

$$u_2 = -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3 - \left\{ \frac{|A_1 - A_2|}{2A_1}|\omega_3| + \varepsilon A_2 \right\} \omega_2, \quad (\varepsilon > 0). \quad (16)$$

Таким образом, с помощью теорем 1,2 получена обратная связь (16), решающая задачу стабилизации решения (10) системы (8),(9) по отношению к переменным (11). Заметим, что поскольку $\dot{W} \leq 0$, то решение (10) системы с обратной связью (16) устойчиво по Ляпунову. Кроме того, асимптотическая устойчивость по переменным (11) сохраняется и при больших начальных возмущениях ω_3 .

1. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.:Наука, 1975. – 496с.
2. *Ковалев А.М., Исса Салем Абдалла* Стабилизация равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикладная механика. – 1992. – **28(38)**, N 9. – С.73-79.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256с.
4. *Aeyels D., Szafranski M.* Comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters. – 1988. – **10**. – P. 35-39.
5. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis, TMA. – 1983. – **7**, N 11. – P. 1163-1173.
6. *Astolfi A., Rapaport A.* Robust stabilization of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters. – 1998. – **34**. – P. 257-264.
7. *Bacciotti A., Ceragioli F.* Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. – 1999. – **4**. – P. 361-376.
8. *Jurdjevic V., Quinn J.P.* Controllability and stability // Journal of Differential Equations. – 1978. – **28**. – P. 381-389.
9. *Lin Y., Sontag E.D.* A universal formula for stabilization with bounded controls // Systems and Control Letters. – 1991. – **16**. – P. 393-397.
10. *Sontag E.D., Sussmann H.J.* Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters. – 1989. – **12**. – P. 213-217.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 27.10.99

УДК 531.38

©2000. В.Ф. Щербак

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБРАТНЫХ СИСТЕМ

Задача управления нелинейной системой вход-выход рассматривается с позиций метода обратных задач в теории управления. В [2] предложена общая схема получения обратного представления любой системы управления. В статье используются два получающихся при этом вида обратного описания для задачи управления угловой скоростью твердого тела.

1. Обратные задачи управления. Рассмотрим систему вход-выход, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0 \in D \subseteq R^n, \quad (1)$$

на любом решении которой известны значения функции времени

$$y = h(x). \quad (2)$$

Здесь $x = (x^1, \dots, x^n)$ – фазовый вектор, $u = (u^1, \dots, u^m)$ – управление (вход), $y = (y^1, \dots, y^k)$ – выход системы (1). Функции f, h, u считаются достаточное число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов. Система (1), (2) порождает передаточное отображение

$$x_0, u \rightarrow x(t) = x(t, x_0, u) \rightarrow y(t),$$

при котором неизвестной функции $u(t)$ соответствует известный выход $y(t)$.

Во многих задачах управления возникает необходимость обращения этого отображения. Это задачи, связанные с определением по информации о выходе $y(t)$ неизвестных компонент системы : состояния $x(t)$ (задача наблюдения), входного воздействия $u(t)$ (задачи идентификации, обращения системы). Одним из эффективных способов их решения являются обратные системы, впервые предложенные для линейных систем в работе [11] и обобщенные на нелинейные системы в [10] (см. также [7,9,12]). С их помощью можно получить способ определения входного воздействия, порождающего заданный выход. Понятия обратных систем тесно связаны и с вопросами определения линеаризующей обратной связи, описания отображения вход-выход с помощью дифференциальных уравнений "внутренней" динамики [8]. В [3] получены критерии разрешимости указанных задач в терминах теории инвариантных соотношений, образуемых изучаемой системой на любом ее решении. При этом использован разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [6], распространенный в [1] и на задачи управления. Показано, что привлечение измерений, полученных на множестве траекторий, существенно расширяет класс систем, для которых обратные задачи имеют решение. В частности, при измерении всего фазового вектора, задача определения управления, порождающего заданное движение на множестве траекторий, сводится к чисто алгебраической и имеет решение для любой системы (1).

