УДК 531.38

©2000. **Я.А. Савченко**

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИХРЕВЫМ СВЕРХПРОВОДЯЩИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Оценка влияния вихревого движения жидкости в эллипсоидальной полости на устойчивость равномерных вращений тела-носителя относится к одной из классических задач аналитической механики. В настоящей работе изучается влияние дополнительного эффекта – течения токов в сверхпроводящей жидкости, заполняющей эллипсоидальную полость, в случае отсутствия внешних сил. Дано математическое описание модели, получено характеристическое уравнение, позволяющее дать оценку влияния величины тока I = const на устойчивость равномерных вращений гироскопа Лагранжа. Картина областей устойчивости изучаемых движений кардинально отличается от классического случая ($I = 0$).

1. Уравнения движения системы тело–сверхпроводящая жидкость и случай осесимметричного движения. В случае однородного течения жидкости и плотности тока уравнения движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной сверхпроводящей жидкостью, в случае отсутствия массовых сил могут быть представлены в следующей форме:

$$\dot{\Omega}_1 = (1+\varepsilon_3)\omega_3\Omega_2 - (1-\varepsilon_2)\omega_2\Omega_3 - (\varepsilon_2+\varepsilon_3)\Omega_2\Omega_3 + \frac{\pi}{\rho c^2}(\varepsilon_2+\varepsilon_3)I_2I_3 \qquad (123),$$

$$\dot{I}_1 = (1+\varepsilon_2\varepsilon_3)(\omega_3 I_2 - \omega_2 I_3 + \Omega_2 I_3 - \Omega_3 I_2) \qquad (123), \tag{1}$$

$$a_1\dot{\omega}_1 = (a_2-a_3)\omega_2\omega_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2 b_3\omega_2\Omega_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 b_2\omega_3\Omega_2 + b_1(\varepsilon_2+\varepsilon_3)(\Omega_2\Omega_3 - \frac{\pi}{\rho c^2}I_2I_3) \quad (123).$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega} = \dfrac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{I} = \dfrac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$; v_1, v_2, v_3 – проекции вектора абсолютной скорости $\boldsymbol{v}$ на координатные оси связанные с твердым телом; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и I_1, I_2, I_3 – соответственно проекции вихря частиц жидкости $\boldsymbol{\Omega}$ и плотности тока $\boldsymbol{I}$ на эти же оси; $\boldsymbol{H}$ – вектор напряженности магнитного поля; ρ = const – плотность жидкости; c – скорость света; $\varepsilon_1 = (c_2^2-c_3^2)/(c_2^2+c_3^2)$; $b_1 = (2c_2^2c_3^2)/(b^2(c_2^2+c_3^2))$ (123); $b^2 = c_1^2+c_2^2+c_3^2$; c_1, c_2, c_3 – полуоси полости-эллипсоида; $a_1 = 5A_1/(2b^2M_2)$; $A_1 = A_1^0 + (M_2/5)(c_2^2-c_3^2)^2/(c_2^2+c_3^2)$ (123), где A_i^0 $(i = 1,2,3)$ – осевые моменты инерции твердого тела; M_2 – масса жидкости. Необходимо отметить, что уравнения (1) записаны в предположении, что система координат связана с твердым телом и полуоси полости-эллипсоида не совпадают.

Система (1) допускает решение:

$$\omega_3 = \omega = \text{const}, \quad \Omega_3 = \Omega = \text{const}, \quad I_3 = I = \text{const},$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \Omega_1 = \Omega_2 = I_1 = I_2 = 0, \tag{2}$$

которое соответствует равномерным вращениям тела-носителя с угловой скоростью ω и однородному течению жидкости с постоянным вихрем Ω вокруг третьей оси системы координат. При этом в жидкости протекает постоянный ток с плотностью I, параллельный этой же оси.

2. Необходимые условия устойчивости осесимметричного движения системы тело–сверхпроводящая жидкость. В классическом случае, когда $H \equiv \equiv 0$, магнитное поле и ток отсутствуют, задача устойчивости движения системы тело-жидкость была решена в [2,3].

