbf{E}_2 = \text{diag}(1, 1). \quad (9)$$

Следствием этого утверждения является важный результат: для вычисления характеристических показателей обратимой линейной системы (8) достаточно построить только два частных решения задачи Коши на отрезке  $[0, 2\pi]$  с начальными условиями

$$1) \mathbf{u}(0) = 0, \quad v_1(0) = 1, \quad v_2(0) = 0; \quad 2) \mathbf{u}(0) = 0, \quad v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 1.$$

## 2. Частные периодические решения.

*Решение Гриоли.* Распределение масс в твердом теле подчиним условиям

$$A_1 > A_2 > A_3, \quad r_1 \sqrt{A_2 - A_3} + r_3 \sqrt{A_1 - A_2} = 0, \quad r_2 = 0.$$

Константы первых интегралов запишем в виде

$$h = \frac{A_1 + A_3}{2(A_1^2 + A_1 A_3 + A_3^2 - A_1 A_2 - A_2 A_3)^{\frac{1}{2}}}, \quad g = \frac{A_1 A_3}{(A_1^2 + A_1 A_3 + A_3^2 - A_1 A_2 - A_2 A_3)^{\frac{3}{4}}}.$$

При этих параметрических ограничениях Дж. Гриоли в 1947 г. нашел семейство периодических решений системы (1), которое выражается через тригонометрические функции времени и зависит от двух свободных параметров  $\alpha, \beta$ . Положим  $\alpha = A_2/A_1, \beta = A_3/A_1$ , тогда физически допустимые значения параметров  $\alpha, \beta$  принадлежат треугольнику с вершинами  $P_1(1, 0), P_2(1, 1), P_3(1/2, 1/2)$ . Устойчивость решения Гриоли в первом приближении полностью исследована в работах [5-7], нелинейный анализ орбитальной устойчивости выполнен А.П. Маркеевым [7].

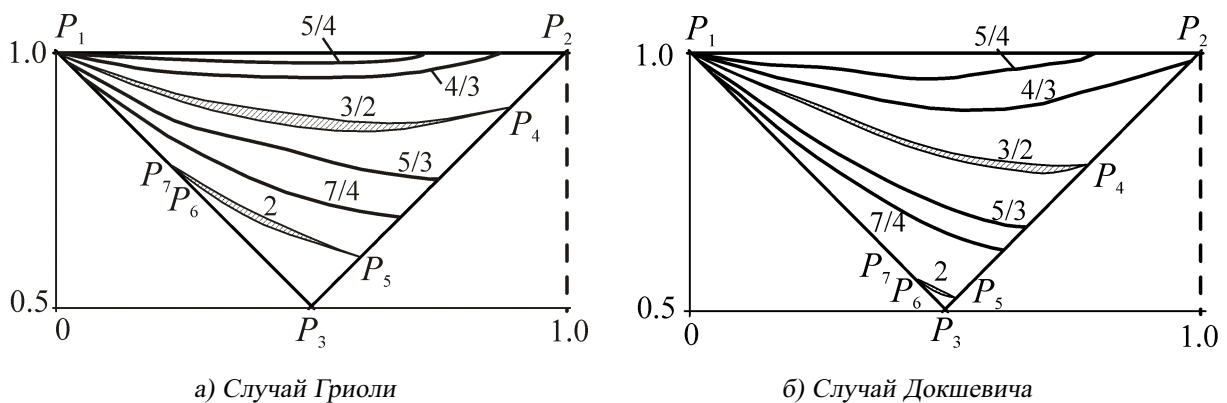


Рис. 1. Области неустойчивости и кривые резонансов на плоскости  $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ .

Результаты проведенного в [5,7] численного исследования устойчивости (в первом приближении) решения Гриоли показаны на рис. 1, а: здесь заштрихованы области параметрического резонанса и отмечены кривые резонансов до четвертого порядка включительно; в

незаштихованных областях периодическое решение устойчиво в первом приближении. Для мнимых характеристических показателей  $\lambda_{1,2}$  уравнения (3) введем обозначение  $\pm i\kappa$ , где  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Величина  $\kappa$  является собственной частотой малых колебаний в окрестности невозмущенного движения. При выполнении равенства  $A_2 = A_3$  решение Гриоли вырождается в частное решение Лагранжа, а собственная частота вычисляется по формуле [6]

$$\kappa = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha}, \quad \text{где } \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Целые и полуцелые частоты соответствуют следующим точкам отрезка  $P_2P_3$ :

$$\alpha = \beta = \sqrt{1/3} \quad (\kappa = 2), \quad \alpha = \beta = \sqrt{4/5} \quad (\kappa = 3/2).$$

