УДК 531.36

©2000. **Л.М. Ковалева, А.Е. Позднякович**

РАВНОМЕРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ НАКЛОННОЙ ОСИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНИМ МАХОВИКОМ

Рассмотрены различные случаи расположения гироскопа, найдены необходимые и достаточные условия существования равномерных вращений вокруг наклонной оси и положения осей равномерных вращений относительно тела.

Для управления вращательным движением твердого тела могут быть использованы такие устройства, как одно и двустепенные гироскопы - маховики и гиродины. Управление вращательным движением тела (носителя) при помощи установленных на нем гироскопов основано на перераспределении кинетического момента механической системы "носитель - управляющие устройства" между составляющими систему телами при изменении кинетического момента несомых тел. Изменение кинетического момента маховика осуществляется за счет ускорения или торможения его; изменение кинетического момента гиродина - в основном за счет поворотов оси вращения ротора при поворотах гирокамеры в подвесе. Управлениями при этом являются проекции прикладываемых к маховику или рамке гироскопа моментов сил на соответствующие оси вращения.

Равномерные вращения занимают важное место в динамике твердого тела. Для твердого тела они были изучены Штауде [5]. Для тяжелого гиростата (кинетический момент несомых тел постоянен) конус осей равномерного вращения получен П.В. Харламовым [3]. Отличительная особенность равномерных вращений - они происходят вокруг вертикали. Если кинетический момент несомых тел не постоянный, то можно поставить задачу о нахождении равномерных вращений вокруг наклонной оси. Проведенные исследования показывают, что такие вращения возможны. Решение существенно зависит от числа носимых маховиков. Наиболее простые случаи соответствуют наличию двух и трех маховиков [4]. Для тела с одним маховиком задача сведена к изучению существования линейных инвариантных соотношений у линейной системы специального вида с постоянными коэффициентами. Получены условия, при которых существуют равномерные вращения вокруг наклонной оси.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение в поле силы тяжести твердого тела, имеющего неподвижную точку и несущего одностепенной гироскоп - маховик. Маховик является твердым телом, динамически симметричным относительно своей оси вращения. Это означает, что центр масс маховика лежит на его оси вращения, ось вращения маховика является главной центральной осью инерции, а поперечные главные центральные моменты инерции маховика равны между собой. К оси маховика приложены управляющие моменты, значения которых заранее не фиксируются, а находятся из условий существования равномерных вращений тела. Под равномерными вращениями понимается движение тела с постоянной угловой скоростью.

Уравнения движения указанной системы имеют вид [1,2]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) = \Gamma\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu} - u\boldsymbol{\alpha}\,, \tag{1}$$

$$\dot{\lambda} = u, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор вертикали (направление силы тяжести); $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор с началом в неподвижной точке и направленный к центру масс системы твердое тело-маховик; $\boldsymbol{\alpha}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси вращения маховика; A – обобщенный тензор инерции; $\lambda = J(\dot{\varphi} + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}))$ – кинетический момент маховика; J – момент инерции маховика относительно его оси вращения, φ – угол вращения маховика; u – управляющий момент, приложенный к оси маховика; Γ – произведение веса системы твердое тело-маховик на расстояние между центром масс и неподвижной точкой.

Уравнения (1) имеют интегралы

$$(A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu}) = const, \quad (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = 1. \tag{3}$$

При условии $\boldsymbol{\omega} = const$ уравнение (1) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}\times(A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) = \Gamma\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu} - u\boldsymbol{\alpha}. \tag{4}$$

Введем единичные векторы $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, образующие вместе с $\boldsymbol{\alpha}$ единичный трехгранник. Проектируя уравнения (4) на векторы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\omega}$, получим управление

$$u = (\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}) + \Gamma(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e}), \tag{5}$$

и два соотношения

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\omega}\times A\boldsymbol{\omega}) + \lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha}) + \Gamma(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}) = 0,\\ \Gamma(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}) - ((\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}) + \Gamma(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e}))(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}) = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, задача существования равномерных вращений сводится к существованию двух инвариантных соотношений (6) у системы (2), в которой u определяется формулой (5) и $\boldsymbol{\omega} = const$.

