ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 531.38, 62-50

 М.П. Харламов

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предлагается новое аналитическое описание алгоритма управления ориентацией твердого тела, который реализует поддержку некоторого заданного вращения (траектории в пространстве конфигураций). Получены выражения для целевой функции и поправок к расчетному управлению, предназначенные для использования в режиме реального времени.

Введение. Задачей построения программного движения или управления программным движением обычно называют поиск управляющих воздействий

$$u_1(t), ..., u_k(t)$$

для системы, описываемой уравнениями

$$\dot{z} = Z(z, u, t),$$

таких, что соответствующее решение либо в точности совпадает с заданной программой $\varphi = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$, либо удовлетворяет некоторой системе конечных соотношений

$$\Phi_r(z, t) = 0, \quad r = 1, ..., s.$$

Различные постановки указанного класса задач и связанные с ними вопросы устойчивости рассматриваются в [1], где имеется и достаточно полный обзор литературы.

В настоящей работе предлагается алгоритм автоматической поддержки известного программного движения при наличии возмущений как фазовых координат, так и параметров системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую динамическую систему на гладком многообразии N

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad t \in [a, b]. \tag{1}$$

Здесь $x \in N$, f – векторное поле на N, зависящее от $u \in \mathbf{R}^k$.

Для системы (1) предполагаем заданными некоторые наблюдаемые характеристики в виде гладкого отображения F, действующего из N в риманово многообразие $M(\dim M = m \leq \dim N = n)$, и гладкую кривую на M

$$y = y(t), \quad t \in [a, b], \tag{2}$$

которую будем называть программным движением. Предположим, что программное движение теоретически осуществимо, т.е. существуют управление $u(t)$ и соответствующее решение $x(t)$ системы (1) такие, что

$$F(x(t)) \equiv y(t), \quad t \in [a, b]. \tag{3}$$

В реальных системах наличие возмущений во внешних воздействиях, отклонений начальных координат и параметров системы, ограничений на вид управляющих функций не позволят добиться точного выполнения тождества (3), так что имеет смысл рассматривать задачу поддержки программного движения с той или иной степенью "устойчивости"или с некоторым критерием оптимальности.

В правые части системы (1) можно дополнительно вводить явные зависимости f от t и $u^\bullet$ [1], однако в нашей постановке эти зависимости могут быть "скрыты"в самом программном управлении $u(t)$, которое предполагается существующим. В частности, если в системе есть точно известные параметры, их можно включить в состав вектора u.

Рассмотрим случай, когда управления могут быть только кусочно-постоянными и переключения возможны через промежутки времени с величиной h(h называется дискретой управления). Пусть $[t_0, t_1]$ – некоторый такой промежуток ($t_1 = t_0 + h$, причем t_0 – момент возможной коррекции управления). Действительное управление на отрезке $[t_0, t_1]$ имеет, таким образом, вид

$$u(t_0) + \delta u_0 = \text{const},$$

соответствующее решение системы (1) –

$$x(t) + \delta x(t), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{4}$$

а наблюдаемое движение –

$$y(t) + \delta y(t) = F(x(t) + \delta x(t)). \tag{5}$$

Задача состоит в выборе коррекции с тем, чтобы обеспечить наименьшее отклонение $\delta y_1 = \delta y(t_1)$. Соответствующий вычислительный алгоритм должен быть, кроме того, достаточно прост для реализации автоматической системой в реальном времени.

2. Общие соотношения. Линеаризуем систему (1) в окрестности решения $x(t)$, $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$\frac{d}{dt}\delta x(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u_0. \tag{6}$$