Результаты компьютерного моделирования решений, находящихся в малой окрестности

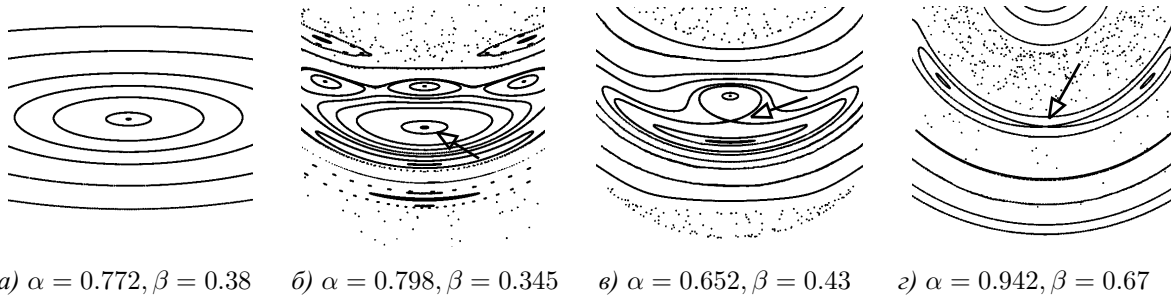


Рис. 2. Окрестность решения Гриоли.

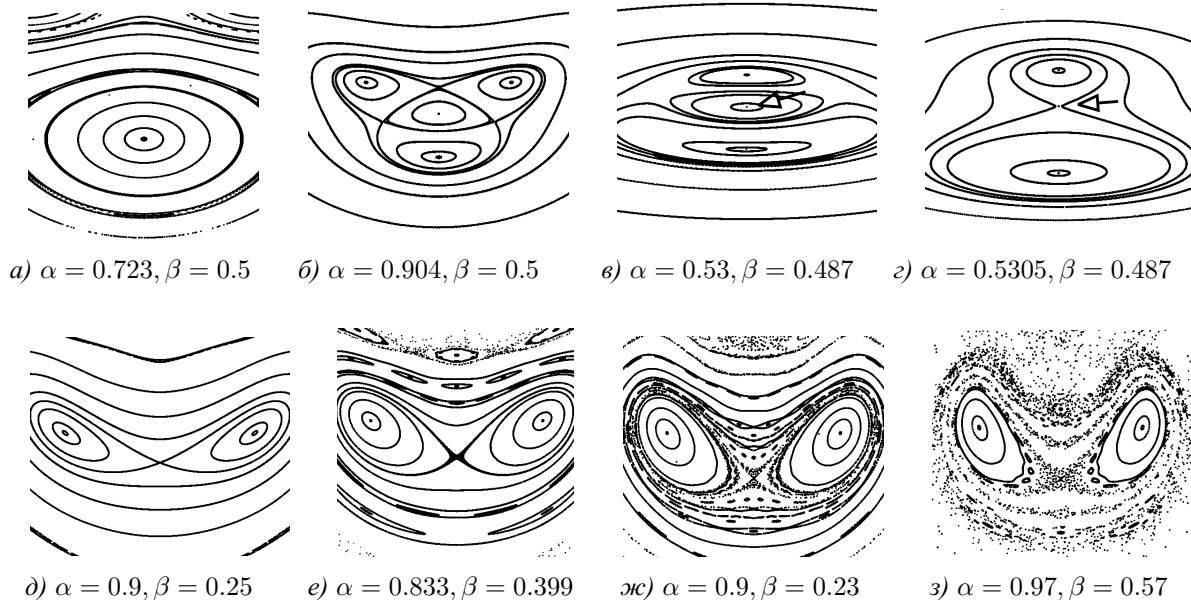


Рис. 3. Окрестность решения Докшевича.

решения Гриоли, показаны на рис. 2. Методика выбора фазовых сечений обсуждалась в работе [8]. Там же дана классификация топологических типов изоэнергетических поверхностей, несущих известные точные решения уравнений Эйлера–Пуассона.

