ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 531.38

©2001. **И.Н. Гашененко, Е.Ю. Кучер**

АНАЛИЗ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Указан топологический тип трехмерных интегральных многообразий, которым принадлежат все известные точные решения уравнений Эйлера–Пуассона. В фазовом пространстве задачи построена двумерная поверхность сечения Пуанкаре и выполнен компьютерный анализ траекторной структуры динамической системы в окрестности исследуемых частных решений.

Введение. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела в подвижном базисе, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор вертикали, $\mathbf{r}$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс тела. Известными интегралами (1) являются

$$H = \frac{1}{2}A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = h, \;\; G = A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \;\; I = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Выделим в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$ трехмерное компактное подмножество

$$\mathcal{Q}^3_{h,g} = \{H = h, \;\; G = g, \;\; I = 1\} \subset \mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}),$$

которое инвариантно относительно фазового потока динамической системы (1). Принимая во внимание гамильтоновость уравнений (1) на поверхности уровней интегралов G, I, будем называть $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ *изоэнергетической* поверхностью [1,2]. Траектории динамической системы (1) проще изучать не во всем фазовом пространстве, а на регулярных изоэнергетических поверхностях, которые имеют малую размерность и простую топологическую структуру. Векторное соотношение

$$F = (A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{r} = 0$$

выполняется на непустом множестве точек любой траектории системы (1), поэтому выберем компактное подмножество

$$\mathcal{P}^2_{h,g} = \{H = h, \;\; G = g, \;\; I = 1, \;\; F = 0\} \subset \mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$$

в качестве двумерной вспомогательной поверхности (сечения Пуанкаре), которая позволит нам получить первичную информацию о расположении траекторий на $\mathcal{Q}^3_{h,g}$. Можно показать, что $\mathcal{P}^2_{h,g}$ состоит из множества критических точек гладкого отображения $p|_{\mathcal{Q}^3}$, где $p : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) \mapsto \boldsymbol{\omega}$ – проекция. Отметим некоторые важные свойства этой поверхности. Замкнутая ориентируемая компонента поверхности $\mathcal{P}^2_{h,g}$ разбивает связную компоненту неособого ориентируемого 3–многообразия $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ на два полных кренделя одинакового рода. Внутри каждой связной компоненты $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ расположена только одна компонента

$\mathcal{P}^2_{h,g}$. Почти любая фазовая траектория пересекает поверхность сечения $\mathcal{P}^2_{h,g}$. Исключением являются равномерные вращения и несколько известных периодических траекторий, которые целиком принадлежат $\mathcal{P}^2_{h,g}$.

Возможность существования периодических траекторий на $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ обсуждалась многими авторами. Например, в работе В.В.Козлова [3] доказана следующая теорема:

Уравнения задачи о вращении твердого тела с неподвижной точкой при фиксированных значениях постоянной площадей g и энергии $h > max(\frac{1}{2}g^2/(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu})$ имеют хотя бы одно периодическое движение. Если $g = 0$, то при всех $h > max(-\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu})$ уравнения (1) имеют не менее шести различных периодических траекторий (их проекции на сферу Пуассона - три различные замкнутые несамопересекающиеся кривые).

В некоторых частных случаях эта теорема может быть подтверждена нетривиальными примерами – частными периодическими решениями уравнений (1), для которых известны алгебраические инвариантные соотношения. "Используя, например, один результат В.А.Стеклова можно доказать существование периодических решений на всех совместных некритических уровнях интегралов энергии и момента (а не только при достаточно больших значениях h), если центр масс тела лежит на оси инерции."[3, с.51]

Заметим, что последнее утверждение нуждается в уточнении: во-первых, полученное В.А.Стекловым в 1899 г. периодическое решение существует только при достаточно больших значениях h и $g = 0$, поэтому ссылка в [3] не верна и, конечно, имеется в виду другой результат, полученный почти одновременно В.А.Стекловым и Д.Н.Бобылевым в 1896 г.; во-вторых, решение Бобылева–Стеклова также существует не при любых допустимых значениях h, g. Далее мы докажем, что при выполнении неравенства $h \le g^2/(2A_1) - |r_1|$ решения Бобылева–Стеклова не существует.

Если гамильтонова система интегрируема при помощи боттовского интеграла на некоторой фиксированной трехмерной изоэнергетической поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, тогда точные нижние оценки числа устойчивых периодических решений могут быть получены из топологических соображений (см. [1, гл.4,§1]). Кроме того, для интегрируемых случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Горячева–Чаплыгина имеется детальная классификация, основанная на изучении бифуркационных диаграмм и построении топологических инвариантов (молекул) А.Т.Фоменко, которая позволяет указать точное число предельных циклов и изолированных периодических решений на любой поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$. Во всех перечисленных случаях $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ имеют не слишком сложную структуру: от двух до восьми периодических траекторий (критических окружностей) могут принадлежать каждой связной компоненте этого 3-многообразия [2].

1. Бифуркации поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}, \mathcal{P}^2_{h,g}$. Если центр масс тела принадлежит главной оси инерции ($r_2 = r_3 = 0$), тогда критические значения отображения $H \times G : S^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2(h,g)$ образуют бифуркационное множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h,g)$, состоящее из четырех плоских кривых:

$$h = \frac{1}{2}\frac{g^2}{A_1} \pm |r_1|, \tag{3^1}$$

$$h = \frac{1}{2}\frac{A_i}{\sigma^2} + \frac{3}{2}\sigma^2\sigma_*, \quad g = \frac{A_i}{\sigma} + \sigma^3\sigma_*, \quad \sigma^2 \le \frac{|r_1|}{|\sigma_*|}, \tag{3^2}$$

где $\sigma_* = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_i)}$, $i = 2, 3$. Бифуркации поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ в этом случае полностью исследованы в работе [4]. Область изменения параметров $(\alpha, \beta) = (A_2A_1^{-1}, A_3A_1^{-1})$ расположена в первом квадранте и ограничена прямыми