Здесь

$$\delta x(t) \in T_{x(t)}N,$$

$$A(t) = f'_x(x(t), u(t_0)) : \ T_{x(t)}N \to T_{x(t)}N,$$

$$\delta u_0 \in \mathbf{R}^k,$$

$$B(t) = f'_u(x(t), u(t_0)) : \mathbf{R}^k \to T_{x(t)}N,$$

причем для всех δx произведено естественное отождествление

$$T_{\delta x}T_{x(t)}N \cong T_{x(t)}N.$$

С учетом (5) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка будем иметь

$$\delta y(t) = F'(x(t))\delta x(t) \in T_{y(t)}M. \tag{7}$$

Пусть отклонение в решении (4), накопившееся к моменту t_0 в силу возможных погрешностей начальных условий $\delta x(a)$, неточного управления на предыдущих участках или за счет других факторов, равно

$$\delta x_0 = \delta x(t_0). \tag{8}$$

Решая линейную систему (6) на отрезке $[t_0, t_1]$ с начальными условиями (8), находим

$$\delta x(t_1) = W(\delta x_0, \delta u_0, t_0, h), \tag{9}$$

после чего из (7) получаем отклонение от программного движения (2):

$$\delta y_1 = F'(x(t_1))W(\delta x_0, \delta u_0, t_0, h).$$

Обозначим через $\| \bullet \|$ норму касательного вектора к многообразию M в заданной римановой метрике. Тогда естественно искать δu_0 как решение экстремальной задачи

$$\min \|F'(x(t_1))W(\delta x_0, \delta u, t_0, h)\|^2 / \delta u \in \mathbf{R}^k \tag{10}$$

при фиксированном δx_0. В результате получим

$$\delta u_0 = U(t_0, h, \delta x_0),$$

где оператор $U(t_0, h, \bullet) : \ T_{x(t_0)}N \to \mathbf{R}^k$ зависит только от точек исходного решения $x(t_0), u(t_0)$ и дискреты h и может быть в принципе рассчитан заранее для всех моментов переключения

$$t_0 = a, \qquad a + h, \qquad a + 2h, \quad \ldots$$

Пусть, например, отрезки кривых $x(t), y(t), t \in [t_0, t_1]$ лежат в областях определения некоторых систем локальных координат на многообразиях N и M. Тогда возникают естественные отождествления $T_x N \cong \mathbf{R}^n$, $T_y M \cong \mathbf{R}^m$ и

$$\|\delta u\|^2 \cong \delta y^T Y(y) \delta y. \tag{11}$$

Линейные операторы $A(t) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $B(t) : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, $F'(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $Y(y) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, записываются соответствующими матрицами.

Считая дискрету h достаточно малой, заменим уравнение (6) на отрезке $[t_0, t_1]$ более грубым

$$\delta x^\bullet = A\delta x + B\delta u, \qquad A = A(t_0), \qquad B = B(t_0).$$

В этом случае оператор W в соотношении (9) примет вид

$$\delta x_1 = D\delta x_0 + C\delta u_0, \tag{12}$$

где обозначено

$$D = \exp(hA) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} A^i, \tag{13}$$

$$C = \exp(hA) \Big[\int_0^h \exp(-tA) dt \Big] B = \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} A^{i-1} \Big] B.$$

Положительно определенная квадратичная форма (11) на $\mathbf{R}^m$ индуцирует с помощью отображения $F'(x)$ неотрицательно определенную форму на $\mathbf{R}^n$, задаваемую матрицей

$$X(x) = F'(x)^T Y(F(x))F'(x), \tag{14}$$

так что целевая функция в задаче (10) является значением квадратичной формы

$$\delta x^T X(x)\delta x, \tag{15}$$

вычисленным при $t = t_1$.

С учетом представления (12), искомую поправку к управлению в момент t_0 получаем как значение линейного оператора на векторе отклонений фазовых координат от точки $x_0 = x(t_0)$

$$\delta u_0 = U(t_0, h)\delta x_0, \tag{16}$$

причем в выражении для U

$$U = -(C^T X C)^{-1}(C^T X D) \tag{17}$$

матрицы D и C вычислены согласно (13) в точке x_0, а матрица X – согласно (14) в точке $x_1 = x(t_1)$. Поскольку траектория $x(t)$ заранее известна, то необходимый набор операторов U может быть рассчитан до начала движения, а в реальном времени потребуется лишь операция умножения матрицы на вектор.

Замечание. Если переход от фазовых переменных $x_1, ..., x_n$ к величинам $y_1, ..., y_m$ есть лишь замена переменных (связь между переменными, имеющими конкретное механическое содержание, и переменными, удобными для наблюдения по чисто техническим соображениям), то $n = m$, и с позиции оценки сложности расчетных схем безразлично, в каких переменных выражен оператор (17). Если же по существу задачи $m < n$, то, поскольку целью управления является именно кривая (3), все приведенные выше соотношения можно записать в y-переменных. Тем самым порядок рассматриваемых систем будет понижен.