Если мультипликаторы уравнения в вариациях лежат на единичной окружности

$$\rho_1 \rho_2 = 1, \quad \text{где } \rho_{1,2} = e^{\pm 2\pi i \varkappa}, \quad \varkappa \in \mathbb{R},$$

то фазовое пространство вблизи решения Гриоли почти всегда разделено семейством инвариантных поверхностей. Структура такого локального разбиения может быть представлена молекулами, которыми описывается слоение Лиувилля вполне интегрируемой системы на трехмерном многообразии постоянной энергии [9]. Слоение Лиувилля состоит из двумерных инвариантных торов и особых слоев, заполняющих множество меры нуль. Внутри каждого семейства вложенных друг в друга концентрических торов существует счетное множество резонансных торов, заполненных периодическими траекториями. При сколь угодно малом возмущении торы с соизмеримыми частотами разрушаются. На каждом из них останется лишь конечное число замкнутых траекторий, а остальные фазовые траектории будут вести себя существенно сложнее. Таким образом, в динамических системах, близких к интегрируемым, на трехмерной изоэнергетической поверхности сохраняется основная часть исходного слоения: большинство нерезонансных торов немного деформируется, изолированные периодические траектории снова принадлежат особым слоям, но образуется счетное множество щелей между инвариантными торами, в которых заперты траектории возмущенного движения. С учетом этих поправок применим терминологию работы [9] для качественного описания траекторной структуры фазового пространства в окрестности периодического решения.

Из рис. 2, *а*, *б* следует, что фазовые траектории лежат на концентрических торах, стягивающихся к замкнутой кривой. Бифуркации торов в окрестности изолированного периодического решения описывает атом *A*. На рис. 2, *в* неустойчивое решение Гриоли ( $\varkappa = 2$ ) соответствует точке самопересечения плоской кривой. В фазовом пространстве особый слой является произведением “восьмерки” на окружность. Здесь два атома *A* перестраиваются в атом *B*. Двум периодическим траекториям соответствуют изолированные точки на поверхности сечения. На рис. 2, *г* показан другой тип неустойчивого решения Гриоли ( $\varkappa = 3/2$ ), сечение снова является “восьмеркой”, но бифуркации торов описывает атом *A\**. Особый слой можно реализовать в  $\mathbb{R}^3$  как погружение двумерной “бутылки Клейна”. В результате бифуркации один тор Лиувилля перестраивается в один тор, но при этом изменяется число вращения. В малой окрестности решения Гриоли здесь происходит удвоение периода, так как период колебаний соседних траекторий в два раза больше периода обращения по предельному циклу. Две точки, лежащие внутри концентрических окружностей, принадлежат одной и той же изолированной периодической траектории.

*Решение Докшевича при условиях Гесса.* Главные моменты инерции и координаты центра масс твердого тела подчиним условиям Гесса

$$A_1 > A_2 > A_3, \quad r_1 \sqrt{A_1(A_2 - A_3)} + r_3 \sqrt{A_3(A_1 - A_2)} = 0, \quad r_2 = 0.$$

Пусть константы первых интегралов имеют следующий вид

$$g = 0, \quad h = \frac{3A_1 A_3 (A_1 + A_3 - d) |\mathbf{r}|}{(A_1 + A_3 + 2d)(2A_1 A_2 + 2A_2 A_3 - 3A_1 A_3 - 2A_2 d)} + |\mathbf{r}|,$$

где обозначено  $d = (A_1^2 + A_3^2 - A_1 A_3)^{1/2}$ . При этих ограничениях А.И. Докшевич в 1966 г. нашел двухпараметрическое семейство периодических решений уравнений Эйлера–Пуассона [1]. В явном виде решение записано с помощью эллиптических функций времени.

Положим  $\alpha = A_2/A_1$ ,  $\beta = A_3/A_1$ , тогда допустимые значения параметров  $\alpha, \beta$  снова принадлежат треугольнику с вершинами  $P_1(1, 0)$ ,  $P_2(1, 1)$ ,  $P_3(1/2, 1/2)$ . В результате численного исследования решения Докшевича выявлены две области параметрического резонанса. На рис. 1, б эти области заштрихованы. На основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению внутренним точкам областей соответствуют орбитально неустойчивые решения. В незаштрихованных областях решения, как правило, орбитально устойчивы в первом приближении. Исключение составляют кривые резонансов, где необходим учет нелинейных возмущений. Кривые наиболее существенных резонансов (до четвертого порядка включительно) показаны на рис. 1, б. В треугольнике  $P_1P_2P_3$  все линии, начинающиеся между точками  $P_4P_3$ , пересекают сторону  $P_1P_3$ , а остальные линии заканчиваются в точке  $P_1$ .

