УДК 531.36:531.38

©2000. **Ю.Н. Кононов**

О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

Выведены уравнения движения системы n связанных твердых тел, имеющих полости, целиком заполненные вязкой жидкостью. Рассмотрен случай, когда одно из твердых тел имеет неподвижную точку, и случай свободного движения системы. Получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения системы n гироскопов Лагранжа, содержащих идеальную жидкость. Подробно исследованы случаи $n = 1, 2, 3$. В основу вывода уравнений движения рассматриваемой механической системы положены известные уравнения движения n гиростатов, полученные П.В. Харламовым [6] и исследованные А.Я. Савченко и его учениками [5].

1. Уравнения движения несвободной системы n твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Обозначим через S_k тело, которое состоит из твердого тела S_k^0, имеющего полость τ_k, целиком заполненную вязкой жидкостью плотностью ρ_k и кинематической вязкостью ν_k $(k = \overline{1,n})$. Твердые тела S_k^0 и S_{k-1}^0 $(1 < k \leq n)$ имеют одну общую точку O_k; точка O_1 твердого тела S_1^0 неподвижна. По аналогии с работой [5] назовем такую систему несвободной системой связанных твердых тел, содержащих жидкость (ССТТЖ). Обозначим через $\boldsymbol{\omega}_k$ абсолютную угловую скорость твердого тела S_k^0 ; $\mathbf{v}_k$ - абсолютную скорость точки O_k; $\mathbf{s}_k = \overrightarrow{O_kO_{k+1}}$; $\mathbf{c}_k = \overrightarrow{O_kC_k}$ (C_k - центр масс тела S_k).

Так как $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \times \mathbf{s}_{k-1}$, то

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i \tag{1}$$

Действие тела S_{k-1} на S_k характеризует сила $\mathbf{R}_k$ и момент $\mathbf{L}_k$, приложенные в точке O_k . Сила $-\mathbf{R}_{k+1}$ и момент $-\mathbf{L}_{k+1}$, приложенные в точке O_{k+1}, характеризуют действие тела S_{k+1} на S_k . Кроме указанных сил и моментов к телу могут быть приложены и другие силы и моменты. Они могут быть представлены силой $\mathbf{F}_k$ и моментом $\mathbf{M}_k$, приложенными в точке O_k.

Твердое тело с полостью, целиком заполненной несжимаемой однородной вязкой жидкостью является гиростатом [7]. Поэтому рассматриваемая механическая система является системой гиростатов.

Запишем уравнения движения центра масс и уравнения изменения момента количества движения тела S_k относительно точки O_k. На основании уравнений работы [4] не трудно показать, что вид этих уравнений может быть представлен в форме [6]

$$\begin{aligned} m_k\dot{\boldsymbol{v}}_k^c &= \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k+1}, \\ m_n\dot{\boldsymbol{v}}_n^c &= \mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k + \lambda_k)^{\cdot} + \mathbf{c}_k \times m_k\dot{\boldsymbol{v}}_k &= \mathbf{M}_k + \mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k+1} - \mathbf{s}_k \times \mathbf{R}_{k+1}, \ (k = \overline{1, n-1}), \\ (\mathbf{A}_n \cdot \boldsymbol{\omega}_n + \lambda_n)^{\cdot} + \mathbf{c}_n \times m_n\dot{\boldsymbol{v}}_n &= \mathbf{M}_n + \mathbf{L}_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь точкой обозначена абсолютная производная; $\mathbf{A}_k$ - тензор инерции тела S_k относительно точки O_k; m_k - масса тела S_k; $\lambda_k = \rho_k \int\limits_{\tau_k} \mathbf{r}_k \times \mathbf{u}_k d\tau$ - гиростатический момент, который не зависит от выбора полюса и поэтому может быть подсчитан относительно центра полости τ_k; $\mathbf{u}_k$ - вектор относительной скорости жидкости в полости τ_k; $\mathbf{v}_k^c = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{c}_k$.