Отметим, что предложенный здесь одношаговый алгоритм управления, вообще говоря, плохо реагирует на наличие в системе постоянно действующих возмущений, которые нельзя трактовать как малые (например, отклонений параметров механической системы от расчетных). Его можно существенно усовершенствовать. Однако необходимым этапом является получение аналитического выражения целевой функции (15), которая, с практической точки зрения, выделяет в системе (1) *реально управляемую подсистему* .

3. Приложения к динамике твердого тела. Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном силовом поле. Пусть управляющие воздействия могут создавать произвольный вращающий момент относительно неподвижной точки O.

Обозначим через

$$Oe_1e_2e_3 \tag{18}$$

некоторый триэдр, жестко связанный с телом, а через

$$Og_1g_2g_3 \tag{19}$$

– триэдр, неподвижный в пространстве. Последний выберем так, чтобы ось Og_3 была осью симметрии силового поля.

Пусть $\mathbf{A}$ – тензор инерции тела в сопутствующих осях, $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}$ – векторы, составленные из компонент в тех же осях угловой скорости тела, направляющего орта оси симметрии и управляющего момента. В качестве одной из переменных введем также угол α, составляемый проекцией вектора угловой скорости на плоскость Og_1g_2 с осью Og_1. Управляемое движение твердого тела описывается уравнениями

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}^{\bullet} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}(\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{u}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\bullet} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\alpha^{\bullet} = \frac{1}{|\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}|}\langle \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}^{\bullet}\rangle$$

(здесь угловыми скобками обозначено скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{L}(\boldsymbol{\nu})$ – момент внешних сил). Последнее уравнение имеет чисто кинематический характер и вытекает из совпадения абсолютной и относительной производных вектора угловой скорости [2].

Многообразие $N = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha)\}$ есть произведение $\mathbf{R}^3$ на расслоение единичных касательных векторов к двумерной сфере.

Ориентацию тела зададим матрицей Q, связывающей системы отсчета (18), (19): строки Q есть разложения векторов $\boldsymbol{g}_i$ по базису $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$. Имея в виду задачу управления ориентацией, выберем в качестве многообразия M множество всех пар $(Q, Q^{\bullet})$, т.е. касательное расслоение к группе вращений $SO(3)$.

Канонический изоморфизм is

$$\mathrm{is}\left(\begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

между пространством $Ass(3)$ кососимметрических 3x3-матриц и пространством $\mathbf{R}^3$ порождает отождествление M с произведением $SO(3) \times \mathbf{R}^3$:

$$(Q, Q^{\bullet}) \mapsto (Q, \mathrm{is}(Q^T Q^{\bullet})) \tag{21}$$

(подробности см., например, в [3]).

Для построения отображения $F: N \to M$ воспользуемся соотношениями, восстанавливающими матрицу ориентации по кинематическим характеристикам $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha$ [4]:

$$Q_{1i}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha) = \frac{[(\omega_i - \omega_z\nu_i)\cos\alpha - \chi_i \sin\alpha]}{\omega_\rho}, \tag{22}$$

$$Q_{2i}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha) = \frac{[(\omega_i - \omega_z\nu_i)\sin\alpha + \chi_i \cos\alpha]}{\omega_\rho},$$

$$Q_{3i}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha) = \nu_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где обозначено

$$\omega_z = \sum_{i=1}^{3} \omega_i\nu_i, \qquad \chi_i = (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega})_i, \tag{23}$$

$$\omega_\rho^2 = \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 - \omega_z^2 = |\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}|^2.$$

В тривиализации (21) вектор $\mathrm{is}(Q^T Q^\bullet)$ имеет смысл так называемой "внутренней угловой скорости"мгновенного вращения $Q^\bullet$ (т.е. составлен из проекций угловой скорости, соответствующей матрице скоростей $Q^\bullet$, на сопутствующие телу оси). В нашем случае эту роль играет введенный выше вектор $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому отображение $F : N \to M$ зададим равенством

$$F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha) = (Q(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha), \boldsymbol{\omega}) \in SO(3) \times \mathbf{R}^3. \tag{24}$$