Применение перечисленных результатов подразумевает, что система (1),(2) обладает свойствами обратимости по одной либо по множеству траекторий. В работе [2], вне зависимости от наличия этих свойств, разработана схема обратного представления для любой системы управления. Всякой системе (1),(2) сопоставлена система в общем случае алгебраических и дифференциальных уравнений, связывающих состояние системы, компоненты векторов входа, выхода и их производных. В связи с этим возникает вопрос об использовании обратного представления системы и в других задачах управления. Так, например, в работах [1,5] найдены достаточные условия решения двухточечной задачи управления для некоторых классов нелинейных систем, а также указан способ сведения ее к граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. В основе этого способа лежит преобразование переменных x системы (1), зависящее в общем случае от функции $u(t)$ и ее производных, которое переводит систему (1) в линейную управляемую систему. В результате решение задачи управляемости сводится к решению задачи управления для образа системы (1) и обращению соответствующего отображения. Подобные отображения возникают и при решении обратных задач для системы (1). В данной работе обратное описание используется для управления угловой скоростью вращения твердого тела под действием двух управляющих моментов.

Введем в рассмотрение расширенный вектор измерений, составленный из компонент вектор-функций (2) и их производных до порядка $n - 1$ включительно, взятых в

силу системы (1)

$$y_1^i = h^i(x) = h_1^i(x), \quad y_{s_i}^i = \frac{\partial h_{s_i-1}^i}{\partial x} f^i(x, u) = h_{s_i}^i(x, u),$$

$$y_n^i = \frac{\partial h_{n-1}^i}{\partial x} f^i(x, u) + \frac{\partial h_{n-1}^i}{\partial u} \dot{u} + \dots + \frac{\partial h_{n-1}^i}{\partial u^{(n-s_i-1)}} u^{(n-s_i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

Числа s_i , ($i = 1, 2, \dots, k$), определяющие минимальный порядок производной от функции $h_i(x)$, при котором она будет явно зависеть от $u(t)$, являются компонентами вектора относительно порядка [7] функции (2).

Обозначим $z = (y_1^1, \dots, y_n^k)$, $H = (h_1^1, \dots, h_n^k)$, $v = (\dot{u}^1, \dots, u^{(n-s_1)1}, \dot{u}^2, \dots, u^{(n-s_2)2}, \dot{u}^m, \dots, u^{(n-s_m)m})$. Тогда равенства (3) можно переписать в векторном виде

$$z = H(x, u, v). \quad (4)$$

Соотношения (4) связывают явным образом переменные x , u , v исходной модели (1), (2) и производные от функций u (вектор v) и y (вектор z).

2. Алгоритм построения обратной системы. В работе [2] предложена общая схема построения обратных систем, которая позволяет сопоставить любой системе управления ее обратное представление, имеющее в общем случае вид системы алгебраических и дифференциальных уравнений. Ниже для задач управления угловой скоростью твердого тела будут использованы два представления, являющиеся частными случаями такого обратного описания. Приведем основные моменты этой схемы.

На первом шаге вычислим производные

$$y_1^{(s_i)} = h_{is_i}(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5)$$

содержащие явно параметр u , при этом производные порядка $s_i - 1$ явно от параметра u не зависят. Пусть среди функций (5), рассматриваемых как функции переменной u , имеется $k_1 \leq k$ независимых, для определенности $y_1^{(s_1)}, \dots, y_{k_1}^{(s_{k_1})}$, а остальные от них зависят. Разрешив уравнения $y_1^{(s_i)} = h_{is_i}(x, u)$, ($i = 1, 2, \dots, k_1$) относительно u_1, \dots, u_{k_1} (при необходимости можно изменить нумерацию u_i) и подставив найденные величины в оставшиеся уравнения (5) и систему (1), получим

$$u_i = \phi(x, y_1^{(s_1)}, \dots, y_{k_1}^{(s_{k_1})}, u_{k_1+1}, \dots, u_m), \quad i = 1, \dots, k_1, \quad (6)$$

$$y_j^{(s_j)} = \Phi_{js_j}(x, y_1^{(s_1)}, \dots, y_{k_1}^{(s_{k_1})}), \quad i = k_1 + 1, \dots, k, \quad (7)$$

$$\dot{x} = f_1(x, y_1^{(s_1)}, \dots, y_{k_1}^{(s_{k_1})}, u_{k_1+1}, \dots, u_m). \quad (8)$$