Из (2) находим

$$\mathbf{R}_k = \sum_{i=k}^{n} (m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i^c - \mathbf{F}_i) \tag{4}$$

С учетом соотношений (1) и (4) уравнения (3) запишутся в виде [5]

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_1)^{\cdot} + \mathbf{s}_1 \times \textstyle\sum_{i=2}^{n} m_i(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{c}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{s}_j)^{\cdot} = \\
&= \mathbf{M}_1 + \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 + \mathbf{s}_1 \times \textstyle\sum_{i=2}^{n} \mathbf{F}_i, \\
&(\mathbf{A}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k + \lambda_k)^{\cdot} + m_k \mathbf{c}_k \times \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i)^{\cdot} + \mathbf{s}_k \times \sum_{i=k+1}^{n} m_i(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{c}_i + \\
&+ \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{s}_j)^{\cdot} = \mathbf{M}_k + \mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k+1} + \mathbf{s}_k \times \sum_{i=k+1}^{n} \mathbf{F}_i, \ (k = \overline{2, n-1}), \\
&(\mathbf{A}_n \cdot \boldsymbol{\omega}_n + \lambda_n)^{\cdot} + m_n \mathbf{c}_n \times \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i)^{\cdot} = \mathbf{M}_n + \mathbf{L}_n.
\end{aligned} \tag{5}$$

К системе уравнений (5) следует добавить уравнения Навье-Стокса

$$\begin{aligned}
&\partial \mathbf{u}_k / \partial t + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k + 2\boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{u}_k + \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \times \mathbf{r}_k = -\nabla p_k / \rho_k + \nu_k \Delta \mathbf{u}_k, \\
&\operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0 \qquad \text{в} \quad \tau_k, \\
&\mathbf{u}_k = 0 \ (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \ \text{при} \ \nu_k = 0) \qquad \text{на} \ \partial \tau_k.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для замыкании системы уравнений (5)-(6) необходима информация о характере взаимодействия между твердыми телами S_k^0 и S_{k-1}^0 и о связях в точке подвеса O_1.

Рассмотрим случай, когда твердые тела в системе соединены идеальными сферическими шарнирами ($\mathbf{L}_k = 0$) и внешней силой является только сила тяжести ($\mathbf{F}_k = g m_k \boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{M}_k = g m_k \mathbf{c}_k \times \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{g}/g$). В этом случае уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\lambda}_1)^{\cdot} + \mathbf{s}_1 \times \textstyle\sum_{i=2}^{n} m_i [(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{c}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{s}_j)^{\cdot} - g\boldsymbol{\nu}] = m_1 \mathbf{c}_1 \times g\boldsymbol{\nu}, \\
&(\mathbf{A}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{\lambda}_k)^{\cdot} + m_k \mathbf{c}_k \times [\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i)^{\cdot} - g\boldsymbol{\nu}] + \\
&+ \mathbf{s}_k \times \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} m_i [\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{c}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{s}_j)^{\cdot} - g\boldsymbol{\nu}] = 0, \\
&(\mathbf{A}_n \cdot \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\lambda}_n)^{\cdot} + m_n \mathbf{c}_n \times [\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i)^{\cdot} - g\boldsymbol{\nu}] = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Введем неподвижный базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$ с центром в неподвижной точке O_1, вектор $\mathbf{e}_3^0$ которого имеет направление, противоположное направлению силы тяжести.

С каждым из твердых тел S_k^0 свяжем неизменно базис $\mathbf{e}_1^k \mathbf{e}_2^k \mathbf{e}_3^k$ с вершиной в точке O_k, оси которого направим по главным осям тензора инерции $\mathbf{A}_k$.

Пусть $\mathbf{s}_k = s_k \mathbf{e}_3^k, \mathbf{c}_k = c_k \mathbf{e}_3^k$. Это означает, что ось $O_k O_{k+1}$ является главной для тела S_k.

Величины $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \mathbf{e}_\mu^i \cdot \mathbf{e}_\kappa^j$ $(i, j = \overline{0, n};\ \mu, \kappa = 1, 2, 3)$ определяют ориентацию базиса $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ в $\mathbf{e}_1^j \mathbf{e}_2^j \mathbf{e}_3^j$:

$$\mathbf{e}_\mu^i = \sum_{\kappa=1}^{3} \alpha_{\mu\kappa}^{ij} \mathbf{e}_\kappa^j.$$

Величины $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}$ можно выразить через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ и $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$

$$\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0}.$$

Векторные уравнения (7) в проекциях на оси подвижного базиса $\mathbf{e}_1^k\mathbf{e}_2^k\mathbf{e}_3^k$ имеют вид