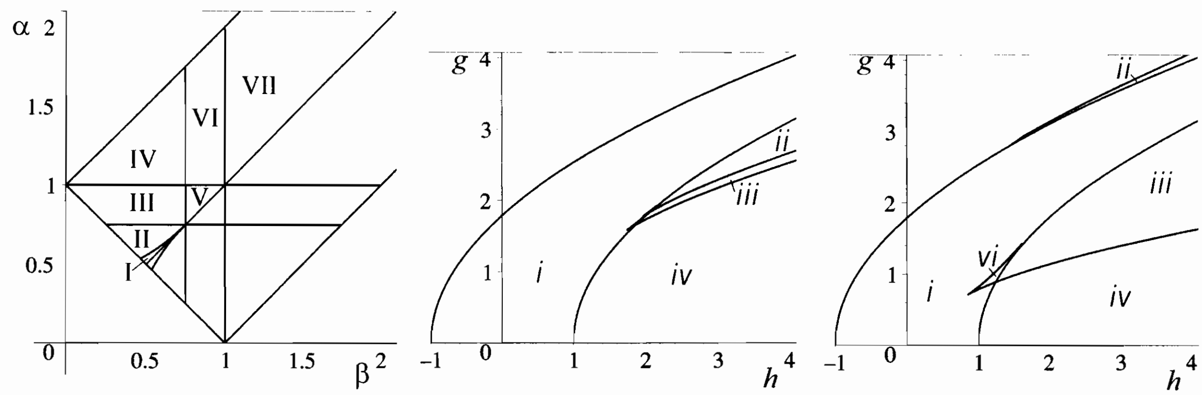
$$\{\beta=\alpha+1,\ \alpha\in[0,\infty)\}\cup\{\beta=\alpha-1,\ \alpha\in[1,\infty)\}\cup\{\beta=1-\alpha,\ \alpha\in(0,1)\}.$$

Для любой точки этой области можно построить кривые (3) на $\mathbb{R}^2(h,g)$. Множество

$$\{\alpha=1,\ \beta\in(0,2)\}\cup\{\beta=1,\ \alpha\in(0,2)\}\cup\{\alpha=\frac{3}{4},\ \beta\in\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)\}\cup\{\beta=\frac{3}{4},\ \alpha\in\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)\}\cup$$

$$\cup\{\alpha=\beta>\frac{1}{2}\}\cup\{\alpha=\frac{(9-8\beta)}{(5-4\beta)^2},\ \beta\in\left(\beta_0,\frac{3}{4}\right)\}\cup\{\beta=\frac{(9-8\alpha)}{(5-4\alpha)^2},\ \alpha\in\left(\alpha_0,\frac{3}{4}\right)\},$$

где $\alpha_0=\beta_0\approx0.4647$, делит плоскость $\mathbb{R}^2(\alpha,\beta)$ на подобласти I-VII с различными типами бифуркационных диаграмм (рис. 1). Полный список неособых интегральных многообразий $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ получен С.Б.Каток [4]. Заметим, что в самом общем случае неособые поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ рассматриваемой задачи являются связными или состоят из нескольких (двух или трех [5]) связных компонент, которые бывают (в зависимости от значений h,g) только следующих четырех видов: $\mathbb{R}P^3, S^3, S^1\times S^2$ и $K^3=(S^1\times S^2)\#(S^1\times S^2)$. Представленное в виде связной суммы многообразие K^3 можно также получить из сферы S^3 приклеиванием двух "ручек"[6, с.345].



а) $\alpha=A_2A_1^{-1},\beta=A_3A_1^{-1}$ *б)* $\alpha=0.565,\beta=0.506\ (II)$ *в)* $\alpha=1.2,\beta=0.201\ (IV)$

Рис. 1. Примеры бифуркационных диаграмм. Случай $r_2=r_3=0$.

Если центр масс волчка лежит в главной плоскости (например, пусть $r_3=0$), тогда бифуркационные кривые имеют следующий вид:

$$h=\frac{A_2r_1\sigma^3+(3A_2-2A_1)r_2\sigma^2+(3A_1-2A_2)r_1\sigma+A_1r_2}{2(A_1-A_2)\sigma(\sigma^2+1)^{\frac{1}{2}}},\qquad(4^1)$$

$$g=\frac{(A_1+A_2\sigma^2)(r_1\sigma+r_2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^{\frac{1}{2}}(A_1-A_2)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2+1)^{\frac{3}{4}}},$$

где $\sigma\in(-\infty,-r_2r_1^{-1}]\cup[-r_2r_1^{-1},0)\cup(0,\infty)$, и

$$h=\frac{1}{2}\frac{A_3}{\sigma^2}+\frac{3}{2}\sigma^2\sigma_*,\quad g=\frac{A_3}{\sigma}+\sigma^3\sigma_*,\quad|\sigma|\le\sigma_0{}^{-\frac{1}{4}},\qquad(4^2)$$

где

$$\sigma_* = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_3)} + \frac{r_2^2}{(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_0 = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_3)^2} + \frac{r_2^2}{(A_2 - A_3)^2}.$$

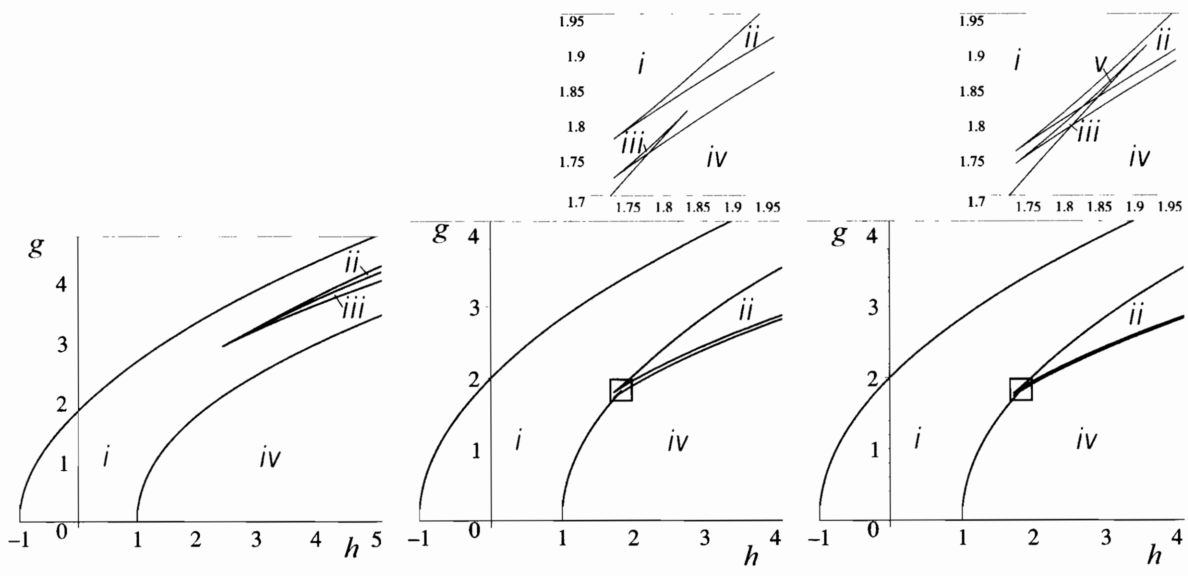
Такая запись бифуркационного множества позволяет дополнить начатое в работе [5] исследование случая $r_3 = 0$. Особые точки кривой (4^1) найдем из условий $\frac{dh}{d\sigma} = \frac{dl}{d\sigma} = 0$. Так как выполняется равенство $l\frac{dl}{d\sigma} = (\sigma^2+1)^{-1}(A_1 + A_2\sigma^2)\frac{dh}{d\sigma}$, получим одно уравнение для параметра σ:

$$\alpha\sigma^5 + (4\alpha - 3)\sigma^3 + (3\alpha - 4)r_*\sigma^2 - r_* = 0, \tag{5}$$