2. Необходимые условия. В случае, если $\boldsymbol{\nu} = const$, из системы (2) следует, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарен $\boldsymbol{\nu}$, то есть равномерные вращения происходят вокруг вертикали. Если $\boldsymbol{\nu}\neq const$, равномерные вращения происходят вокруг наклонной оси.

Рассмотрим производные соотношений (6) в силу системы (2)

$$\begin{gathered}((\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}) + \Gamma(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e}))(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) + \Gamma(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}) = 0,\\ (\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}) = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Введя обозначения

$$\begin{gathered}a_0 = a_0^{(1)}a_0^{(2)} = (\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3)(\alpha_1\omega_2\omega_3(A_3 - A_2) +\\ +\alpha_2\omega_3\omega_1(A_1 - A_3) + \alpha_3\omega_1\omega_2(A_2 - A_1)),\\ a_1 = \Gamma(\omega_2 e_3 - \omega_3 e_2) - \Gamma(\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3)(\alpha_2 e_3 - \alpha_3 e_2) \quad (123),\\ b_1 = \omega_1(e_2\omega_2 + e_3\omega_3) - e_1(\omega_2^2 + \omega_3^2) -\\ -(\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3)(\alpha_1(e_2\omega_2 + e_3\omega_3) - e_1(\alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3)) \quad (123),\end{gathered} \tag{8}$$

запишем второе уравнение (6) и второе уравнение (7) в виде

$$a_0 + a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 = 0, \qquad b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 = 0,$$

откуда, предположив, что

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{9}$$

найдем

$$\nu_1 = \frac{-a_0b_2 + \nu_3(a_2b_3 - a_3b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}\ , \quad \nu_2 = \frac{a_0b_1 + \nu_3(a_3b_1 - a_1b_3)}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Подставив найденные выражения для ν_1, ν_2 в интеграл $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$, получим квадратное уравнение для ν_3. Для существования равномерных вращений вокруг наклонной оси необходимо, чтобы это уравнение выполнялось тождественно, что приводит к следующей системе условий

$$a_0^2(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0,$$

$$a_0a_3(b_1^2 + b_2^2) - a_0b_3(a_1b_1 + a_2b_2) = 0,$$

$$(a_3b_2 - a_2b_3)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0.$$

Последнее из этих условий, вследствие предположения (9), не выполняется, следовательно, необходимо принять $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Проведя аналогичные рассуждения, получаем, что $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (123), то есть коэффициенты a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$ пропорциональны

$$a_1 = kb_1\ , \quad a_2 = kb_2\ , \quad a_3 = kb_3 \tag{10}$$

и, кроме того, выполнено условие

$$a_0 = 0. \tag{11}$$

Умножив соотношения (10) на ω_1, ω_2, ω_3 соответственно и сложив, получим

$$(\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3)(e_1(\omega_2\alpha_3 - \omega_3\alpha_2) + e_2(\omega_3\alpha_1 - \omega_1\alpha_3) + e_3(\omega_1\alpha_2 - \omega_2\alpha_1)) = 0. \tag{12}$$

Выполнение условий (11) и (12) одновременно возможно в следующих двух случаях.

1. $a_0^{(1)} = \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3 = 0$. Тогда из трех соотношений (10) независимы только два, например: $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$. Переписав их в виде

$$k(\omega_2^2 + \omega_3^2)e_1 - (\omega_3 + k\omega_1\omega_2)e_2 = (k\omega_1\omega_3 - \omega_2)e_3,$$

$$(\omega_3 - k\omega_1\omega_2)e_1 + k(\omega_1^2 + \omega_3^2)e_2 = (\omega_1 + k\omega_2\omega_3)e_3,$$