Характеристические показатели определяются из уравнения (6) неоднозначно, с точностью до слагаемых  $im$ , где  $m$  – целое число. Непрерывная зависимость  $\lambda_{1,2}$  от параметров позволяет устранить эту неоднозначность. Рассмотрим, например, предельный случай  $A_2 = A_3$ . Тогда центр масс тела принадлежит первой оси инерции, решение Докшевича вырождается в частный случай прецессионных движений волчка Лагранжа. Линеаризованные уравнения возмущенного “предельного” движения имеют постоянные коэффициенты, а собственная частота малых колебаний в окрестности невозмущенного движения записывается в виде

$$\varkappa = \frac{\sqrt{4\alpha^2 - \alpha + 2 + 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}}{2\alpha}, \quad \text{где } \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \quad (10)$$

Полученные из формул (10) соотношения

$$\alpha = \beta = \frac{1 - 2\sqrt{4\varkappa^2 - 3}}{4(1 - \varkappa^2)}, \quad \varkappa \in \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}\right)$$

позволяют вычислить значения безразмерных параметров  $\alpha, \beta$ , при которых кривые резонансов пересекают отрезок  $P_2P_3$ . На плоскости  $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$  области параметрического резонанса ограничены ветвями линий уровня  $\varkappa = 2$ ,  $\varkappa = 3/2$ , ветвление этих кривых происходит в точках  $P_4, P_5$  с координатами

$$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{13}}{6} - \frac{1}{12}, \quad \alpha = \beta = \frac{2}{5}\sqrt{6} - \frac{1}{5}.$$

Вблизи точек ветвления границы области неустойчивости могут быть записаны в виде степенных рядов [3]. Период  $\tau$  предельного движения в реальном времени  $t$  связан с параметрами следующей зависимостью

$$(\tau/2\pi)^2 = A_2 \frac{(\alpha + 2\gamma + 1)(2\alpha - 2\gamma - 1)}{(\alpha - \gamma - 2)(\alpha - \gamma + 1)}, \quad (11)$$

здесь использовано обозначение  $\gamma = (\alpha^2 - \alpha + 1)^{1/2}$ .

Результаты численного интегрирования уравнений (1) в окрестности решения Докшевича представлены на рис. 3. Структура фазового пространства вблизи устойчивого периодического решения показана на рис. 3, а – в. Почти все траектории возмущенного

движения принадлежат инвариантным торами. На рис. 3, *з* периодическое решение неустойчиво ( $\varkappa = 2$ ), оно принадлежит сепаратрисной поверхности – особому слою атома *B*. Этот атом описывает топологическую перестройку двух торов Лиувилля в один тор [9]. Неустойчивое решение Докшевича на рис. 3, *д* соответствует точке самопересечения инвариантной кривой. Появление предельного цикла связано с полужелтым резонансом ( $\varkappa = 3/2$ ). Здесь сепаратриса является особым слоем атома *A\**, который описывает топологическую перестройку инвариантного тора в тор. На рис. 3, *е* – *з* показаны сечения орбитально неустойчивых траекторий для области параметрического резонанса (область расположена между точками  $P_1, P_4$  на рис. 1, *б*). Эти рисунки иллюстрируют “расщепление” сепаратрисной поверхности, траектории возмущенного движения заполняют трехмерную область фазового пространства.

*Решение Ковалевского.* Пусть центр масс твердого тела принадлежит первой главной оси ( $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ ), а моменты инерции удовлетворяют соотношению

$$9(2A_3 - A_1)(A_3 - A_2) + A_1A_2 = 0.$$

Тогда существует однопараметрическое семейство периодических решений, в котором угловая переменная связана с  $t$  гиперэллиптической квадратурой [1, 2]. С помощью безразмерного параметра  $\gamma = A_3/A_2$  найдем выражение

$$A_1 = \frac{18\gamma(1 - \gamma)}{(10 - 9\gamma)} A_2, \quad \text{где } \gamma \in \left(\frac{10}{27}, \gamma_*\right], \quad \gamma_* \approx 0.6219116.$$