где $r_* = r_2 r_1^{-1}$, $\alpha = A_2 A_1^{-1}$. Число особых точек кривой (4^1) зависит от числа действительных корней этого уравнения. Можно показать, что уравнение (5) с действительными коэффициентами имеет не более трех действительных корней (вычислим число перемен знаков у коэффициентов полинома и применим, например, теорему Декарта). Это свойство позволяет разделить значения параметров (α, r_*), при которых кривая (4^1) имеет одну либо три особые точки. Приравнивая нулю дискриминант уравнения (5)

$$\alpha(3\alpha - 4)^5 r_*^4 + c(\alpha) r_*^2 - (4\alpha - 3)^5 = 0, \tag{6}$$

где $c(\alpha) = 256(\alpha^6 + 1) - 2700(\alpha^4 + 1)\alpha + 8268(\alpha^2 + 1)\alpha^2 - 11650\alpha^3$, получим уравнение разделяющей кривой на плоскости параметров (α, r_*). Анализ особых точек приведенного потенциала на сфере Пуассона позволяет описать топологию $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ по стандартной схеме [4,5,2]. На рис. 2 показаны основные типы бифуркационных диаграмм для случая $A_1 > A_3 > A_2$, ${r_*}^2 > (\beta - \alpha)$. Полный список неособых поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ содержит пять типов 3-многообразий: $i) S^3$, $ii) S^3 \cup S^3$, $iii) S^1 \times S^2$, $iv) \mathbb{R}P^3$, $v) S^3 \cup (S^1 \times S^2)$.



а) $\alpha = 0.7, \beta = 0.85, r_* = 1.2$ *б)* $\alpha = 0.5, \beta = 0.5005, r_* = 0.04$ *в)* $\alpha = 0.5, \beta = 0.50005, r_* = 0.01$

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы. Случай $A_1 > A_3 > A_2$, $r_3 = 0$.

Топология поверхности $\mathcal{P}^2_{h,g}$ и ее расположение внутри многообразия $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ меняются при изменении параметров тела и констант h, g. Бифуркационное множество и кривые

$$g^2(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - 2|\mathbf{r}|^2(h \pm |\mathbf{r}|) = 0, \tag{7}$$

$$8h^3 - 27g^2(A^{-1}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = 0 \tag{8}$$

разделяют плоскость $\mathbb{R}^2(h,g)$ на конечное число связных областей, внутри которых сохраняется топологический тип поверхности $\mathcal{P}^2_{h,g}$. С учетом физических ограничений на фазовые переменные следует положить в (8)

$$\frac{3(A^{-1}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})}{2|A^{-1}\mathbf{r}|} \le h \le \frac{3}{2}|\mathbf{r}|.$$

Детальное описание топологии и бифуркаций поверхностей $\mathcal{P}^2_{h,g}$ дано в статье И.Н.Гашененко и П.Рихтера "Enveloping surfaces and admissible velocities of the heavy spinning top"(в печати). Каждая связная компонента неособой поверхности $\mathcal{P}^2_{h,g}$ является двумерным компактным многообразием M^2_m рода $m \ge 0$ (сферой с m "ручками"), а число m в данной задаче не превосходит четырех. Проекции поверхностей $\mathcal{P}^2_{h,g}$ на подвижное пространство угловых скоростей исследованы в работах [7,8], там же предложена схема изучения проекций $\mathcal{P}^2_{h,g}$ на сферу Пуассона.

2. Частные решения. Центр масс принадлежит главной оси инерции. Переходим к краткому описанию всех известных частных решений уравнений Эйлера–Пуассона. Более детальные сведения о точных решениях динамики твердого тела и физических параметрах, при которых эти решения существуют, имеются в монографиях [9–11]. Функциональная зависимость констант h,g от параметров A_i, r_i для некоторых частных решений изучена А.А.Богоявленским и А.И.Докшевичем, на основе этих результатов далее будут указаны типы поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, несущих периодические траектории. Результаты компьютерного моделирования точных решений представлены на рис. 3-6. Вычисления проводились по следующей схеме: строились периодические решения и типичные траектории на неособых поверхностях $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, находились точки пересечения этих траекторий с $\mathcal{P}^2_{h,g}$, поверхности $\mathcal{P}^2_{h,g} \subset \mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\nu})$ проектировались на сферу $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$. Почти все точки сферы имеют два прообраза на $\mathcal{P}^2_{h,g}$, поэтому на рисунках показаны две копии S^2 (точнее, их проекции на $\mathbb{R}^2(\nu_1,\nu_2)$). В случае $g = 0$ изображена только одна копия, так как вторая ей идентична. Центр масс тела принадлежит одной из двух ортогональных осей, изображенных на этих рисунках.

Случай Бобылева–Стеклова. Пусть $A_1 = 2A_3,\ A_2 = \gamma A_3,\ \gamma \in (1,3),\ r_2 = r_3 = 0$. Д.Н.Бобылев и В.А.Стеклов независимо нашли при указанных ограничениях на распределение масс в твердом теле семейство частных решений уравнений Эйлера–Пуассона. В этом случае инвариантное многообразие задано следующими соотношениями

$$\omega_1 = a_0,\ \ \omega_2 = 0,\ \ \nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1\omega_3^2,$$

$$\nu_2^2 = \eta_0 + \eta_1\omega_3^2 + \eta_2\omega_3^4,\ \ \nu_3 = \xi_0\omega_3,$$

где $a_0, \zeta_i, \eta_i, \xi_0$ зависят от γ и двух свободных констант h, g. Зависимость ω_3 от времени выражена эллиптической функцией Якоби, а величины ω_1, ω_2 от времени не зависят.

Теорема. Если константы h,g связаны неравенством $h \le g^2/(2A_1) - |r_1|$, тогда на многообразии $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ не существует решения Бобылева–Стеклова.