Для установления влияния магнитного поля на характер устойчивости рассматриваемой системы, возьмем в качестве тела-носителя гироскоп Лагранжа с полостью в форме эллипсоида вращения:

$$A_1^0 = A_2^0, \qquad c_1 = c_2. \tag{3}$$

При предположениях (3) уравнения (1) принимают форму:

$$\begin{gathered}
a_1\dot{\omega}_1 = (a_1 - a_3)\omega_2\omega_3 - P_1\omega_2\Omega_3 + P_2\Omega_2\Omega_3 - dP_2I_2I_3,\\
a_2\dot{\omega}_2 = (a_3 - a_1)\omega_1\omega_3 - P_1\omega_1\Omega_3 + P_2\Omega_1\Omega_3 - dP_2I_1I_3,\\
\dot{\omega}_3 = 0,\\
\dot{\Omega}_1 = \omega_3\Omega_2 - P_4\omega_2\Omega_3 - P_3\Omega_2\Omega_3 + dP_3I_2I_3,\\
\dot{\Omega}_2 = -\omega_3\Omega_1 - P_4\omega_1\Omega_3 - P_3\Omega_1\Omega_3 + dP_3I_1I_3,\\
\dot{\Omega}_3 = P_4(\omega_2\Omega_1 - \omega_1\Omega_2),\\
\dot{I}_1 = -\omega_2I_3 + \omega_3I_2 + \Omega_2I_3 - \Omega_3I_2,\\
\dot{I}_2 = \omega_1I_3 - \omega_3I_1 - \Omega_1I_3 + \Omega_3I_1,\\
\dot{I}_3 = \alpha P_4^2(-\omega_1I_2 + \omega_2I_1 + \Omega_1I_2 - \Omega_2I_1),
\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\alpha = c_3^2/c_1^2, \quad d = \frac{\pi}{\rho c^2}, \quad P_1 = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2(2+\alpha)},$$

$$P_2 = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2(2+\alpha)}, \quad P_3 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \quad P_4 = \frac{2}{\alpha+1}.$$

Выполняя стандартную процедуру поиска необходимых условий устойчивости решения (2), находим соответствующее характеристическое уравнение:

$$Q_1\lambda^3 + Q_2\lambda^2 + Q_3\lambda + Q_4 = 0. \tag{5}$$

Здесь $Q_i\,(i = 1, ..., 4)$ являются функциями ω, Ω, I и параметров рассматриваемой механической системы:

$$Q_1 = a_1, \qquad Q_2 = (3a_1 - a_3)\omega - (a_1 + a_1P_3 + P_1)\Omega,$$

$$\begin{gathered}
Q_3 = (3a_1 - 2a_3)\omega^2 - ((a_1 - a_3)P_3 + 2P_1 + 2a_1 - a_3)\omega\Omega +\\
+(a_1P_3 + P_1 + P_2 + (P_1 - P_2)P_3)\Omega^2 - (a_1P_3 + P_2)dI^2,\\
Q_4 = (a_1 - a_3)\omega^3 - ((a_1 - a_3)P_3 + P_1 + a_1 - a_3)\omega^2\Omega +\\
+((a_1 - a_3)P_3 + P_1 + P_2 + (P_1 - P_2)P_3)\omega\Omega^2 - ((P_1 - P_2)P_3 + P_2)\Omega^3.
\end{gathered}$$

3. Случай тонкостенного тела-носителя. Для того, чтобы продемонстрировать в наглядной форме влияние вихревого магнитного поля на устойчивость системы тело-жидкость, рассмотрим случай невесомой (тонкостенной) оболочки тела-носителя:

$$A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 = 0. \tag{6}$$

Тогда систему тело-жидкость можно описать, используя один параметр $\alpha = c_3^2/c_1^2$, определяющий форму оболочки.