При этом в формулах (7), (8) функции $y_1^{(s_1)}, \dots, y_{k_1}^{(s_{k_1})}$ рассматриваются как функции времени t , т.е. аргументами функций Φ_{js_j} являются t , x , а аргументами функций $f_1 - t$, x , u_{k_1+1}, \dots, u_m . Предполагаем, что в результате процедуры исключения переменных u_1, \dots, u_{k_1} полученные функции Φ_{js_j} , f_1 являются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов.

Переходя ко второму шагу, в качестве исходной рассматриваем систему (8), входом которой является вектор (u_{k_1+1}, \dots, u_m) , а выходом – функции (7), и повторяем преобразования первого шага. Получение искомой системы заканчивается, когда на очередном

шаге производные функций (7) не содержат возмущающих переменных u_i . После конечного числа шагов (не более чем m) получаем

$$u = \phi(x, y, \dots, y^{(s)}, u_2), \quad (9)$$

$$\Phi_j(x, y, \dots, y^{(s_j)}) = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (10)$$

$$\dot{x} = \Phi(x, y, \dots, y^{(s)}, u_2), \quad (11)$$

где $u = (u_1, u_2)$, $u_1 \in W \subseteq R^{k-r}$, $u_2 \in V \subseteq R^{m+r-k}$ при необходимости нумерация может быть изменена. Функции Φ_j независимы и величины s_j в формулах (10) являются минимальными, для которых такие соотношения возможны. Это соглашение необходимо, поскольку дифференцирование соотношения (10) по t приводит к дополнительному равенству с увеличенными значениями s_j , что влечет неоднозначность определения величины r .

Таким образом в результате описанной процедуры последовательного исключения компонент вектора $u(t)$ мы получим $k = n$ независимых соотношений (10), рассматриваемых как система алгебраических уравнений относительно вектора $x(t)$. Тем самым задача определения состояния неопределенной системы (1) по значениям выхода и его производных сведена к чисто алгебраической задаче (10).

3. Использование множества траекторий. Как уже отмечалось, обратные задачи управления связаны с нахождением вектора $u(t)$, порождающего заданный выход. Теоретически для определения $u(t)$ может быть использована информация о выходе системы, полученная в результате проведения дополнительных экспериментов, т.е. вместо значений функции $h(x(t, x_0, u))$ используют "расширенный" вектор измерений

$$(h(x(t, x_0, u)), h(x(t, \xi_1, u)), \dots, h(x(t, \xi_\lambda, u))),$$

где $\xi_i = x_i(0)$ - начальное состояние фазового вектора в i -ом дополнительном эксперименте [3]. Такая постановка задач естественна, если u - вектор постоянных параметров. В случае, когда $u = u(t)$, следует учитывать, что его значения должны быть описаны одной и той же функцией времени в каждом из этих экспериментов.

Запишем "расширенную" систему, состоящую $\lambda + 1$ экземпляра исходной системы (1), (2)

$$\dot{x} = \tilde{F}(x, u), \quad (12)$$

$$\tilde{Y} = \tilde{H}(x, u), \quad x = (x_1, \xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_\lambda^T)^T, \quad (13)$$

где $\tilde{F}(x, u) = (f^T(x, u), f^T(\xi_1, u), \dots, f^T(\xi_\lambda, u))$, $\tilde{Y} = (y^T, y_1^T, \dots, y_\lambda^T)^T$, $\tilde{H} = (h^T(x), h^T(\xi_1), \dots, h^T(\xi_\lambda))$. В результате дифференцирования функций (13) получаем $\lambda + 1$ равенств

$$(z^T, z_1^T, \dots, z_\lambda^T) = (H^T(x, u, v), H^T(\xi_1, u, v), \dots, H^T(\xi_\lambda, u, v)). \quad (14)$$

Соотношения (14) содержат вектор x и дополнительные переменные $\xi_1, \dots, \xi_\lambda, u, v$. Для них может быть применена процедура исключения переменных $\xi_1, \dots, \xi_\lambda, u, v$, приведенная в предыдущем разделе. Остается вопрос о значениях дополнительных выходов $z_1(t), \dots, z_\lambda(t)$, так как на практике трудно гарантировать, чтобы в каждом из экспериментов значения $u(t)$ были одними и теми же. Рассмотрим задачу синтеза дополнительных измерений $h(x(t, \xi_i, u))$ по значениям функции $h(x(t, x_0, u))$.