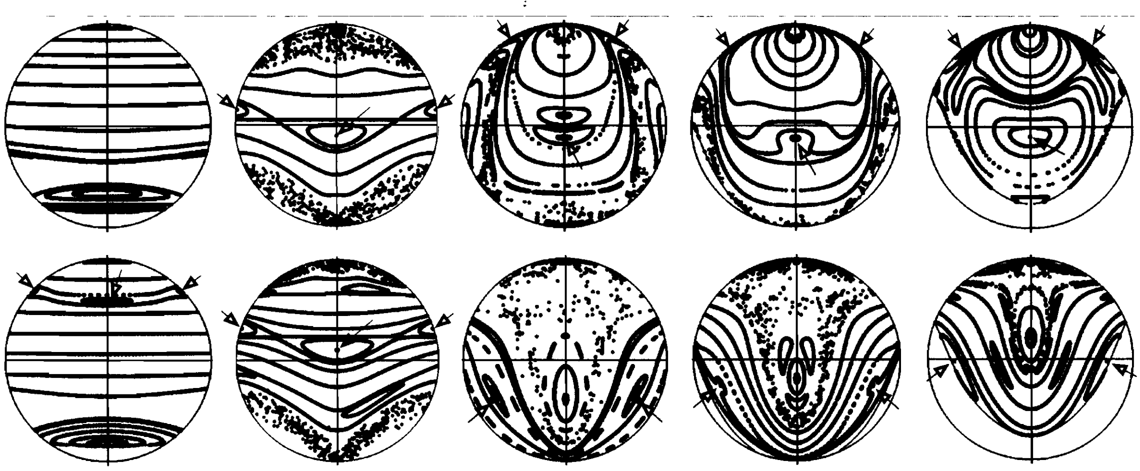
Доказательство. На единичной сфере Пуассона допустимыми являются те и только те точки, в которых приведенный потенциал задачи

$$U_g = \frac{g^2}{2(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})} - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu})$$

удовлетворяет неравенству $U_g \le h$. Предположим, что условие $h \le g^2/(2A_1) - |r_1|$ выполняется и $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ не пусто. Непустые интегральные многообразия существуют, например, при $A_2 > A_1 = 2A_3$, $r_2 = r_3 = 0$ (см. на рис. 1, *в* область *ii*). Тогда в точках пересечения плоскости $\nu_2 = 0$ со сферой $|\boldsymbol{\nu}| = 1$ должно выполняться неравенство $U_g|_{\nu_2=0} \le g^2/(2A_1) - |r_1|$, то есть

$$0 \le \frac{g^2}{2A_1}\frac{(1-\nu_1^2)}{(1+\nu_1^2)} \le |r_1|(\nu_1 - 1) \le 0.$$

Следовательно, при заданных параметрических ограничениях фазовые траектории могут пересекать гиперплоскость $\nu_2 = 0$ только если $\nu_1 = 1$, но для семейства решений Бобылева–Стеклова получаем противоречие: в моменты времени, когда величина $|\omega_3|$ достигает максимального значения, имеем $\nu_2 = 0, \nu_3 \ne 0, \nu_1 \ne 1$. Таким образом, решение Бобылева–Стеклова существует не на всех совместных уровнях интегралов энергии и момента, а только при достаточно больших значениях $h > g^2/(2A_1) - |r_1|$. □



а) $\gamma = 1.01$ *б)* $\gamma = 1.5$ *в)* $\gamma = 0.473$ *г)* $\gamma = 0.495$ *д)* $\gamma = 0.526$

Рис. 3. Сечения поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ для случаев Бобылева–Стеклова (а,б) и Ковалевского (в,г,д).

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вычерчивает в теле отрезок прямой, параллельный третьей координатной оси. Граничные точки этого отрезка определяются корнями уравнения $\eta_0 + \eta_1\omega_3^2 + \eta_2\omega_3^4 = 0$, или

$$A_1^2\omega_3^4 + 8A_1(A_1\omega_1^2 - h)\omega_3^2 + 4A_1^2\omega_1^4 - 16hA_1\omega_1^2 + 16(h^2 - r_1^2) = 0, \tag{9}$$

которое имеет по крайней мере два действительных корня [9, с.81]. Постоянная величина ω_1 является действительным корнем уравнения

$$A_1^2\omega_1^3 - 2hA_1\omega_1 - 2gr_1 = 0. \tag{10}$$

На фиксированной связной компоненте поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ могут лежать несколько периодических траекторий решения Бобылева–Стеклова. Число действительных решений уравнений (9),(10) при заданных параметрах A_1, r_1, h, g равно удвоенному числу этих траекторий на $\mathcal{Q}^3_{h,g}$. По старшим степеням полиномов (9),(10) устанавливаем, что число траекторий не превосходит шести, но более точный анализ показал, что 12 действительных решений система (9),(10) не имеет. Следовательно, при изменении параметров тела в допустимых интервалах число траекторий меняется от 1 до 5. Например, в интегрируемом случае С.В.Ковалевской ($A_1 = A_2 = 2A_3$) на каждой связной компоненте $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ существуют от 1 до 5 траекторий рассматриваемого семейства точных решений. Точки пересечения периодических фазовых траекторий с поверхностью сечения $\mathcal{P}^2_{h,g}$ найдем из условия $F = 0$, то есть $\omega_3\nu_2 = 0$. Если траектория угловой скорости пересекает первую координатную ось, несущую центр масс тела, тогда имеем четыре точки на $\mathcal{P}^2_{h,g}$; если $\omega_3(t)$ сохраняет знак, тогда фазовая траектория пересекает $\mathcal{P}^2_{h,g}$ в двух точках.

Поворот координатных осей подвижного базиса сводит случай $A_1 = 2A_2$ к уже рассмотренному решению. Полученная информация о частных решениях помещена в табл. 1, 2. В них указаны: топологический тип связных компонент $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ и $\mathcal{P}^2_{h,g}$; параметры, характеризующие поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}, \mathcal{P}^2_{h,g}$; число циклов, которые делает периодическая траектория, последовательно возвращаясь на $\mathcal{P}^2_{h,g}$ (один цикл соответствует дуге траектории между двумя последовательными максимумами функции $|A\boldsymbol{\omega}(t)|$); число траекторий данного решения на одной компоненте $\mathcal{Q}^3_{h,g}$; номера тех областей на рис. 1, *а*, которым принадлежат параметры (α, β) рассматриваемого семейства решений.

Случай Стеклова. Если центр масс тела принадлежит главной оси ($r_2 = r_3 = 0$) и выполняется неравенство $(A_1 - 2A_2)(A_1 - 2A_3) < 0$, тогда частное решение задано соотношениями

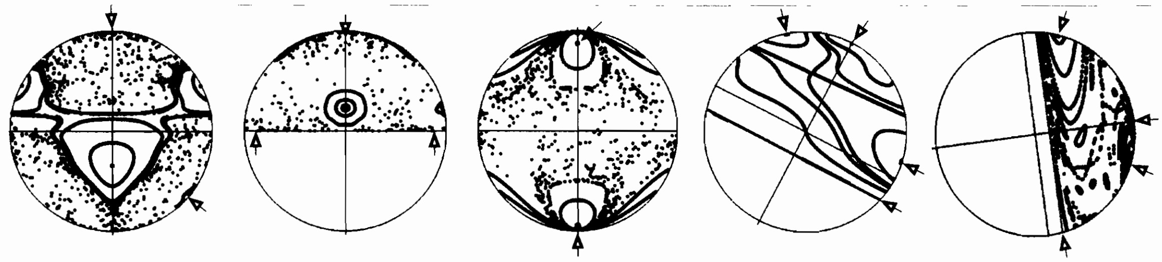
$$\omega_2^2 = a_0 + a_1\omega_1^2, \;\; \omega_3^2 = b_0 + b_1\omega_1^2,$$

$$\nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1\omega_1^2, \;\; \nu_2 = \eta_0\omega_1\omega_2, \;\; \nu_3 = \xi_0\omega_1\omega_3.$$