Хорошо известен факт [2], что в случае, когда магнитное поле отсутствует ($H \equiv \equiv 0$, $I \equiv 0$), равномерное вращение тела-носителя с любой угловой скоростью ω устойчиво для сплюснутых тел ($\alpha \in (0;1)$) и сильно вытянутых ($\alpha \in (9;\infty)$) тел, и неустойчиво для слегка вытянутых ($\alpha \in (1;9)$). Область устойчивости G равномерных вращений в плоскости $O\omega\sqrt{\alpha}$ изображена на рис. 1. Для любого значения ω при $c_3 \in (c_1; 3c_1)$ движение неустойчиво, а при $c_3 \in (0; c_1) \cup (3c_1; \infty)$ – устойчиво.

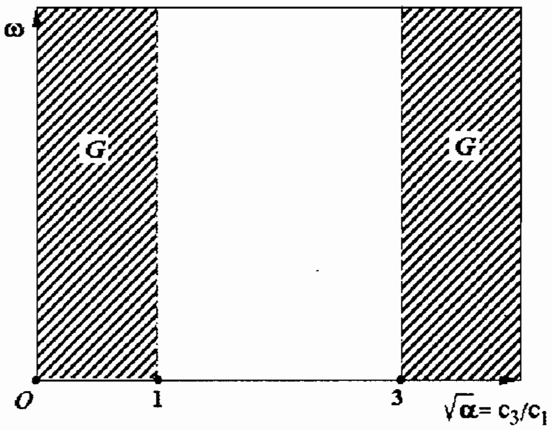

Рис. 1

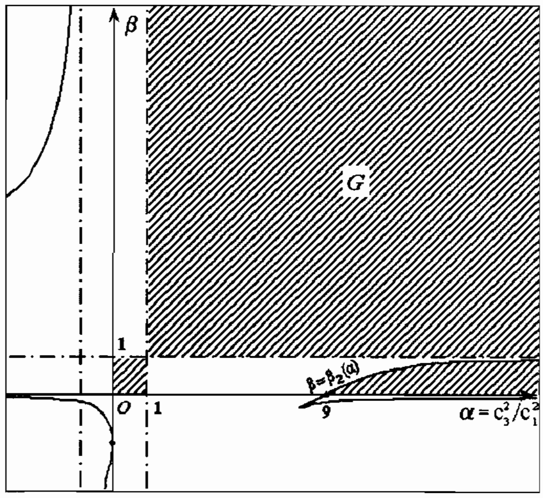

Рис. 2

Пусть теперь $I \neq 0$. В силу условия (6) $a_3 = 0$, $a_1 = (1-\alpha)^2/2(2+\alpha)(1+\alpha)$, а также можно положить $\omega = \Omega$, и уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\lambda^3 + \omega\lambda^2 + (2(\alpha-1)^{-1}\omega^2 - (\alpha+1)(\alpha-1)^{-1}d\,I^2)\lambda - \omega d\,I^2 = 0. \qquad (7)$$

Когда $\omega = 0$ (жидкость покоится), условием вещественности корней уравнения (7) является $\alpha > 1$, т.е. в этом случае ток стабилизирует вытянутые тела и дестабилизирует сжатые.

Рассмотрим случай $\omega \neq 0$. Уравнение (7) будет иметь вещественные корни, если выполняется неравенство:

$$D(\alpha,\beta) = (\alpha-1)(\beta-1)(q_1\beta^2 + q_1\beta + q_3) > 0, \qquad (8)$$

где $q_1 = (\alpha+1)^3$, $q_2 = -\alpha^3 + 13\alpha^2 - 34\alpha + 6$, $q_3 = -\alpha + 9$, $\beta = d\,I^2/\omega^2$. На рис. 2 изображена область G для $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, когда неравенство (8) истинно.