Пусть для системы (1) известны значения выхода и его производных, соответствующие решению $x(t, x_0, u)$, где $x_0, u(t)$ – неизвестны. Рассмотрим возможность определения по этим данным измерений, которые получены на других решениях $\xi_i(t, \xi_{i0}, u)$, $\xi_{i0} \neq x_0$. Пусть для простоты $m = k = 1$, то есть $u(t), y(t)$ являются скалярными функциями и s – относительный порядок выхода. Тогда соотношения (4) можно переписать в виде

$$\dot{y}^1 = y^2, \dots, \dot{y}^{n-1} = y^n, \quad \dot{y}^n = G(y^1, y^2, \dots, y^n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\lambda)}), \quad (15)$$

где $\lambda = n - s$.

Обозначив $z_i^1 = h(\xi_i(t, \xi_{i0}, u))$ выход, соответствующий решению $\xi_i(t, \xi_{i0}, u)$, запишем λ систем вида (15)

$$\dot{z}_i^1 = z_i^2, \dots, \dot{z}_i^{n-1} = z_i^n, \quad \dot{z}_i^n = G(z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\lambda-1)}), \quad i = 1, \dots, \lambda. \quad (16)$$

Рассмотрим совокупность последних уравнений систем (15), (16) как систему алгебраических уравнений относительно $u, \dot{u}, \dots, u^{(\lambda)}$

$$y^{n+1} = \dot{y}^n = G(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(\lambda)}), \quad z_i^{n+1} = \dot{z}_i^n = G(z_i, u, \dot{u}, \dots, u^{(\lambda)}), \quad i = 1, \dots, \lambda. \quad (17)$$

Предположим, что система (17) имеет решение, задаваемое функциями

$$u^{(j)} = P_j(y, z_1, \dots, z_\lambda), \quad j = 0, 1, \dots, \lambda. \quad (18)$$

Будем рассматривать формулы (18) как иную форму записи уравнений (17), так как подстановка (18) в (17) обращает последние в тождественные равенства. Дифференцируя эти тождества по времени, получаем

$$\begin{aligned} \dot{y}^{n+1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial y^{(i)}} y^{(i+1)} + \sum_{j=0}^{\lambda} \frac{\partial G}{\partial u^{(j)}} u^{(j+1)} = R(y, z_1, \dots, z_\lambda, w), \\ \dot{z}_i^{(n+1)} &= R_i(y, z_1, \dots, z_\lambda, w), \quad i = 1, \dots, \lambda, \end{aligned} \quad (19)$$

где $w = u^{(\lambda+1)}$, вместо $u, \dot{u}, \dots, u^{(\lambda)}$ подставлены их значения, определяемые формулами (18).

Разрешив уравнения $\dot{y}^{(n+1)} = R(y_1, z_1, \dots, z_\lambda, w)$ относительно w и подставив $w(y^1, \dots, y^{(n+1)}, \dot{y}^{(n+1)}, z_1, \dots, z_\lambda)$ в оставшиеся уравнения (19), получаем, что измерения, полученные на различных траекториях системы (1) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i^1 = z_i^2, \dots, \dot{z}_i^n = z_i^{n+1}, \quad \dot{z}_i^{n+1} = Q(y, z_1, z_2, \dots, z_\lambda). \quad (20)$$

Управлением в системе (20) является выход $y^1(t)$ и его производные $y^2(t), \dots, y^{n+2}(t)$, которые считаются известными. Тогда задача определения значений функции (2) на различных решениях системы (1) сводится к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений (20). Для нахождения начальных условий потребуем, чтобы величины $u^1(0), \dots, u^\lambda(0)$ были известны. Тогда по формулам (4) определяем $z_i(0) = H(\xi_i(0), u(0), \dots, u^\lambda(0))$.