Функция $\omega_1(t)$ является эллиптической функцией Якоби. Интегральные константы имеют следующий вид

$$g = 0, \;\; h = \left| r_1 + \frac{A_1^2 r_1}{2(A_1 - A_2)(A_3 - A_1)} \right| \in (|r_1|, \infty).$$

Зависящие от параметров значения (h, g) не принадлежат кривым (3),(7),(8), поэтому поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}, \mathcal{P}^2_{h,g}$ не изменяют свой топологический тип. Двухпараметрическое семейство периодических решений Стеклова существуют только на тех $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, которые диффеоморфны проективному пространству $\mathbb{R}P^3$, а поверхность $\mathcal{P}^2_{h,g}$ всегда есть тор. На каждой поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ расположены две траектории этого семейства.



а) $\alpha = 0.68, \beta = 0.38$ *б)* $\gamma = 1.59$ *в)* $\gamma \approx 0.475$ *г)* $\alpha = 0.6, \beta = 0.87$ *д)* $\alpha = 0.3, \beta = 0.97$

Рис. 4. Сечения поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ для случаев Стеклова (а), Чаплыгина (б), Докшевича (в) и Гесса-Докшевича (г,д).

Случай Горячева. Для тела с параметрами $A_3 = \gamma A_2$, $A_1 = \frac{16\gamma(1-\gamma)}{(9-8\gamma)} A_2$, $\gamma \in (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$, $r_2 = r_3 = 0$ известны следующие инвариантные соотношения

$$\omega_2^2 = a_0 + a_1\omega_1^2, \;\; \omega_3^2 = b_0 + b_1\omega_1^2 + b_2\omega_1^4,$$

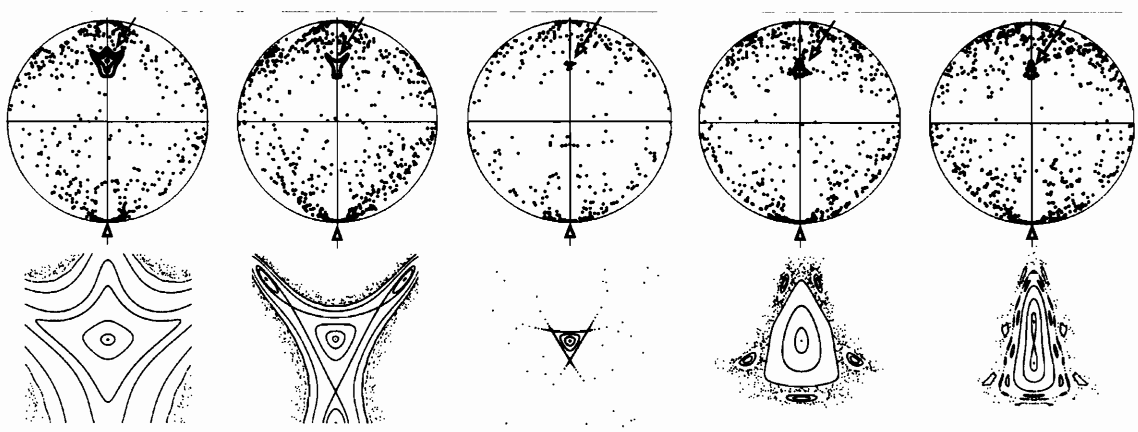
$$\nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1\omega_1^2 + \zeta_2\omega_1^4, \;\; \nu_2 = \left(\eta_0 + \eta_1\omega_1^2\right)\omega_1\omega_2, \;\; \nu_3 = \xi_0\omega_1\omega_3,$$

которые определяют две замкнутые траектории на фиксированной поверхности уровня интегралов (2). Константы интегралов имеют вид

$$g = 0, \;\; h = \left[\frac{|r_1|}{(2-4\gamma)} + \frac{|r_1|}{(3-4\gamma)} + \frac{|r_1|}{(6-4\gamma)}\right] \in \left(\frac{26}{9}|r_1|, \infty\right).$$

Топология поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}, \mathcal{P}^2_{h,g}$ не зависит от параметра γ. Переменная $z = \omega_1^2$ является Якоби эллиптической функцией времени.

Траекторная структура фазового пространства в окрестности решения Горячева качественно меняется с изменением γ: начиная с $\gamma = 0.5$ все близкие траектории лежат на концентрических инвариантных торах, стягивающихся к замкнутой кривой (см. рис. 5, *а*); уменьшение γ приводит к появлению неустойчивой периодической траектории, которая типична для резонанса 3:1 (см. рис. 5, *в* и рис. 239 в книге [6]); при $\gamma = 0.385$ решение принадлежит сепаратрисной поверхности (ее сечение – “восьмерка”на рис. 5, *д*), по терминологии [1,2] здесь два атома A перестраиваются в атом B; дальнейшее уменьшение γ приводит к разрушению сепаратрисной поверхности, появлению регулярных “островов” и хаотических траекторий даже в малой окрестности решения Горячева.



а) $\gamma = 0.417$ *б)* $\gamma = 0.401$ *в)* $\gamma = 0.4$ *г)* $\gamma = 0.388$ *д)* $\gamma = 0.385$

Рис. 5. Сечения поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, несущих решение Горячева.

Случай Чаплыгина. Пусть $A_2 = \gamma A_1$, $A_3 = \frac{9(2\gamma-1)}{2(16\gamma-9)} A_1$, $\gamma \in \left(\frac{3}{2}, \frac{17+\sqrt{73}}{16}\right)$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда следующая система независимых соотношений

$$\omega_2^2 = a_0\omega_1^{\frac{2}{3}} + a_1\omega_1^2, \;\; \omega_3^2 = b_0\omega_1^{\frac{2}{3}} + b_1\omega_1^2,$$

$$\nu_1 = \zeta_0\omega_1^{\frac{2}{3}} + \zeta_1\omega_1^2, \;\; \nu_2 = \left(\eta_0 + \eta_1\omega_1^{-\frac{4}{3}}\right)\omega_1\omega_2, \;\; \nu_3 = \left(\xi_0 + \xi_1\omega_1^{-\frac{4}{3}}\right)\omega_1\omega_3$$

определяет две инвариантные кривые на фиксированной трехмерной поверхности уровня $Q^3 = \{H = 0,\ \ G = 0,\ \ I = 1\}$, которая диффеоморфна S^3. Переменная $z = \omega_1^{\frac{2}{3}}$ связана со временем гиперэллиптической квадратурой. В окрестности решения Чаплыгина фазовые траектории имеют неустойчивое поведение. По результатам компьютерного анализа обе инвариантные кривые являются предельными циклами и принадлежат одной двумерной поверхности, которая расположена рядом с областью хаотических движений. Анализ этих движений будет проведен в отдельной работе. Без детализации на рис. 4, *б* стрелками показано расположение точек, принадлежащих данному периодическому решению, на поверхности сечения.

