3. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Условия идентифицируемости нелинейных механических систем // Механика твердого тела. - 1984. - Вып.16. - С. 77-91.
4. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. - Киев: Наук. думка, 1993. - 285 с.
5. *Коробов В.И.* Сведение задачи управляемости к граничной задаче // Дифференциальные уравнения. - 1976. - т XII. - N7. - С. 1310-1313.
6. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. - 1974. - Вып.6. - С. 15-24.
7. *Щербак В.Ф.* Условия идентифицируемости нелинейных механических систем с известным начальным состоянием // Там же. - 1985. - Вып.17. - С. 77-91.
8. *Isidori A.* Nonlinear control systems. - Berlin.– Springer-Verlag.–1985. – p.297.
9. *Fliess M.* A note on the invertibility of nonlinear input- output systems// Systems and Control Letters.– 1986.– vol.8.– N 2.– pp. 147–152.
10. *Hirschorn R.M.* Invertibility of multivariable nonlinear control systems // IEEE Trans.Autom. Control.– 1979. – v.AC-24.–N 6. – pp. 855–860.
11. *Silverman L.M.* Inversion of multivariable linear systems//IEEE Trans. Autom. Control. – 1969. – v.AC-14.–N 3.– pp. 270–276.
12. *Singh S.N.* A modified algorithm for invertibility of nolinear systems// IEEE Trans.Autom. Control. – 1981. – v.AC-28.–N 9. – pp. 595-598.

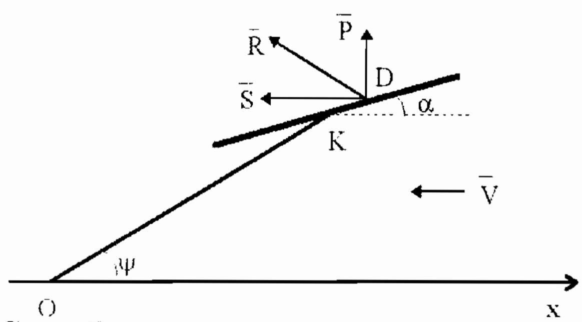
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 14.09.99

УДК 531.38

©2000. **А.А. Илюхин, С.А. Ступко**

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Рассматривается равновесие упругого стержня при плоском изгибе, который происходит под воздействием потока воздуха на пластинку, жестко прикрепленную к стержню. Построена приближенная зависимость угла атаки от скорости набегающего потока. Найдена скорость потока, при которой он оказывает на пластинку стабилизирующее воздействие.



Рассмотрим систему, представляющую собой жестко закрепленный в точке O упругий стержень, к которому в точке K на прямой симметрии пластинки жестко прикреплена пластинка. Тело помещено в поток воздуха, движущийся со скоростью $\boldsymbol{V}$ параллельно оси Ox (см. рисунок).

Силу $\boldsymbol{R}$ воздействия потока на пластинку представляют в виде суммы двух векторов [1]:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{P}, \quad \text{где } \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\rho s(\alpha) V\boldsymbol{V} \ – \text{ сила сопротивления},$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\rho p(\alpha)(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{V}) – \text{ подъемная сила},$$

ρ — плотность воздуха, α — угол атаки, то есть угол, который составляет вектор $\boldsymbol{V}$ с плоскостью пластинки, $\boldsymbol{j}$ — единичный вектор, лежащий в плоскости пластинки перпендикулярно скорости потока $\boldsymbol{V}$.

Функции $s(\alpha), p(\alpha)$ зависят от формы пластинки и определяются экспериментально. Общие свойства этих функций таковы, что $s(\alpha) \geq s(0) > 0$, а $p(\alpha)$ меняет свой знак при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$. Точку пересечения линии действия силы с плоскостью пластинки обозначим D и назовем центром давления. Тогда к стержню, кроме силы $\boldsymbol{R}$, приложен момент

$$M = \frac{1}{2}\rho d(\alpha)p(\alpha)V\cos\alpha + \frac{1}{2}\rho d(\alpha)s(\alpha)V^2\sin\alpha, \tag{1}$$

$d(\alpha)$ — расстояние от центра давления до точки крепления пластинки. Через $\psi(l)$ и $\theta(l)$ обозначены соответственно углы наклона касательной недеформированного и деформированного стержня к оси x (l — длина дуги от точки O до текущей точки на стержне, в которой проведена касательная). В точке крепления стержня с основанием $\psi = \psi_0$, а в точке крепления стержня с пластинкой $\psi = \psi_K$.