Введем на $SO(3)$ расстояние r между элементами, полагая

$$r(Q_1, Q_2) = \sqrt{3 - \mathrm{Sp}(Q_1^T Q_2)}. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что $0 \le r \le 2$ и выполнены все аксиомы метрического пространства. С механической точки зрения $r^2 = 2(1 - \cos\phi)$, где ϕ – угол поворота, переводящего ориентацию Q_1 в ориентацию Q_2. Функция (25) очевидно сохраняется при любых сдвигах группы $SO(3)$.

Выясним, какой левоинвариантной римановой метрикой может порождаться расстояние r. Пусть $\|\bullet\|$ – соответствующая такой метрике норма в пространстве $T_E SO(3)$ (E – единичная матрица). Если ξ – матрица из $T_E SO(3) = Ass(3)$, то

$$r(E, \exp(t\xi)) = \int_0^t \|\exp(-s\xi)\xi\exp(s\xi)\| ds = t\|\xi\| + o(t),$$

откуда в силу (25)

$$\|\xi\| = \lim_{t\to 0} \frac{r(E, \exp(t\xi))}{t} = \sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\xi^2)}.$$

Непосредственное вычисление дает: если

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix},$$

то

$$\|\xi\|^2 = |\mathrm{is}(\xi)|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2. \tag{26}$$

Таким образом, для произвольного элемента $\Omega \in T_Q SO(3)$ получаем

$$\|\Omega\|^2 = |\mathrm{is}(Q^T\Omega)|^2. \tag{27}$$

Введем соответствующую риманову метрику на $M = TSO(3)$. Отображение, касательное к (21), порождает цепочку тривиализаций

$$T_{(Q,\Omega)}TSO(3) \to T_Q SO(3) \times T_{\mathrm{is}(Q^T\Omega)}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3,$$

действующую по правилу

$$(\delta Q, \delta\Omega) \mapsto (\delta Q, \mathrm{is}((\delta Q^T)\Omega + Q^T\delta\Omega)) \mapsto (\mathrm{is}(Q^T\delta Q), \mathrm{is}((\delta Q^T)\Omega + Q^T\delta\Omega)).$$

Поэтому с учетом (27) естественно положить для касательного вектора $(\delta Q, \delta\Omega)$ в точке $(Q, \Omega) \in TSO(3)$

$$\|(\delta Q, \delta\Omega)\|^2 = \|\delta Q\|^2 + \lambda^2\|\delta\Omega\|^2 = |\mathrm{is}(Q^T\delta Q)|^2 + \lambda^2|\mathrm{is}((\delta Q^T)\Omega + Q^T\delta\Omega)|^2, \qquad (28)$$

где коэффициент λ^2 введен из соображений размерности. Выражение (28) конкретизирует для рассматриваемой задачи форму (11).

Для реализации алгоритма управления (16), (17) системой (20) необходимо найти теперь лишь соответствующую (28) форму (15) относительно вектора $\delta\boldsymbol{x} = (\delta\boldsymbol{\omega}, \delta\boldsymbol{\nu}, \delta\alpha)$.

Применяя оператор δ к выражениям (22), (23) и учитывая правило (26), находим для первого слагаемого (28):

$$\|\delta Q\|^2 = \left\{\delta\alpha - \left\langle \frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}}{|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}|^2}, [\delta\boldsymbol{\omega} - \langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}\rangle\delta\boldsymbol{\nu}]\right\rangle\right\}^2 + \delta\boldsymbol{\nu}^2. \qquad (29)$$

Для преобразования второго слагаемого (28) к исходным переменным заметим, что если (Q, Ω) – точка $TSO(3)$, соответствующая набору $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \alpha)$ при отображении F, то, согласно определению (25),

$$\Omega = Q/\omega/, \qquad (30)$$

где $/\omega/$ – кососимметричная матрица, такая что $\mathrm{is}(/\omega/) = \boldsymbol{\omega}$. Поэтому для касательного отображения

$$F'(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}) : (\delta\boldsymbol{\omega}, \delta\boldsymbol{\nu}, \delta\alpha) \mapsto (\delta Q, \delta\Omega)$$