Случай Ковалевского. Пусть $A_3 = \gamma A_2, A_1 = \frac{18\gamma(1-\gamma)}{(10-9\gamma)} A_2, \gamma \in (\frac{10}{27}, \gamma_*)$, $\gamma_* \approx 0.6219$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда частное решение задано соотношениями

$$\omega_2^2 = a_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_1^2,\ \ \omega_3^2 = b_0 + b_1\omega_1 + b_2\omega_1^2 + b_3\omega_1^3,$$

$$\nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_1^2 + \zeta_3\omega_1^3,$$

$$\nu_2 = \left(\eta_0 + \eta_1\omega_1 + \eta_2\omega_1^2\right)\omega_2,\ \ \nu_3 = (\xi_0 + \xi_1\omega_1)\,\omega_3.$$

Зависимость $\omega_1(t)$ выражена гиперэллиптической квадратурой. Существует однопараметрическое семейство поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, которым принадлежит решение Н.Ковалевского. Тип этих поверхностей меняется при изменении параметра γ. В этом случае неособыми изоэнергетическими поверхностями являются $\mathbb{R}P^3, S^1 \times S^2, S^3$, они соответствуют $\gamma \in (\frac{10}{27}, \gamma_1) \cup (\gamma_1, \gamma_2) \cup (\gamma_2, \gamma_*)$, где $\gamma_1 \approx 0.48327$, $\gamma_2 \approx 0.49769$. Для $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ поверхность $\mathcal{P}^2_{h,g}$ является сферой с тремя "ручками". Явная зависимость h, g от γ выражается с помощью громоздких формул. Дуга кривой на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ пересекает две бифуркационные кривые и соединяет точки $(2.269, 0.808)$ и $(0.848, 1.885)$. При $\gamma \to \gamma_*$ решение стремится к устойчивому равномерному вращению вокруг вертикали.

Случай Коносевича-Поздняковича. Пусть $A_3 = \gamma A_1,\ A_2 = \frac{4(2\gamma-1)}{(17\gamma-8)} A_1, \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2, \gamma_1 \approx$ $\approx 0.4119,\ \ \gamma_2 \approx 0.7082,\ \ r_2 = r_3 = 0$, тогда решение задано следующими соотношениями

$$\omega_1 = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi,\ \ \omega_2 = b_0\sin\varphi + b_1\sin 2\varphi,$$

$$\omega_3^2 = c_0 + c_1\cos\varphi + c_2\cos 2\varphi + c_3\cos 3\varphi + c_4\cos 4\varphi,$$

$$\nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1\cos\varphi + \zeta_2\cos 2\varphi + \zeta_3\cos 3\varphi + \zeta_4\cos 4\varphi,$$

$$\nu_2 = \eta_0\sin\varphi + \eta_1\sin 2\varphi + \eta_2\sin 3\varphi + \eta_3\sin 4\varphi,$$

$$\nu_3 = (\xi_0 + \xi_1\cos\varphi + \xi_2\cos 2\varphi)\,\omega_3,$$

где переменная $z = \cos\varphi$ связана со временем гиперэллиптической квадратурой. Это решение существует для двух наборов параметров, которые выпишем в явном виде:

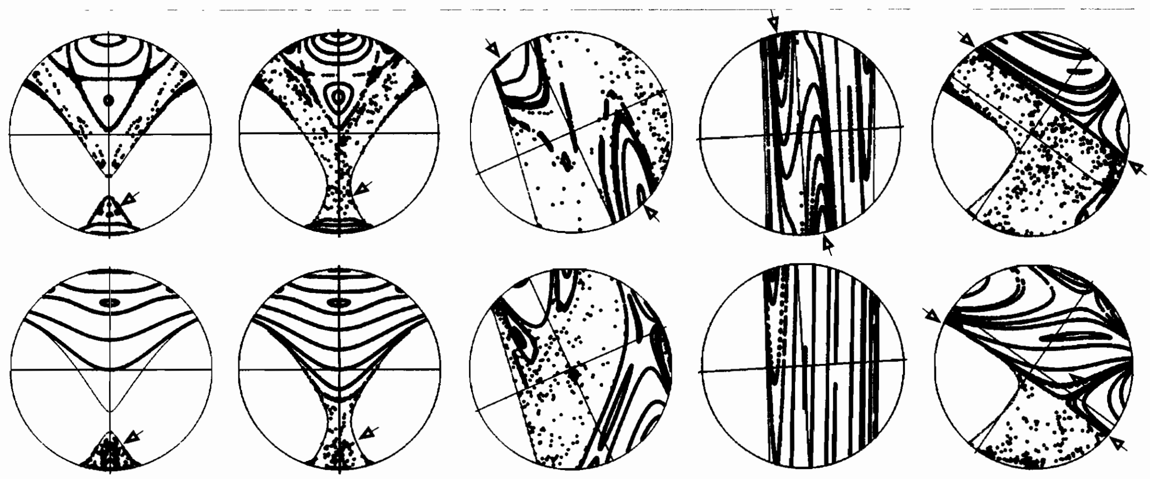
$$1)\ \ (A_1, A_2, A_3) \approx (2.4277, 1.7151, 1.0),\ \ r_1 = 1.0,\ \ h \approx 3.0954,\ \ g \approx 3.1383;$$

$$2)\ \ (A_1, A_2, A_3) \approx (1.4121, 0.5822, 1.0),\ \ r_1 = 1.0,\ \ h \approx 3.0672,\ \ g \approx 2.3694.$$

Значения параметров позволяют указать тип $Q^3_{h,g}$ и $P^2_{h,g}$: в первом случае имеем $S^3 \cup S^3$ (периодическая траектория принадлежит одной из связных компонент) и $T^2 \cup T^2$; во втором случае имеем $S^1 \times S^2$ и M_3^2. Заметим, что поворотом подвижных осей и масштабированием можно преобразовать случай *2)* к следующей эквивалентной форме:

$$2')\ (A_1, A_2, A_3) \approx (2.4252, 1.7175, 1.0),\ \ r_1 = 1.0,\ \ h \approx 3.0672,\ \ g \approx 3.1052.$$

Конечно, такое преобразование не изменяет топологию $Q^3_{h,g}$ и $P^2_{h,g}$. Для этого периодического решения нам не удалось построить в фазовом пространстве окрестность, расслоенную концентрическими инвариантными торами. Все близкие траектории имеют сложную структуру, они чувствительны даже к малому изменению начальных условий. Периодическая траектория пересекает $P^2_{h,g}$ в восьми (для *1*) и в двенадцати (для *2*) точках, стрелками мы укажем лишь приближенное их местоположение на рис. 6, *а,б*.