4. Обратные системы в задаче управления угловой скорости твердого тела. Рассмотрим уравнения Эйлера, описывающие изменения угловой скорости вращения абсолютно твердого тела в жестко связанной с телом системе координат, оси которой направлены по главным осям эллипсоида инерции:

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 + u_1, \quad \dot{\omega}_2 = a_2\omega_1\omega_3 + u_2, \quad \dot{\omega}_3 = a_3\omega_1\omega_2, \quad (21)$$

здесь

$$a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}, \quad a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3},$$

где A_i – главные центральные моменты инерции тела, ω_i – проекции вектора угловой скорости тела на главные центральные оси ($i = 1, 2, 3$), u_1, u_2 , – управляющие моменты.

Рассмотрим для системы (21) двухточечную задачу управления: определить управляющие моменты $u_1(t), u_2(t)$ для $t \in [0, t_f]$ таким образом, чтобы $\omega_i(0) = \omega_i^0$ и $\omega_i(t_f) = \omega_i^f$ ($i = 1, 2, 3$).

Зададим функции $\omega_1(t), \omega_2(t)$ такими, чтобы $\omega_i(0) = \omega_i^0$ и $\omega_i(t_f) = \omega_i^f$, ($i = 1, 2$). При этом порождающие это движение и подлежащие определению моменты $u_1(t), u_2(t)$ должны быть таковы, что $\omega_3(0) = \omega_3^0$ и $\omega_3(t_f) = \omega_3^f$.

Обозначим $y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2$, тогда

$$y_3 = \dot{y}_1 = a_1y_2\omega_3 + u_1, \quad y_4 = \dot{y}_2 = a_2y_1\omega_3 + u_2, \quad (22)$$

$$y_5 = \dot{y}_3 = a_1y_4\omega_3 + a_1a_3y_1y_2^2 + \dot{u}_1, \quad y_6 = \dot{y}_4 = a_2y_3\omega_3 + a_2a_3y_1^2y_2 + \dot{u}_2, \dots$$

Для решения задачи определения $u_1(t), u_2(t)$ введем в рассмотрение вторую траекторию, которая удовлетворяет системе

$$\dot{p}_1 = a_1p_2p_3 + u_1, \quad \dot{p}_2 = a_2p_1p_3 + u_2, \quad \dot{p}_3 = a_3p_1p_2, \quad (23)$$

и имеет выход $z_1 = p_1, \quad z_2 = p_2$. Выходы y и z взаимнооднозначно соответствуют переменным $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, p_1, p_2, p_3, u_1, u_2) \longleftrightarrow (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2)$, где

$$\begin{aligned} y_1 = \omega_1, \quad \dot{y}_1 = a_1y_2\omega_3 + u_1, \quad y_2 = \omega_2, \quad \dot{y}_2 = a_2y_1\omega_3 + u_2, \\ z_1 = p_1, \quad \dot{z}_1 = a_1z_2p_3 + u_1, \quad z_2 = p_2, \quad \dot{z}_2 = a_2z_1p_3 + u_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Решая систему уравнений (24), находим

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{-z_3a_2y_2z_1 + z_2y_3a_2y_1 - z_2a_1y_2y_4 + z_2a_1y_2z_4}{a_2(y_2z_1 - z_2y_1)}, \\ u_2 &= -\frac{z_4a_1z_2y_1 + z_1y_3a_2y_1 - y_4a_1y_2z_1 - z_1z_3a_2y_1}{a_1(y_2z_1 - z_2y_1)}, \\ \omega_3 &= \frac{-y_4a_1z_2 + z_4a_1z_2 + z_1y_3a_2 - z_1z_3a_2}{a_1a_2(y_2z_1 - z_2y_1)}, \\ p_3 &= \frac{y_3a_2y_1 - a_1y_2y_4 + a_1y_2z_4 - z_3a_2y_1}{a_1a_2(y_2z_1 - z_2y_1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