найдем решение полученной системы $e_1 = e_3\omega_1/\omega_3$, $e_2 = e_3\omega_2/\omega_3$. Отсюда следует, что $\omega_i = \omega e_i$, где $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, $i = 1, 2, 3$, причем

$$\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 = 0. \tag{13}$$

2. $a_0^{(2)} = \alpha_1\omega_2\omega_3(A_3 - A_2) + \alpha_2\omega_3\omega_1(A_1 - A_3) + \alpha_3\omega_1\omega_2(A_2 - A_1) = 0, \quad (14)$

$$e_1(\omega_2\alpha_3 - \omega_3\alpha_2) + e_2(\omega_3\alpha_1 - \omega_1\alpha_3) + e_3(\omega_1\alpha_2 - \omega_2\alpha_1) = 0. \tag{15}$$

Условие (15) означает, что векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ компланарны, тогда положим

$$\omega_i = c\alpha_i + de_i\ , \qquad i = 1, 2, 3.$$

Подставив эти соотношения в первые два из условий (10), получим систему

$$d(e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+e_3\alpha_3)[(\alpha_2 e_3-\alpha_3 e_2)-k(\alpha_1 e_2-\alpha_2 e_1)(c\alpha_2+de_2)-$$
$$-k(\alpha_1 e_3-\alpha_3 e_1)(c\alpha_3+de_3)]=0, \tag{16}$$
$$d(e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+e_3\alpha_3)[(\alpha_3 e_1-\alpha_1 e_3)-k(\alpha_2 e_3-\alpha_3 e_2)(c\alpha_3+de_3)-$$
$$-k(\alpha_2 e_1-\alpha_1 e_2)(c\alpha_1+de_1)]=0.$$

Совместность условий (16) возможна в следующих случаях.

2.1 $d=0$, а это означает, что

$$\omega_i=\omega\alpha_i\,,\quad i=1,2,3\,,\quad \text{где}\quad \omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\,. \tag{17}$$

2.2 $e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+e_3\alpha_3=0.$ (18)

Векторы $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}$ ортогональны, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ вследствие (15), лежит в одной с ними плоскости и, кроме того, принадлежит конусу Штауде (14).

2.3 Обе квадратные скобки в системе (16) равны нулю. Это дает линейную систему для определения коэффициентов c и d, определитель которой $\triangle=k^2(\alpha_1 e_2-\alpha_2 e_1)(1-(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3)^2)$. Исключив случаи, когда $k=0$ либо векторы $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}$ коллинеарны, получаем, что коэффициенты c, d разложения $\boldsymbol{\omega}$ определяются однозначно. Исключенные случаи приводят к уже рассмотренным.

3. Достаточные условия. Достаточные условия существования равномерных вращений вокруг наклонной оси получим, отождествив уравнения (6) по λ и $\boldsymbol{\nu}$. Для этого уравнения (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} c_0+c_1\lambda+c_2\nu_1+c_3\nu_2+c_4\nu_3=0,\\ a_0+a_1\nu_1+a_2\nu_2+a_3\nu_3=0, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$c_0=\beta_1\omega_2\omega_3(A_3-A_2)+\beta_2\omega_1\omega_3(A_1-A_3)+\beta_3\omega_1\omega_2(A_2-A_1),$$
$$c_1=\beta_1(\omega_2\alpha_3-\omega_3\alpha_2)+\beta_2(\omega_3\alpha_1-\omega_1\alpha_3)+\beta_3(\omega_1\alpha_2-\omega_2\alpha_1),$$
$$c_2=\Gamma(\beta_3 e_2-\beta_2 e_3),\quad c_3=\Gamma(\beta_1 e_3-\beta_3 e_1),\quad c_4=\Gamma(\beta_2 e_1-\beta_1 e_2),$$

и a_i представлены формулами (8).