Для записи уравнения равновесия необходимо знать проекцию внешних сил на направление касательной к оси стержня $\boldsymbol{\tau}$ и нормали $\boldsymbol{n}$. Введем единичные векторы $\boldsymbol{j}_V$ — вдоль скорости, $\boldsymbol{j}_P$ — вдоль подъемной силы:

$$\boldsymbol{j}_V = -\boldsymbol{\tau}\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta, \quad \boldsymbol{j}_P = \boldsymbol{\tau}\sin\theta + \boldsymbol{n}\cos\theta,$$

$$\boldsymbol{S} = \Big(-\frac{1}{2}\rho sV^2\cos\theta\Big)\boldsymbol{\tau} + \Big(\frac{1}{2}\rho sV^2\sin\theta\Big)\boldsymbol{n}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{P} = \Big(\frac{1}{2}\rho pV\sin\theta\Big)\boldsymbol{\tau} + \Big(\frac{1}{2}\rho pV\cos\theta\Big)\boldsymbol{n}. \tag{3}$$

Воспользуемся точным уравнением упругого равновесия при плоском изгибе и для первоначально прямого стержня ($\psi = \mathrm{const}$) постоянного сечения ($B = \mathrm{const}$) запишем уравнение равновесия в виде

$$\frac{dM_3}{dl} + R_2 = 0. \tag{4}$$

Здесь $M_3 = B\chi$ — проекция внутреннего момента на бинормаль, $\chi = \dfrac{d\theta}{dl}$; R_2 - проекция силы $\boldsymbol{R}$ на нормаль. С учетом (2) и (3) получим

$$B\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{1}{2}\rho sV^2\sin\theta + \frac{1}{2}\rho pV\cos\theta = 0. \tag{5}$$

Умножим обе части (5) на $d\theta/dl$ и проинтегрируем по l:

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho sV^2\cos\theta + \frac{1}{2}\rho pV\sin\theta - C = 0,$$

$$l = \sqrt{B}\int\limits_{\psi_0}^{\theta}\Big(\rho s(\alpha)V^2\cos\theta - \rho p(\alpha)V\sin\theta + C\Big)^{-\frac{1}{2}}d\theta.$$

Если записать уравнение (5) относительно изменения угла наклона касательной к оси стержня $\nu = \theta - \psi$, то это уравнение и его интеграл примут вид

$$\begin{aligned} &B\frac{d^2\nu}{dl} + \frac{1}{2}\rho sV^2\sin(\psi+\nu) + \frac{1}{2}\rho pV\cos(\psi+\nu) = 0,\\ &B\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2 - \rho sV^2(\cos\psi\cos\nu - \sin\psi\sin\nu) + \rho pV(\sin\psi\cos\nu + \cos\psi\sin\nu) - C = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия в нашей задаче таковы:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad l = 0: \quad \nu = 0\,, \\ &\text{при} \quad l = L: \quad B\frac{d\nu}{dl}\bigg|_K = M. \end{aligned} \tag{7}$$

Используя граничное условие при $l = L$

$$M^2 = B\Big(\rho s V^2 \cos(\psi + \nu_K) - \rho p V \sin(\psi + \nu_K) + C\Big),$$

можно найти C из второго уравнения (6), привлекая (1),

$$C = \frac{1}{4B}\rho^2 d^2 (pV\cos\alpha + sV^2 \sin\alpha)^2 - \rho s V^2 \cos(\psi + \nu_K) + \rho p V \sin(\psi + \nu_K).$$

Предположим, что решение граничной задачи (6), (7) представимо в виде степенного ряда по V:

$$\nu(l) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(l) V^n. \tag{8}$$

Наша задача — получить зависимость угла атаки от скорости набегающего потока: $\alpha = \alpha_0 + \nu_K$, где α_0 определяет начальное положение пластинки, ν_K — изменение угла атаки в точке K.

Заменим в уравнении (6) $\cos\nu$ и $\sin\nu$ их разложениями в ряд по степеням ν:

$$\begin{aligned} B\frac{d^2\nu}{dl^2} + \frac{1}{2}\rho V\Big(sV\sin\psi + p\cos\psi\Big)\left(1 - \frac{\nu^2}{2!} + \frac{\nu^4}{4!} - \ldots\right) + \\ + \frac{1}{2}\rho V\Big(sV\cos\psi - p\sin\psi\Big)\left(\nu - \frac{\nu^3}{3!} + \frac{\nu^5}{5!} - \ldots\right) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Далее, подставим ряд (8) в (9) и, удерживая при этом члены до третьего порядка включительно, придем к тождеству

$$\frac{1}{2}\rho \sum_{j=1}^{3} q_j V^j = 0.$$

Выпишем коэффициенты при соответствующих степенях V:

$$\begin{aligned} V: &\quad q_1 = \frac{2B}{\rho}\frac{d^2\mu_1}{dl^2} + p\cos\psi = 0; \\ V^2: &\quad q_2 = \frac{2B}{\rho}\frac{d^2\mu_2}{dl^2} - p\mu_1 \sin\psi + s\sin\psi = 0; \\ V^3: &\quad q_3 = \frac{2B}{\rho}\frac{d^2\mu_3}{dl^2} - \frac{1}{2}p\mu_2^2\cos\psi + s\mu_1\cos\psi - p\mu_2\sin\psi = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Найдем коэффициенты μ_n $(n = 1, 2, 3)$, используя дифференциальные уравнения (10) и граничные условия (7). Из (7) следуют граничные условия на функции μ_n.

$$\text{При } l = 0: \quad \mu_n = 0, \; n = 1, 2, 3.$$

$$\text{При } l = L: \quad \frac{d\mu_1}{dl} = \frac{\rho}{2B} dp \cos\alpha_0;$$

$$\frac{d\mu_2}{dl} = \frac{\rho}{2B} d(s - p\mu_1)\sin\alpha_0;$$

$$\frac{d\mu_3}{dl} = \frac{\rho}{2B} d\Big[\Big(s - \frac{p}{2} m u_1\Big)\mu_1 \cos\alpha_0 - p\mu_2 \sin\alpha_0\Big].$$

Теперь, имея дифференциальные уравнения второго порядка (10) и два граничных условия для каждого уравнения, можем найти коэффициенты ряда (8). Таким образом может быть получена приближенная зависимость угла атаки от скорости набегающего потока: $\alpha = \alpha_0 + \mu_1 V + \mu_2 V^2 + \mu_3 V^3$, где все μ_n $(n = 1, 2, 3)$ вычислены при $l = L$:

$$\mu_1 = \frac{\rho}{2B} p\Big(\cos\psi \frac{L^2}{2} + d\cos\alpha_0 L\Big),$$

$$\mu_2 = \Big(\frac{\rho}{2B}\Big)^2 p^2 \cos\psi \sin\psi \frac{11}{4!} L^4 + \Big(\frac{\rho}{2B}\Big)^2 p^2 d\Big[\sin\psi\cos\alpha_0 - 3\sin(\alpha_0 - \psi)\Big]\frac{L^3}{3!} +$$
$$+ \frac{\rho}{2B}\Big(s\sin\psi - \frac{\rho}{2B} p^2 d^2 \sin 2\alpha_0\Big)\frac{L^2}{2!} + \frac{\rho}{2B} sd\sin\alpha_0 L,$$

$$\mu_3 = \Big(\frac{\rho}{2B}\Big)^3 p^3 \cos\psi\Big(146\cos^2\psi - 179\Big)\frac{L^6}{6!} +$$
$$+ \Big(\frac{\rho}{2B}\Big)^3 p^3 d\Big(11\cos^3\psi\cos\alpha_0 - 44\cos\alpha_0 - \frac{15}{2}\sin\alpha_0\sin 2\alpha_0\Big)\frac{L^5}{5!} +$$
$$+ \Big(\frac{\rho}{2B}\Big)^2 p\Big[\frac{\rho}{2B} p^2 d^2\Big(12 - 27\cos^2\alpha_0\Big)\cos\psi + s(18\cos^2\psi - 13)\Big]\frac{L^4}{4!} +$$
$$+ \Big(\frac{\rho}{2B}\Big)^2 pd\Big[\frac{\rho}{2B} p^2 d^2\Big(6\cos\alpha_0 - 9\cos^3\alpha_0\Big) +$$
$$+ s\Big(5\cos(\alpha_0 + \psi) - 2\sin\alpha_0\sin\psi\Big)\Big]\frac{L^3}{3!} +$$
$$+ \Big(\frac{\rho}{2B}\Big)^2 psd^2\Big(2\cos^2\alpha_0 - 1\Big)L^2.$$

Поток оказывает стабилизирующее воздействие на пластинку, если с ростом скорости потока воздуха угол атаки уменьшается. Укажем скорости, при которых реализуется разделяющий случай:

$$V_1 = \frac{-\mu_2 + \sqrt{\mu_2^2 - 3\mu_3\mu_1}}{3\mu_3}, \quad V_2 = \frac{-\mu_2 - \sqrt{\mu_2^2 - 3\mu_3\mu_1}}{3\mu_3},$$

здесь V_2, V_2 — скорости, при которых $d\alpha/dV = 0$.

1. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 86с.
2. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Физматгиз, 1986. – 296 с.

Таганрогский гос. пед. ин-т, Таганрог Получено 25.11.99