По формулам (25) при заданных $y_1(t), y_2(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), z_1(t), z_2(t), \dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t)$ могут быть найдены управляющие моменты $u_1(t), u_2(t)$ и неизвестная компонента вектора угловой скорости $\omega_3(t)$. Если бы выход на дополнительной траектории мог быть произвольным, то рассматриваемая двухточечная задача управления свелась бы к алгебраической задаче о подборе в формулах (25) вектор-функции $z(t)$ такой, чтобы $\omega_3(t)$ удовлетворяла граничным условиям. Но формулы (25) верны лишь для тех функций $z(t)$, которые соответствуют такому же управлению, что и $y(t)$. Поэтому запишем уравнения для определения величин $z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2$ по значениям выхода $y_1(t), y_2(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \ddot{y}_1(t), \ddot{y}_2(t)$, а также $u_1(0), u_2(0)$.

Вначале определяем величину $z_1(0), z_2(0), z_3(0) = \dot{z}_1(0), z_4(0) = \dot{z}_2(0)$ по формулам (23), (24), где $u_1(0), u_2(0)$ заданы, $p_1(0), p_2(0), p_3(0)$ выбраны произвольно.

Далее составим дифференциальные уравнения, связывающие выходы системы на двух различных траекториях. С этой целью, дифференцируя равенства (24), получаем

$$\ddot{y}_1 = a_1 \dot{y}_2 \frac{a_1 z_2 (\dot{y}_2 - \dot{z}_2) - a_2 z_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1)}{a_1 (a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1)} + a_1 a_3 y_1 y_2^2 + \dot{u}_1, \quad (26)$$

$$\ddot{y}_2 = a_2 \dot{y}_1 \frac{a_1 z_2 (\dot{y}_2 - \dot{z}_2) - a_2 z_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1)}{a_1 (a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1)} + a_2 a_3 y_2 y_1^2 + \dot{u}_2,$$

$$\ddot{z}_1 = a_1 \dot{z}_2 \frac{a_1 y_2 (\dot{y}_2 - \dot{z}_2) - a_2 y_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1)}{a_1 (a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1)} + a_1 a_3 z_1 z_2^2 + \dot{u}_1, \quad (27)$$

$$\ddot{z}_2 = a_2 \dot{z}_1 \frac{a_1 y_2 (\dot{y}_2 - \dot{z}_2) - a_2 y_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1)}{a_1 (a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1)} + a_2 a_3 z_2 z_1^2 + \dot{u}_2.$$

Исключая \dot{u}_1, \dot{u}_2 , с помощью уравнений (26) находим

$$\ddot{z}_1 = \ddot{y}_1 + \frac{a_1 (\dot{y}_2 - \dot{z}_2) (\dot{z}_2 y_2 - \dot{y}_2 z_2) + a_2 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1) (\dot{z}_2 y_1 - \dot{y}_2 z_1)}{a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1} + a_1 a_3 (z_1 z_2^2 - y_1 y_2^2), \quad (28)$$

$$\ddot{z}_2 = \ddot{y}_2 + \frac{a_1 a_2 (\dot{y}_2 - \dot{z}_2) (\dot{z}_1 y_2 - \dot{y}_1 z_2) + a_2^2 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1) (\dot{z}_1 y_1 - \dot{y}_1 z_1)}{a_1 (a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1)} + a_2 a_3 (z_2 z_1^2 - y_2 y_1^2).$$

Обозначив $\dot{z}_1 = z_3, \dot{z}_2 = z_4, \dot{y}_1 = y_3, \dot{y}_2 = y_4, \dot{y}_3 = v_1, \dot{y}_4 = v_2$, получаем: $z(t)$ является решением задачи Коши для системы

$$\dot{z}_3 = v_1 + \frac{a_1 (y_4 - z_4) (z_4 y_2 - y_4 z_2) + a_2 (y_3 - z_3) (z_4 y_1 - y_4 z_1)}{a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1} + a_1 a_3 (z_1 z_2^2 - y_1 y_2^2), \quad (29)$$

$$\dot{z}_4 = v_2 + \frac{a_1 a_2 (y_4 - z_4) (z_3 y_2 - y_3 z_2) + a_2^2 (y_3 - z_3) (z_3 y_1 - y_3 z_1)}{a_1 (a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1)} + a_2 a_3 (z_2 z_1^2 - y_2 y_1^2).$$