Неравенство  $\gamma > 10/27$  является следствием условия  $A_1 + A_3 > A_2$ , а максимальное значение  $\gamma_*$  соответствует вырождению периодического движения в устойчивое равномерное вращение тела вокруг главной оси инерции. Константы интегралов зависят от  $\gamma$ . Если  $\gamma = \gamma_*$ , то константы принадлежат бифуркационной кривой

$$h = \frac{g^2}{2A_1} - |r_1|,$$

состоящей из минимумов допустимой энергии  $h$  при заданных значениях  $g$ . В случае равномерного вращения уравнение в вариациях имеет постоянные коэффициенты и явно решается. Вычислим ненулевые характеристические показатели системы с постоянными коэффициентами, сравним их с показателями уравнения (3), найдем постоянную составляющую  $im$  и устраним неоднозначность определения величин  $\lambda_{1,2}$ .

Результаты исследования орбитальной устойчивости однопараметрического семейства решений Ковалевского представлены на рис. 4, *а*. Комплексные и действительные показатели здесь показаны на одном рисунке. Заштрихована область под кривой, которая изображает параметрическую зависимость показателя с ненулевой действительной частью.

Кроме интервалов неустойчивости, появляющихся при резонансах с целыми собственными частотами ( $\varkappa = 2, 3$ ), существует очень узкий интервал полужелтого резонанса с частотой  $\varkappa = 5/2$ . Частоты всех основных резонансов отмечены горизонтальными линиями на рис. 4. Фазовое сечение орбитально устойчивого решения Ковалевского изображено на рис. 5, *а*. В случае резонанса с показателями  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$  неустойчивое периодическое решение принадлежит особому слою атома *B*, описывающего топологическую перестройку двух торов в один тор (рис. 5, *б*). Если  $\gamma \in (10/27, 0.39066)$ , то решение Ковалевского неустойчиво по первому приближению, хаотические траектории возмущенного движения

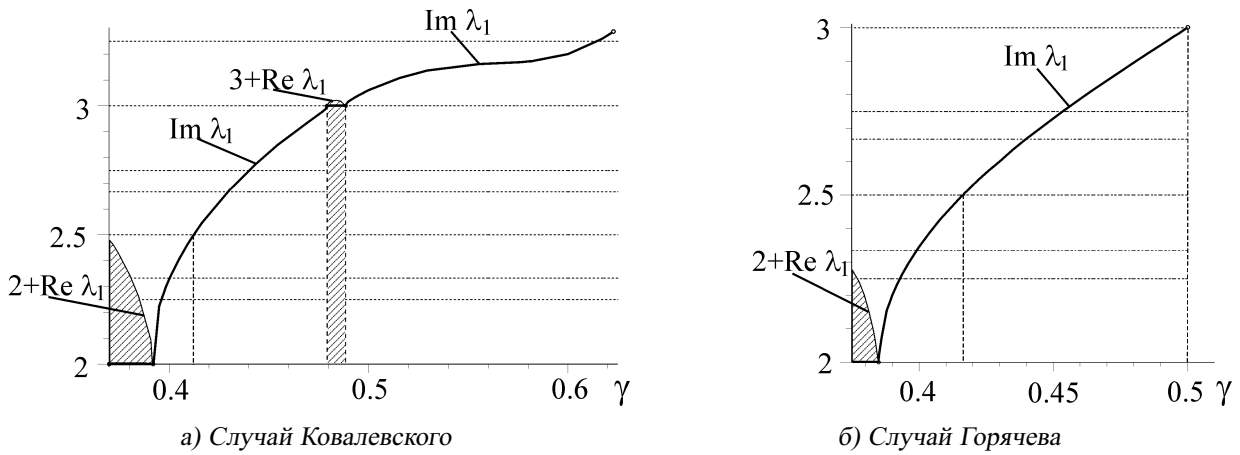


Рис. 4. Характеристические показатели периодических решений.

заполняют трехмерные области фазового пространства (рис. 5, в). На рис. 5, з изображено сечение фазового пространства при  $\lambda_{1,2} \approx \pm 2.5i$ . На рис. 5, д – з показана последовательность перестроек, происходящих на поверхности сечения, когда параметр  $\gamma$  проходит интервал (0.479117, 0.4885) динамической неустойчивости.