имеет место соотношение

$$\delta\Omega = (\delta Q)/\omega/ + Q\delta/\omega/,$$

откуда

$$(\delta Q)^T\Omega + Q^T\delta\Omega = (\delta Q)^T Q/\omega/ + Q^T\delta Q/\omega/ + \delta/\omega/ = \delta/\omega/ = \mathrm{is}^{-1}(\delta\omega).$$

Здесь учтено, что матрица $Q^T\delta Q$ кососимметрична.

Итак, для второго слагаемого в (28) имеем

$$\|\delta\Omega\|^2 = \delta\boldsymbol{\omega}^2. \qquad (31)$$

Поясним механический смысл найденных выражений. Пусть $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^3$ – вектор, характеризующий отклонение ориентации тела от программного движения в смысле метрики (25):

$$\boldsymbol{\xi} = \mathrm{is}(Q^T\delta Q).$$

Найдем его производную по времени, учитывая, что он отнесен к подвижным осям:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{\xi}^\bullet + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi} \qquad (32)$$

(точкой обозначено покомпонентное дифференцирование по времени, т.е. относительная производная). Заметим, что если $(Q(t), \Omega(t))$ – реальное движение, то $\Omega = Q^\bullet$, так что в силу (30) $Q^\bullet = Q/\boldsymbol{\omega}/$ (это – уравнение Пуассона).

Кроме того, поскольку $(Q(t)+\delta Q(t), \Omega(t)+\delta\Omega(t))$ – также реальное движение, то, как известно, "символы d и δ коммутируют". Нетрудно видеть также, что при отображении is коммутатору матриц соответствует векторное произведение. Поэтому в матричной записи величина (32) преобразуется так:

$$\frac{d}{dt}(Q^T\delta Q) = (Q^T\delta Q)^\bullet + [/\omega/, Q^T\delta Q] = (Q^T)^\bullet\delta Q + Q^T(\delta Q)^\bullet + [/\omega/, Q^T\delta Q] =$$

$$= /\omega/^T Q^T\delta Q + Q^T\delta(Q^\bullet) + /\omega/Q^T\delta Q - Q^T\delta Q/\omega/ =$$
$$= Q^T(\delta Q/\omega/ + Q\delta/\omega/) - Q^T\delta Q/\omega/ = \delta/\omega/ = \mathrm{is}^{-1}(\delta\boldsymbol{\omega}).$$

Следовательно, на реальном движении

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \delta\boldsymbol{\omega}. \tag{32}$$

Таким образом, выражение (29) есть квадрат отклонения ориентации, а выражение (31) – квадрат абсолютной скорости изменения этого отклонения.

Окончательно, квадратичная форма (15), минимизируемая на первом конце каждого шага управления, для уравнений (20) имеет вид

$$\left[\delta\alpha - \left\langle \frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}}{\omega_\rho^2},\ \delta\boldsymbol{\omega} - \omega_z\delta\boldsymbol{\nu}\right\rangle\right]^2 + \delta\boldsymbol{\nu}^2 + \lambda^2\delta\boldsymbol{\omega}^2.$$

Соответствующие ей матрицы алгоритма управления (16), (17) можно записать в различных представлениях для использования компьютерных расчетов. Важно отметить, что при этом кажущаяся особенность в тех состояниях, где вектор угловой скорости оказывается коллинеарным оси симметрии, аналитически устранима, поскольку по своей сути выражения (22) для элементов матрицы ориентации – функции, ограниченные по модулю единицей.

1. *Галлиулин А.С. и др.* Построение систем программного движения. - М.: Наука, 1971. - 352 с.
2. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1964. - 28, N 3. - С. 502-507.
3. *Харламов М.П.* О некоторых применениях дифференциальной геометрии в теории механических систем // Механика твердого тела. - 1979. - Вып. 11. - С. 37-49.
4. *Харламов М.П.* О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1981. - Вып. 13. - С. 10-13.

Волгоградская Академия государственной службы
mharlamov@vags.ru

Получено 28.05.01