Таким образом можно сделать следующий вывод: вектор-функция $y(t)$ может быть задана произвольно, но значения выхода и его производных на второй траектории такими не являются. Для $z(t)$ получаем граничную задачу: 1) $z(t)$ удовлетворяет системе

дифференциальных уравнений (29); 2) для того, чтобы управления $u_1(t), u_2(t)$, определяемые по формулам (25), решали исходную задачу управления, вход в систему (29) – $y(t)$ должен быть таким, что при $t = t_f$

$$\omega_3^f = \frac{-y_4 a_1 z_2 + z_4 a_1 z_2 + z_1 y_3 a_2 - z_1 z_3 a_2}{a_1 a_2 (y_2 z_1 - z_2 y_1)}.$$

Рассмотрим вторую схему использования обратных систем на множестве траекторий при решении задачи управления. В отличие от предыдущей, в этой схеме выходы на разных траекториях могут выбираться независимо друг от друга. Пусть $y = \omega_1(t)$. Построим для системы (21) обратную к ней систему на двух траекториях. Иными словами, в качестве системы дифференциальных уравнений, описывающих вращение твердого тела, будем рассматривать совместно уравнения (21),(23). Тогда выход этой системы равен

$$y_1 = \omega_3, \quad z_1 = p_3, \quad y_2 = a_3 \omega_1 \omega_2, \quad z_2 = a_3 p_1 p_2, \\ y_3 = a_3 [y_1 (a_1 \omega_2^2 + a_2 \omega_1^2) + \omega_1 u_2 + \omega_2 u_1], \quad z_3 = a_3 [z_1 (a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2) + p_1 u_2 + p_2 u_1].$$

Разрешая последнюю группу уравнений относительно u_1, u_2 и подставляя полученные выражения в систему (21),(23), получаем систему, обратную к (21) по двум траекториям

$$\dot{\omega}_1 = a_1 \omega_2 \omega_3 + U_1(y, z, \omega, p), \quad \dot{\omega}_2 = a_2 \omega_1 \omega_3 + U_2(y, z, \omega, p), \tag{30}$$

$$\dot{p}_1 = a_1 p_2 p_3 + U_1(y, z, \omega, p, p_3), \quad \dot{p}_2 = a_2 p_1 p_3 + U_2(y, z, \omega, p),$$

где $U_1 = \frac{H(y, \omega) p_1 - H(z, p) \omega_1}{a_3 (\omega_2 p_1 - \omega_1 p_2)}$, $U_2 = \frac{H(y, \omega) p_2 - H(z, p) \omega_2}{a_3 (\omega_1 p_2 - \omega_2 p_1)}$, $H(y, \omega) = y_3 / a_3 - y_1 (a_1 \omega_2^2 + a_2 \omega_1^2)$. Система дифференциальных уравнений (30) описывает вращение под действием одних и тех же моментов двух одинаковых тел с разными начальными условиями $\omega_i^0 \neq p_i^0, i = 1, 2, 3$. При этом компоненты векторов угловых скоростей $\omega_3(t) = y_1(t), p_3(t) = z_1(t)$, где $y_1(t), z_1(t)$ – любые заданные функции. Используем это свойство для решения двухточечной задачи.

1) Подберем функцию $y_1(t)$ такой, что $y_1(0) = \omega_3^0, y_2(0) = a_3 \omega_1^0 \omega_2^0, y_1(t_f) = \omega_3^f, y_2(t_f) = a_3 \omega_1^f \omega_2^f$.