а) $\gamma \approx 0.412$ *б)* $\gamma \approx 0.708$ *в)* $\alpha = 0.45, \beta = 0.91$ *г)* $\alpha = 0.25, \beta = 0.251$ *д)* $\alpha = 0.5, \beta = 0.6$

Рис. 6. Сечения поверхностей $Q^3_{h,g}$, несущих решения Коносевича–Поздняковича (а,б), Гриоли (в,г) и Гесса (д).

Случай Докшевича. При выполнении условий Н.Ковалевского существует частное решение, которое отличается от рассмотренного ранее случая. Снова положим $A_3 = \gamma A_2, A_1 = \frac{18\gamma(1-\gamma)}{(10-9\gamma)} A_2, \gamma = \frac{(25-2\sqrt{37})}{27}$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда инвариантные кривые в фазовом пространстве заданы системой соотношений

$$\omega_1^2 = a_0 + a_1 z^2, \;\; \omega_2^2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2,$$

$$\omega_3^2 = (c_0 + c_1 z)\, z^2, \;\; \nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1 z + \zeta_2 z^2 + \zeta_3 z^3,$$

$$\nu_2 = (\eta_0 + \eta_1 z)\, \omega_1\omega_2, \;\; \nu_3 = \left(\xi_0 + \xi_1 z^{-1}\right) \omega_1\omega_3.$$

Переменная z связана с t гиперэллиптической квадратурой. Данное решение существует только на одной поверхности $Q^3_{h,g}$, которая соответствует константам

$$g = 0, \;\; h = \frac{6(89 + 17\sqrt{37})|r_1|}{(20 - \sqrt{37})\sqrt{17 + 8\sqrt{37}}} \approx 10.2367|r_1|.$$

Таким образом, поверхность $Q^3_{h,g}$ диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$, а $\mathcal{P}^2_{h,g}$ является тором.

3. Частные решения. Центр масс лежит в главной плоскости инерции.

Физический маятник. Если центр масс тела принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции ($r_3 = 0$), тогда при $h \in (-|\mathbf{r}|, \infty)$, $g = 0$ и начальных условиях $\omega_1 = \omega_2 = \nu_3 = 0$ тело движется как физический маятник.

Табл. 1. $r_2 = r_3 = 0$

Решения	$\mathcal{Q}^3_{h,g}$	$\mathcal{P}^2_{h,g}$	Параметры	Циклы	Траектории	$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
Бобылев–	$\mathbb{R}P^3, S^3$	T^2	$(3) : A_2, h, g$	1,2	1-5	$I - IV$
Стеклов	$S^1 \times S^2, K^3$	M^2_3		1,2	1-5	$I - IV$
Стеклов	$\mathbb{R}P^3$	T^2	$(2) : A_1, A_2$	2	2	$I - IV$
Горячев	$\mathbb{R}P^3$	T^2	$(1) : A_1$	2	2	IV
Чаплыгин	S^3	T^2	$(1) : A_1$	2	2	IV
Ковалевский	$S^3, \mathbb{R}P^3$	T^2	$(1) : A_1$	4	1	IV
	$S^1 \times S^2$	M^2_3		4	1	IV
Коносевич–	S^3	T^2	(0)	4	1	II
Позднякович	$S^1 \times S^2$	M^2_3	(0)	6	1	II
Докшевич	$\mathbb{R}P^3$	T^2	(0)	2	2	IV

Остальные фазовые переменные с помощью следующих соотношений

$$\nu_1 = \frac{r_1}{|\mathbf{r}|^2}\left(\frac{A_3}{2}\omega_3^2 - h\right) - \frac{r_2}{|\mathbf{r}|^2}\sqrt{|\mathbf{r}|^2 - \left(\frac{A_3}{2}\omega_3^2 - h\right)^2},$$

$$\nu_2 = \frac{r_2}{|\mathbf{r}|^2}\left(\frac{A_3}{2}\omega_3^2 - h\right) + \frac{r_1}{|\mathbf{r}|^2}\sqrt{|\mathbf{r}|^2 - \left(\frac{A_3}{2}\omega_3^2 - h\right)^2},$$

$$A_3\frac{d\omega_3}{dt} = \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - \left(\frac{A_3}{2}\omega_3^2 - h\right)^2}$$

выражаются в эллиптических функциях времени. Если $-|\mathbf{r}| < h < |\mathbf{r}|$, тогда на $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, диффеоморфной сфере S^3, существует одна траектория, которая отвечает маятниковым колебаниям центра масс вокруг главной оси. Если $h > |\mathbf{r}|$, тогда на $\mathcal{Q}^3_{h,g}$, диффеоморфной $\mathbb{R}P^3$, существуют две периодические траектории, которые соответствуют вращениям центра масс тела вокруг третьей оси инерции. В случае $r_2 = r_3 = 0$ число маятниковых траекторий на $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ удваивается, так как движения возможны вокруг второй и третьей осей инерции. Для $g = 0$ любая неособая поверхность $\mathcal{P}^2_{h,g}$ является тором. Точки пересечения маятниковых траекторий с $\mathcal{P}^2_{h,g}$ соответствуют точкам экстремума функции $|\boldsymbol{\omega}(t)|$.

Случай Гесса. Параметры, характеризующие распределение масс, подчиним следующим условиям

$$r_1\sqrt{A_1(A_3 - A_2)} = r_2\sqrt{A_2(A_1 - A_3)}, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_3 > A_2. \tag{11}$$

Тогда задача интегрирования уравнений (1) на двумерном инвариантном подпространстве, которое задано соотношением Гесса

$$A_1\omega_1 r_1 + A_2\omega_2 r_2 = 0$$

и совместными уровнями интегралов (2), сводится к эллиптической квадратуре и к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с мероморфными двоякопериодическими коэффициентами. Двумерное инвариантное подпространство Гесса принадлежит $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ и, в зависимости от значений h, g, заполнено либо квазипериодическими, либо асимптотическими траекториями, стремящимися к предельным циклам [12]. Укажем одно интересное свойство: инвариантное подпространство всегда связно и разделяет многообразие $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ на две непересекающиеся компоненты; следовательно, любая фазовая траектория на $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ либо принадлежит семейству решений Гесса, либо целиком принадлежит одной из этих компонент. На рис. 6, *д* подпространству соответствуют два отрезка (они отмечены стрелками), верхнюю часть поверхности сечения пересекают регулярные, а нижнюю – в основном хаотические траектории.