Анализ неравенства (8) дает возможность сделать заключение, что в отличие от классического случая, существование магнитного поля приводит к появлению интервала $\omega \in (0;\omega_1)$, $\omega_1 = \sqrt{d}\,I$, как интервала неустойчивости для сжатых тел ($\alpha \in (0;1)$), и, соответственно, как интервала устойчивости для слегка вытянутых тел ($\alpha \in (0;1)$) (см. рис. 3, 4).

Что же касается сильно вытянутых тел, когда $\alpha > 9$, то они имеют интервал неустойчивости $\omega \in (\omega_1;\omega_2)$, где $\omega_2 = \sqrt{d}\,I \,/\, \sqrt{\beta_2}$, а β_2 – положительный корень уравнения $q_1\beta^2 + q_2\beta + q_3 = 0$.

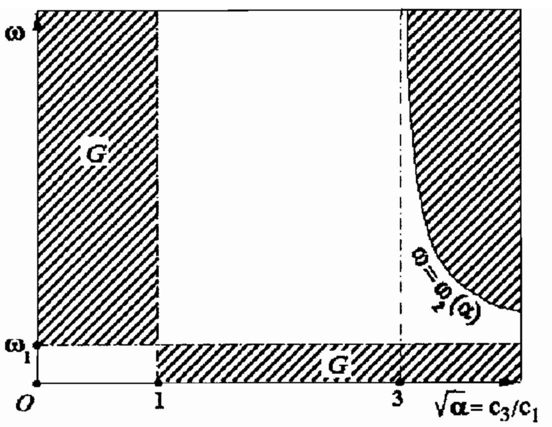

Рис. 3

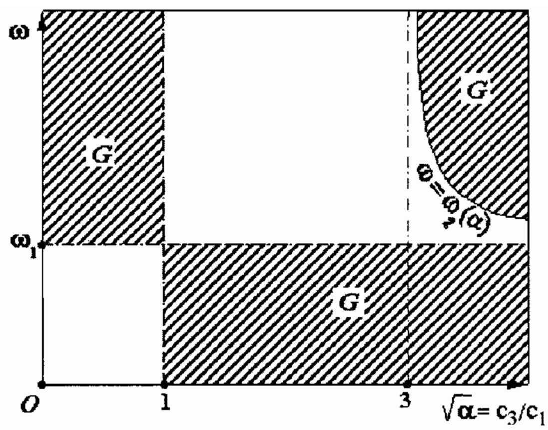

Рис. 4

Необходимо отметить, что для каждого значения тока I значение $\omega_2 = \omega_2(\alpha)$ (см. рис. 3, 4) таково, что:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\omega_2(\alpha)=\omega_1,\quad \lim_{\alpha\to 9+0}\omega_2(\alpha)=+\infty.$$

1. *Богоявленский А.А.* Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1983. – **47**, вып. 3. – С. 440–445.
2. *Румянцев В.В.* Устойчивость вращений твердого тела с эллипсоидальной полостью заполненной жидкостью // Там же. – 1957. – **21**, вып. 6. – С. 740–748.
3. *Савченко А.Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.

Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, Киев

Получено 30.11.99

УДК 62.534(031)

©2000. **И.А. Мухаметзянов**

О ПОСТРОЕНИИ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ

Строится семейство функций Ляпунова для более широкого класса материальных систем, включающего в себя, кроме механических, системы немеханической природы. Рассмотрены некоторые применения этих функций.

В работе [4] было построено семейство функций Ляпунова для исследования устойчивости "в малом" невозмущенного движения механических систем. В работе [5] этот подход был применен для построения механических систем, обладающих асимптотически устойчивым "в целом" программным движением. В данной работе[1] эти результаты распространяются на более широкий класс материальных систем, включающих в себя, кроме механических, также и системы немеханической природы. Кроме того, здесь построенное семейство функций Ляпунова применяется для улучшения качества переходного процесса путем оптимального управления, в частности, при стабилизации программного движения тела с одной неподвижной точкой.

1. Построение семейства функций Ляпунова для исследования устойчивости по первому приближению. Пусть возмущенное движение материальной сис-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант 9901.01.193).