Обращение в тождества уравнений (19) возможно в следующих двух случаях

1. $\beta_1 e_3-\beta_3 e_1=0,\qquad \omega_1 e_3-\omega_3 e_1=0\;\;(123),\quad \omega_1\alpha_1+\omega_2\alpha_2+\omega_3\alpha_3=0,$

$$\beta_1\omega_2\omega_3(A_3-A_2)+\beta_2\omega_1\omega_3(A_1-A_3)+\beta_3\omega_1\omega_2(A_2-A_1)=0,$$

$$\beta_1(\omega_2\alpha_3-\omega_3\alpha_2)+\beta_2(\omega_3\alpha_1-\omega_1\alpha_3)+\beta_3(\omega_1\alpha_2-\omega_2\alpha_1)=0.$$

Отсюда имеем

$$\omega_i=\omega e_i\,,\quad \text{где}\quad \omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\,,\quad \beta_i=e_i\,,\quad i=1,2,3\,. \tag{20}$$

Учитывая (13), делаем вывод, что условия (20) являются необходимыми и достаточными для существования равномерных вращений системы вокруг наклонной оси.

2. $\beta_1 e_3 - \beta_3 e_1 = 0 \quad (123), \omega_1 e_2 - \omega_2 e_1 - (\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3)(\alpha_1 e_2 - \alpha_2 e_1) = 0 \quad (123),$

$$\beta_1\omega_2\omega_3(A_3 - A_2) + \beta_2\omega_1\omega_3(A_1 - A_3) + \beta_3\omega_1\omega_2(A_2 - A_1) = 0\ ,$$

$$\alpha_1\omega_2\omega_3(A_3 - A_2) + \alpha_2\omega_1\omega_3(A_1 - A_3) + \alpha_3\omega_1\omega_2(A_2 - A_1) = 0\ ,$$

$$\beta_1(\omega_2\alpha_3 - \omega_3\alpha_2) + \beta_2(\omega_3\alpha_1 - \omega_1\alpha_3) + \beta_3(\omega_1\alpha_2 - \omega_2\alpha_1) = 0\ .$$

Изучая совместность выполнения полученных соотношений, получаем, что достаточно рассмотреть такие два варианта.

2.1 $\quad \omega_i = \omega\alpha_i, \ \ \beta_i = e_i,$ где $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}, \ \ i = 1, 2, 3\ ,$

$$e_1\alpha_2\alpha_3(A_2 - A_3) + e_2\alpha_1\alpha_3(A_3 - A_1) + e_3\alpha_1\alpha_2(A_1 - A_2) = 0. \tag{21}$$

2.2 $\quad e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3 = 0$, вектор $\boldsymbol{\omega}$ лежит в плоскости ортогональных векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, и, кроме того, принадлежит конусам

$$\begin{gathered} e_1\omega_2\omega_3(A_3 - A_2) + e_2\omega_1\omega_3(A_1 - A_3) + e_3\omega_1\omega_2(A_2 - A_1) = 0\ , \\ \alpha_1\omega_2\omega_3(A_3 - A_2) + \alpha_2\omega_1\omega_3(A_1 - A_3) + \alpha_3\omega_1\omega_2(A_2 - A_1) = 0\ . \end{gathered} \tag{22}$$

Принимая во внимание (17), (18), можно сделать вывод, что условия (21) и (22) дают дополнительно к (20) два набора необходимых и достаточных условий существования равномерных вращений вокруг наклонной оси. Для окончательного решения остается изучить случай 2.3 необходимых условий.

4. Решение и геометрическая интерпретация. Найдем решения уравнений (1), (2) для случаев (20), (21). С этой целью подставим условия (20) во второе уравнение (2) и, проинтегрировав, получим

$$\nu_1 = C_1 e_1 + (C_3 e_2 - C_2 e_1 e_3)\cos\omega t - (C_3 e_1 e_3 + C_2 e_2)\sin\omega t\ ,$$

$$\nu_2 = C_1 e_2 - (C_2 e_2 e_3 + C_3 e_1)\cos\omega t + (C_2 e_1 - C_3 e_2 e_3)\sin\omega t\ ,$$

$$\nu_3 = C_1 e_3 + (e_1^2 + e_2^2)(C_2\cos\omega t + C_3\sin\omega t)\ ,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Аналогично для решения (21) получаем