Бифуркационные кривые (4) делят плоскость $\mathbb{R}^2(h,g)$ на области с пятью возможными типами неособых поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ (см. рис. 2). Решение Гесса существует только на многообразиях $S^3, S^1\times S^2$ и $\mathbb{R}P^3$. Если $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ состоит из двух связных компонент, тогда решение Гесса принадлежит той компоненте, которая диффеоморфна многообразию S^3. Кроме того, это решение существует не при любых допустимых значениях h,g и параметрические ограничения могут быть записаны в виде неравенства. Область допустимых значений констант h,g в этом случае исследована А.М.Ковалевым [12]. Решения Гесса существуют только в той части плоскости $\mathbb{R}^2(h,g)$, которая ограничена кривой (4^2) с параметром $\sigma_*=-|r|^2A_3^{-1}$. Соответствующие неравенству $|\sigma|\le\sigma_0{}^{-\frac{1}{4}}$ дуги этой кривой, как мы выяснили в п.1, принадлежат бифуркационному множеству (на рис. 2, *а* кривая (4^2) разделяет области ii, iii). Подстановка $r_*^2=(\beta-\alpha)\alpha^{-1}(1-\beta)^{-1}$ в (6) позволяет получить уравнение кривой, которая отделяет узкую подобласть, прилегающую к интервалу $\{\alpha=\beta, \alpha\in(0.5, 0.75)\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha,\beta)$. Для параметров (α,β), принадлежащих этой подобласти, бифуркационные диаграммы изображены на рис. 2, *б,в*. Почти все траектории решения Гесса имеют бесконечное число пересечений с поверхностью сечения $\mathcal{P}^2_{h,g}$, которая, в зависимости от значений h,g, является тором, M_2^2 или M_3^2.

Случай Гриоли. Пусть $r_1\sqrt{A_3-A_2}+r_2\sqrt{A_1-A_3}=0,\ A_1>A_3>A_2,\ r_3=0$, тогда существует частное решение, в котором зависимость фазовых переменных от времени выражается в тригонометрических функциях:

$$\omega_1=a_0+a_1\cos\mu_0t,\ \ \omega_2=a_1-a_0\cos\mu_0t,\ \ \omega_3=\mu_0\sin\mu_0t,$$

$$\nu_1=\zeta_0\cos\mu_0t+\zeta_1\sin^2\mu_0t,\ \ \nu_2=\eta_0\cos\mu_0t+\eta_1\sin^2\mu_0t,\ \ \nu_3=(\xi_0+\xi_1\cos\mu_0t)\sin\mu_0t.$$

Двухпараметрическое семейство поверхностей $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ содержит это частное решение, константы интегралов можно выразить через параметры A_i:

$$h=\frac{A_1+A_2}{2(A_1^2+A_1A_2+A_2^2-A_1A_3-A_2A_3)^{\frac{1}{2}}},\ \ g=\frac{A_1A_2}{(A_1^2+A_1A_2+A_2^2-A_1A_3-A_2A_3)^{\frac{3}{4}}}.$$

Бифуркационные диаграммы случая Гриоли качественно не отличаются от диаграмм случая Гесса. Допустимые значения h,g принадлежат областям *i,iii* (см. рис. 2), следовательно, неособые $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ диффеоморфны S^3 либо $S^1\times S^2$.

Случай Докшевича. Если параметры тела связаны условиями (11), тогда существует частное решение уравнений (1), которое отличается от решения Гесса, так как инвариантное многообразие задано системой соотношений

$$\omega_1=a_0z^{-1}+a_1z,\ \ \omega_2=b_0z^{-1}+b_1z,\ \ \omega_3^2=c_0z^{-2}+c_1+c_2z^2,$$

$$\nu_1=\zeta_0+\zeta_1z^2,\ \ \nu_2=\eta_0+\eta_1z^2,\ \ \nu_3=\xi_0z\omega_3.$$

Табл. 2. $r_3 = 0$

Решения	$\mathcal{Q}^3_{h,g}$	$\mathcal{P}^2_{h,g}$	Параметры	Циклы	Траектории
Физический	S^3	T^2	$(4): A_1, A_2, r_1, h$	2	1,2
маятник	$\mathbb{R}P^3$	T^2		1	2,4
Гесс	$\mathbb{R}P^3, S^3, S^1 \times S^2$	T^2, M^2_2, M^2_3	$(4): A_1, A_2, h, g$	∞	∞
Гриоли	S^3	T^2	$(2): A_1, A_2$	1	1
	$S^1 \times S^2$	M^2_3		1	1
Докшевич	S^3	T^2	$(2): A_1, A_2$	1	2

Функция $z(t)$ является эллиптической функцией Якоби. Решение принадлежит изоэнергетическим поверхностям, зависящим от двух независимых параметров. Интегральные константы имеют вид:

$$g = 0, \quad h = \frac{3A_1A_2(A_1 + A_2 - d)|\mathbf{r}|}{(A_1 + A_2 + 2d)(2A_1A_3 + 2A_2A_3 - 3A_1A_2 - 2A_3d))} + |\mathbf{r}| \in (-|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}|),$$

где $d^2 = A_1^2 + A_2^2 - A_1A_2$. Поверхности $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ диффеоморфны сфере S^3, на каждой из них расположены две траектории этого семейства, а также расположено семейство решений Гесса. Одна из траекторий решения Гесса совпадает с траекторией физического маятника. На рис. 4, *г,д* отмечены точки пересечения траекторий Докшевича и Гесса с поверхностью $\mathcal{P}^2_{h,g}$, которая всегда есть тор.

1. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. - 413 с.
2. *Oshemkov A.A.* Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Advances in Sov. Math. - 1991. - **6**. – P. 67-146.
3. *Козлов В.В.* Вариационное исчисление в целом и классическая механика // Успехи матем. наук – 1985. - **40**, вып.2. – С. 33-60.
4. *Каток С.Б.* Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Там же. – 1972. - **27**, вып.2. – С. 126-132.
5. *Татаринов Я.В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. – 1974. - N 6. - С. 99-105.
6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. - 432 с.
7. *Gashenenko I.N.* Angular velocity of the Kovalevskaya top // Regular and chaotic dynamics. – 2000. – **5**, N 1. – P. 104-113.
8. *Гашененко И.Н.* Инвариантные множества в пространстве угловых скоростей тяжелого гиростата // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 79-87.
9. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. - 221 с.
10. *Leimanis E.* The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1965. – 337p.
11. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. - Киев: Наукова думка, 1978. – 296с.
12. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып.6. – С. 1111-1118.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий ин-т ж.-д. транспорта
math@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 24.03.01