$$\begin{array}{l}
A_1'\dot{p}_1 + (C_1 - B_1')q_1 r_1 + s_1 \sum_{i=2}^n a_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{22}^{1i} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{21}^{1i} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{23}^{1i}]+ \\
+Q_1^1 = a_1 g \alpha_{23}^{10}, \\
B_1'\dot{q}_1 - (C_1 - A_1')p_1 r_1 - s_1 \sum_{i=2}^n a_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{12}^{1i} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{11}^{1i} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{13}^{1i}]+ \\
+Q_2^1 = -a_1 g \alpha_{13}^{10}, \\
C_1\dot{r}_1 + Q_3^1 = 0; \\
A_k'\dot{p}_k + (C_k - B_k')q_k r_k + a_k \sum_{i=1}^{k-1} s_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{22}^{ik} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{12}^{ik} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{32}^{ik}]+ \\
+s_k \sum_{i=k+1}^n a_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{22}^{ki} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{21}^{ki} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{23}^{ki}] + Q_1^k = a_k g \alpha_{23}^{k0}, \\
B_k'\dot{q}_k - (C_k - A_k')p_k r_k - a_k \sum_{i=1}^{k-1} s_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{21}^{ik} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{11}^{ik} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{31}^{ik}]- \\
-s_k \sum_{i=k+1}^n a_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{12}^{ki} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{11}^{ki} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{13}^{ki}] + Q_2^k = -a_k g \alpha_{13}^{k0}, \\
C_k\dot{r}_k + Q_3^k = 0; \\
A_n\dot{p}_n + (C_n - B_n)q_n r_n + a_n \sum_{i=1}^{n-1} s_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{22}^{in} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{12}^{in} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{32}^{in}]+ \\
+Q_1^n = a_n g \alpha_{23}^{n0}, \\
B_n\dot{q}_n - (C_n - A_n)p_n r_n - a_n \sum_{i=1}^{n-1} s_i[(\dot{p}_i - q_i r_i)\alpha_{21}^{in} - (\dot{q}_i + p_i r_i)\alpha_{11}^{in} + (p_i^2 + q_i^2)\alpha_{31}^{in}]+ \\
+Q_1^n = -a_n g \alpha_{13}^{n0}, \\
C_n\dot{r}_n + Q_3^n = 0.
\end{array} \tag{8}$$

Здесь p_k, q_k, r_k - проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_k$ твердого тела S_k^0 на оси подвижного базиса $\mathbf{e}_1^k\mathbf{e}_2^k\mathbf{e}_3^k$; $\mathbf{A}_k = diag\{A_k, B_k, C_k\}$;

$$Q_j^k = (\boldsymbol{\omega}_k \times \lambda_k + \lambda_k^*) \cdot \mathbf{e}_j^k, \tag{9}$$

звездочкой обозначена относительная производная;

$$A_k' = A_k + s_k^2 \sum_{i=k+1}^n m_i,\ B_k' = B_k + s_k^2 \sum_{i=k+1}^n m_i, a_k = m_k c_k + s_k \sum_{i=k+1}^n m_i\ (k = \overline{1, n-1}).$$

К системе уравнений (8) следует добавить уравнения для направляющих косинусов

$$\begin{array}{l}
\dot{\alpha}_{11}^{k0} = -q_k\alpha_{31}^{k0} + r_k\alpha_{21}^{k0},\ \dot{\alpha}_{21}^{k0} = p_k\alpha_{31}^{k0} - r_k\alpha_{11}^{k0}, \\
\dot{\alpha}_{12}^{k0} = -q_k\alpha_{32}^{k0} + r_k\alpha_{22}^{k0},\ \dot{\alpha}_{22}^{k0} = p_k\alpha_{32}^{k0} - r_k\alpha_{12}^{k0}, \\
\dot{\alpha}_{13}^{k0} = -q_k\alpha_{33}^{k0} + r_k\alpha_{23}^{k0},\ \dot{\alpha}_{23}^{k0} = p_k\alpha_{33}^{k0} - r_k\alpha_{13}^{k0}, \\
\dot{\alpha}_{31}^{k0} = -p_k\alpha_{21}^{k0} + q_k\alpha_{11}^{k0},\ \dot{\alpha}_{32}^{k0} = -p_k\alpha_{22}^{k0} + q_k\alpha_{12}^{k0}, \\
\dot{\alpha}_{33}^{k0} = -p_k\alpha_{23}^{k0} + q_k\alpha_{13}^{k0}.
\end{array} \tag{10}$$