$$\nu_1 = C_1\alpha_1 + (C_3\alpha_2 - C_2\alpha_1\alpha_3)\cos\omega t - (C_3\alpha_1\alpha_3 + C_2\alpha_2)\sin\omega t,$$

$$\nu_2 = C_1\alpha_2 - (C_2\alpha_2\alpha_3 + C_3\alpha_1)\cos\omega t + (C_2\alpha_1 - C_3\alpha_2\alpha_3)\sin\omega t,$$

$$\nu_3 = C_1\alpha_3 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(C_2\cos\omega t + C_3\sin\omega t).$$

Найдем положения вектора угловой скорости в неподвижном пространстве. Для этого вычислим его осевую и радиальную компоненты [2]. Для первого решения имеем

$$\omega_\zeta = \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3\nu_3 = \omega C_1,$$

$$\omega_\rho^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_\zeta^2 = \omega^2(1 - C_1^2).$$

Аналогично для второго решения имеем

$$\omega_\zeta = \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3\nu_3 = \omega C_1,$$

$$\omega_\rho^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_\zeta^2 = \omega^2(1 - C_1^2).$$

Таким образом, вращение происходит вокруг наклонной оси, составляющей с вертикалью угол α, $\sin\alpha = \omega_\zeta/\omega = C_1$, где C_1 - постоянная, удовлетворяющая для первого решения соотношению

$$C_1^2 + (e_1^2 + e_2^2)(C_2^2 + C_3^2) = 1,$$

и для второго решения соотношению

$$C_1^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(C_2^2 + C_3^2) = 1.$$

1. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. - Киев: Наук. думка, 1980. - 174 с.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. - Новосибирск : Изд-во НГУ, 1965. - 221 с.
3. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений// Механика твердого тела. - 1974.- Вып. 6.- С. 15-24.
4. *Kovaleva L. M.* Investigation of permanent rotations of the rigid body with fixed point, carrying one - and two - degree gyros // XXII Yugoslav congress of theoretical and applied mechanics. -Vrnjacka Banja, 1997. - P. 61-64.
5. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt// J. reine und angew. Math. - 1894. - **113**, H. 4. - S. 318-334

Донецкий гос. ун-т,

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 14.12.99

УДК 531.38

©2000. **А.А. Савченко**

ГОЛОНОМНАЯ СВЯЗЬ, РЕАЛИЗУЮЩАЯ СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В работах [1–3] при моделировании вращения специально закрепленного тяжелого гибкого вала исследована модель, представляющая собой систему двух тяжелых гироскопов Лагранжа, связанных таким образом, что движение одного из них симметрично движению другого относительно плоскости, проходящей через их общую точку и перпендикулярной вектору вертикали. При этом вопрос о реализации такого движения посредством голономной связи не обсуждался. В настоящей работе указывается такая голономная связь, организованная с помощью сферических и цилиндрических шарниров.

Рассмотрим механическую систему [2], состоящую из двух абсолютно твердых тел S и S', связанных между собой в общей точке O' (как на рисунке). Тело S имеет неподвижную точку O, а принадлежащая телу S' точка O'' во все время движения остается на оси, определяемой некоторым единичным вектором γ. Предположим, что в точках O, O' и O'' находятся идеальные сферические шарниры. Кроме этого, полагаем, что $|OO'| = |O'O''| = l$.

Свяжем движение тел S и S' с помощью дисков $CQDP, C'Q'D'P'$ и составной штанги $PQP'Q'$ (см. рисунок), которые в дальнейшем предполагаются невесомыми. Тело S' и диск $C'Q'D'P'$ соединены с помощью цилиндрического шарнира, допускающего поворот диска относительно тела вокруг оси $C'D'$. Точка $A \in O'O'' \subset S'$ является геометрической серединой отрезка $C'D'$. Аналогичным образом связаны диск $CQDP$ и тело S, где $B \in OO' \subset S$ – геометрическая середина отрезка CD, причем $|OB| = |O''A| = l^*$.