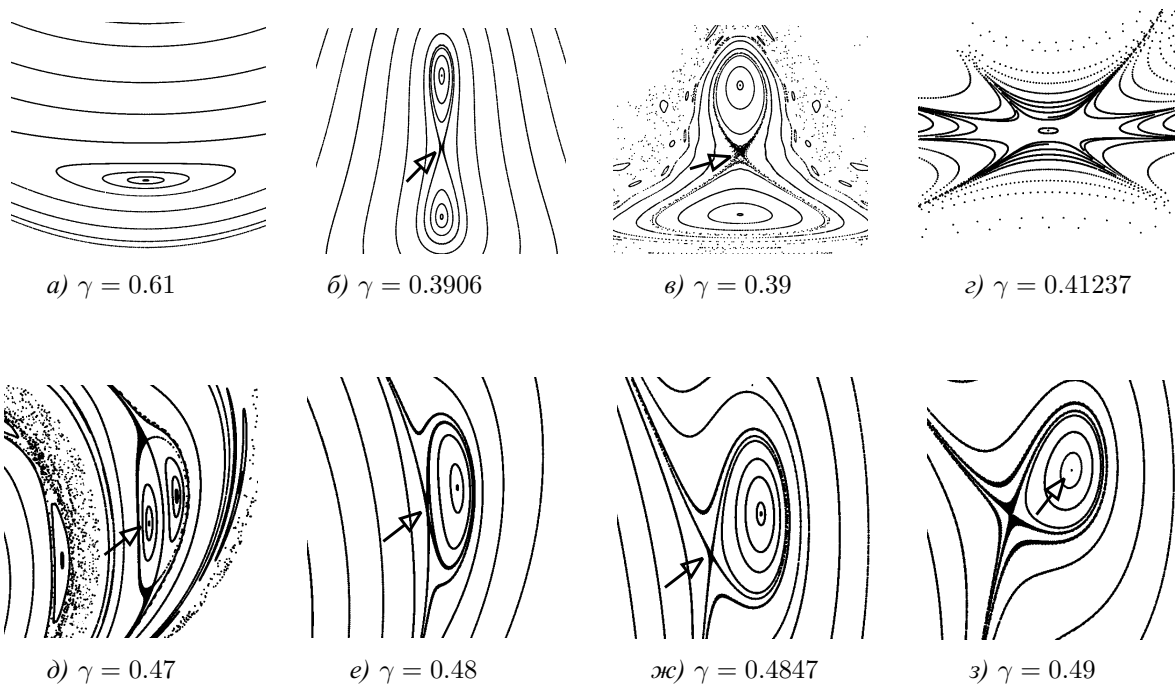


Рис. 5. Окрестность решения Ковалевского.

*Решение Горячева.* Пусть центр масс тела принадлежит первой главной оси, моменты инерции удовлетворяют равенству

$$8(A_1 - 2A_3)(A_2 - A_3) + A_1A_2 = 0.$$

Положим  $A_3 = \gamma A_2$ ,  $A_1 = \frac{16\gamma(1-\gamma)}{(9-8\gamma)}A_2$ , где  $\gamma \in (3/8, 1/2)$ , и зададим выражения констант



интегралов

$$g = 0, \quad h = \frac{(12\gamma^2 - 22\gamma + 9)|r_1|}{(1 - 2\gamma)(3 - 4\gamma)(3 - 2\gamma)}.$$

Тогда существует однопараметрическое семейство периодических решений уравнений (1), которое выражается в эллиптических функциях времени. Устойчивость решений этого семейства зависит от значений безразмерного параметра  $\gamma$ . Комплексные и действительные показатели, полученные в результате численного решения задачи Коши, показаны на рис. 4, б. Заштрихована область под кривой с ненулевыми действительными частями характеристических показателей. Если  $\gamma \in (3/8, 0.38492)$ , то решение Горячева неустойчиво по первому приближению. В случае резонанса с показателями  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$  неустойчивое периодическое решение принадлежит особому слою атома  $B$ . Приближенное значение  $\gamma \approx 0.4163135$  соответствует резонансу с собственной частотой  $\varkappa = 5/2$ . В окрестности невозмущенной траектории происходит нетривиальная бифуркация одного инвариантного тора в два тора с удвоением периодов обращения вдоль осевых окружностей этих торов (см. атом  $B_1^{**}$  в работе [9]). Если значение  $\gamma \rightarrow 1/2$ , то ненулевые характеристические показатели уравнения (3) стремятся к  $\lambda_{1,2} = \pm 3i$ . Методом фазовых сечений решение Горячева исследовано в работе [8].