2) Покажем, что выбором $z_1(t)$ можно обеспечить любой наперед заданный закон изменения $\phi(t) = \omega_1(t)$, в частности такой, что $\phi(0) = \omega_1^0$ и $\phi(t_f) = \omega_1^f$. В правой части системы (30) содержатся функции $z_1(t), z_3(t)$, связанные дифференциальной связью $\dot{z}_1(t) = z_3(t)$. Обозначим $z_3 = v$ и подберем v таким, чтобы $\phi(t) = \omega_1(t)$. Для этого достаточно подставить $\phi(t)$ вместо ω_1 в уравнения (30) и разрешить относительно v первое уравнение системы: $v = G(t, \omega_2, p_1, p_2, y_1(t), y_3(t), z_1)$. Добавляя к (30) уравнения дифференциальной обратной связи

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \dot{z}_2(t) = G(t, \omega_2, p_1, p_2, y_1(t), y_3(t), z_1),$$

получаем систему дифференциальных уравнений, которая и дает решение исходной двухточечной задачи управления.

1. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. - 175 с.
2. Ковалев А.М. Критерии функциональной управляемости и обратимости нелинейных систем// Прикл. математика и механика. - 1998. - 62, вып.1. - С. 110-120.

3. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Условия идентифицируемости нелинейных механических систем // Механика твердого тела. - 1984. - Вып.16. - С. 77-91.
4. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. - Киев: Наук. думка, 1993. - 285 с.
5. Коробов В.И. Сведение задачи управляемости к граничной задаче // Дифференциальные уравнения. - 1976. - т XII. - N7. - С. 1310-1313.
6. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. - 1974. - Вып.6. - С. 15-24.
7. Щербак В.Ф. Условия идентифицируемости нелинейных механических систем с известным начальным состоянием // Там же. - 1985. - Вып.17. - С. 77-91.
8. Isidori A. Nonlinear control systems. - Berlin.- Springer-Verlag.-1985. - p.297.
9. Fliess M. A note on the invertibility of nonlinear input- output systems// Systems and Control Letters.- 1986.- vol.8.- N 2.- pp. 147-152.
10. Hirschorn R.M. Invertibility of multivariable nonlinear control systems // IEEE Trans.Autom. Control.- 1979. - v.AC-24.-N 6. - pp. 855-860.
11. Silverman L.M. Inversion of multivariable linear systems//IEEE Trans. Autom. Control. - 1969. - v.AC-14.-N 3.- pp. 270-276.
12. Singh S.N. A modified algorithm for invertibility of nolinear systems// IEEE Trans.Autom. Control. - 1981. - v.AC-28.-N 9. - pp. 595-598.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

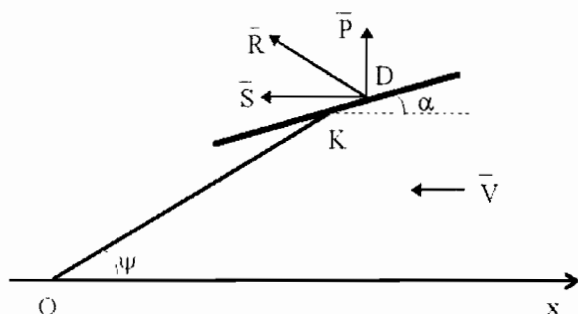
Получено 14.09.99

УДК 531.38

©2000. А.А. Илюхин, С.А. Ступко

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Рассматривается равновесие упругого стержня при плоском изгибе, который происходит под воздействием потока воздуха на пластинку, жестко прикрепленную к стержню. Построена приближенная зависимость угла атаки от скорости набегающего потока. Найдена скорость потока, при которой он оказывает на пластинку стабилизирующее воздействие.



Рассмотрим систему, представляющую собой жестко закрепленный в точке O упругий стержень, к которому в точке K на прямой симметрии пластинки жестко прикреплена пластинка. Тело помещено в поток воздуха, движущийся со скоростью V параллельно оси Ox (см. рисунок).

Силу R воздействия потока на пластинку представляют в виде суммы двух векторов [1]:

$$R = S + P, \quad \text{где } S = \frac{1}{2}\rho s(\alpha)VV - \text{ сила сопротивления,}$$

$$P = \frac{1}{2}\rho p(\alpha)(j \times V) - \text{ подъемная сила,}$$

ρ — плотность воздуха, α — угол атаки, то есть угол, который составляет вектор V с плоскостью пластинки, j — единичный вектор, лежащий в плоскости пластинки