*Решение Докшевича при условиях Ковалевского.* Если распределение масс тела подчинено условиям Ковалевского, значение безразмерного параметра  $\gamma$  фиксировано и равно  $(25 - 2\sqrt{37})/27$ , а константы интегралов имеют вид

$$g = 0, \quad h = \frac{6(89 + 17\sqrt{37})|r_1|}{(20 - \sqrt{37})\sqrt{17 + 8\sqrt{37}}} \approx 10.2367386|r_1|,$$

тогда существует еще одно частное периодическое решение Докшевича. Укажем приближенные значения моментов инерции  $(A_1, A_2, A_3) = (3.463654, 4.414836, 2.098596)$  и начальные условия

$$\boldsymbol{\omega}^0 = (1.3285650, 1.9105803, 0), \quad \boldsymbol{\nu}^0 = (0.877859, -0.478919, 0),$$

характеризующие это решение. Непосредственным интегрированием уравнений (1), (3) вычислим матрицу монодромии и период движения  $\tau = 5.84075703$  в реальном времени, далее найдем  $\rho_{1,2} = 0.740917 \pm i 0.6715965$  – мультипликаторы и  $\lambda_{1,2} = \pm i 0.11719557$  – ненулевые характеристические показатели (они определены с точностью до слагаемых  $i t$ , где  $t \in \mathbb{Z}$ ). Решение Докшевича орбитально устойчиво в первом приближении. Результаты компьютерного моделирования приведены в [8].

*Решение Коносевича и Поздняковича.* Точные значения постоянных коэффициентов, определяющих это решение, могут быть представлены в виде корней полиномов с целыми коэффициентами [2]. Пусть центр масс тела принадлежит главной оси ( $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ ), моменты инерции удовлетворяют двум полиномиальным условиям, одно из которых имеет следующий вид

$$4(A_1 - 2A_2)(A_1 - 2A_3) + A_3A_2 = 0.$$

Тогда существуют два набора параметров, каждому из которых соответствует частное периодическое решение уравнений (1). Независимая переменная связана со временем гиперэллиптической квадратурой.

Для первого варианта запишем приближенные значения главных моментов инерции  $(A_1, A_2, A_3) = (2.42774682, 1.71506506, 1.0)$ , константы  $h = 3.095405319$ ,  $g = 3.138280237$  и начальные условия

$$\omega^0 = (-1.0824675, 1.0043389, 0), \quad \nu^0 = (-0.8080760, 0.5890783, 0),$$

позволяющие интегрировать уравнение (1). Численным интегрированием уравнений (1), (3) найдем матрицу монодромии и вычислим следующие величины

$$\tau = 17.7933295, \quad \rho_1 = 9.10939, \quad \lambda_1 = 0.351622.$$

Для второго варианта рассматриваемого решения также запишем приближенные значения параметров  $(A_1, A_2, A_3) = (1.41205769, 0.58224098, 1.0)$ , интегральные константы  $h = 3.0672233$ ,  $g = 2.36942697$  и начальные условия

$$\omega^0 = (-1.6751840, 0.5435889, 0), \quad \nu^0 = (-0.9999129, 0.0131956, 0).$$

Вычислением находим

$$\tau = 20.2373343, \quad \rho_1 = 920.91687, \quad \lambda_1 = 1.086291.$$

Динамическая система (1) является локально неустойчивой в окрестности решения Коносеви́ча и Поздняковича, так как имеет действительные показатели Ляпунова.

1. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
2. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
4. Вархалев Ю.П., Горр Г.В. Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела// Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25-41.
5. Тхай В.Н. Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли// Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, вып. 5. – С. 848-857.
6. Брюм А.З. Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова// Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 68-72.
7. Маркеев А.П. Об устойчивости регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли)// Докл. РАН. – 2002. – 387, N 3. – С. 338-342.
8. Гащенко И.Н., Кучер Е.Ю. Анализ изоэнергетических поверхностей для точных решений задачи о движении твердого тела// Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 18-30.
9. Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация простых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности// Усп. математических наук. – 1990. – 45, вып. 2. – С. 49-77.