Уравнения (8) в углах А.Н. Крылова [5] имеют вид:

$$\begin{array}{l}
A_1'(\ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}_1 \sin\beta_1 \cos\beta_1) + C_1 n_1 \dot{\alpha}_1 \cos\beta_1 + s_1 \sum_{i=2}^n a_i[\ddot{\beta}_i \cos\beta_1 \cos\beta_i + \\
+\ddot{\beta}_i \sin\beta_1 \sin\beta_i \cos(\alpha_1 - \alpha_i) - \ddot{\alpha}_i \sin\beta_1 \cos\beta_i \sin(\alpha_1 - \alpha_i) - \dot{\beta}_i^2 \cos\beta_1 \sin\beta_i - \\
-(\dot{\alpha}_i^2 + \dot{\beta}_i^2)\sin\beta_1 \cos\beta_i \cos(\alpha_1 - \alpha_i) + 2\dot{\alpha}_i\dot{\beta}_i \sin\beta_1 \sin\beta_i \sin(\alpha_1 - \alpha_i)]+ \\
+Q_1^1 \cos\gamma_1 - Q_2^1 \sin\gamma_1 = a_1 g \cos\alpha_1 \sin\beta_1, \\
A_1'(\ddot{\alpha}_1 \cos\beta_1 - 2\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1 \sin\beta_1) - C_1 n_1 \dot{\beta}_1 + s_1 \sum_{i=2}^n a_i[\ddot{\alpha}_i \cos\beta_i \cos(\alpha_1 - \alpha_i) + \\
+\ddot{\beta}_i \sin\beta_i \sin(\alpha_1 - \alpha_i) + (\dot{\alpha}_i^2 + \dot{\beta}_i^2)\cos\beta_i \sin(\alpha_1 - \alpha_i) - 2\dot{\alpha}_i\dot{\beta}_i \sin\beta_i \cos(\alpha_1 - \alpha_i)]+ \\
+Q_1^1 \sin\gamma_1 - Q_2^1 \cos\gamma_1 = a_1 g \sin\alpha_1,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
A_k'(\ddot{\beta}_k + \dot{\alpha}_k \sin\beta_k \cos\beta_k) + C_k n_k \dot{\alpha}_k \cos\beta_k + a_k \sum_{i=1}^{k-1} s_i[\ddot{\beta}_i \cos\beta_i \cos\beta_k + \\
+\ddot{\beta}_i \sin\beta_i \sin\beta_k \cos(\alpha_i - \alpha_k) + \ddot{\alpha}_i \cos\beta_i \sin\beta_k \sin(\alpha_i - \alpha_k) + (\dot{\alpha}_i^2 + \dot{\beta}_i^2)\times \\
\times \cos\beta_i \sin\beta_k \cos(\alpha_i - \alpha_k) - \dot{\beta}_i^2 \cos\beta_k \sin\beta_i - 2\dot{\alpha}_i\dot{\beta}_i \sin\beta_i \sin\beta_k \sin(\alpha_i - \alpha_k)]+ \\
+s_k \sum_{i=2}^n a_i[\ddot{\beta}_i \cos\beta_i \cos\beta_k + \ddot{\beta}_i \sin\beta_i \sin\beta_k \cos(\alpha_k - \alpha_i) - \ddot{\alpha}_i \sin\beta_k \cos\beta_i \sin(\alpha_k - \alpha_i) + \\
+(\dot{\alpha}_i^2 + \dot{\beta}_i^2)\cos\beta_i \sin\beta_k \cos(\alpha_k - \alpha_i) - \dot{\beta}_i^2 \sin\beta_i \cos\beta_k + 2\dot{\alpha}_i\dot{\beta}_i \sin\beta_i \sin\beta_k \sin(\alpha_k - \alpha_i)]+ \\
+Q_1^k \cos\gamma_k - Q_2^k \sin\gamma_k = a_k g \cos\alpha_k \sin\beta_k,
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&A'_k(\ddot\alpha_k\cos\beta_k-2\dot\alpha_k\dot\beta_k\sin\beta_k)-C_kn_k\dot\beta_k+a_k\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}s_i[\ddot\alpha_i\cos\beta_i\cos(\alpha_i-\alpha_k)-\\
&-\ddot\beta_i\sin\beta_i\sin(\alpha_i-\alpha_k)-(\dot\alpha_i^2+\dot\beta_i^2)\cos\beta_i\sin(\alpha_i-\alpha_k)-2\dot\alpha_i\dot\beta_i\sin\beta_i\cos(\alpha_i-\alpha_k)]+\\
&+s_k\textstyle\sum_{i=k+1}^{n}a_i[\ddot\alpha_i\cos\beta_i\cos(\alpha_k-\alpha_i)++\ddot\beta_i\sin\beta_i\sin(\alpha_k-\alpha_i)+(\dot\alpha_i^2+\dot\beta_i^2)\times\\
&\times\cos\beta_i\sin(\alpha_k-\alpha_i)-2\dot\alpha_i\dot\beta_i\sin\beta_i\cos(\alpha_k-\alpha_i)]+\\
&+Q_1^k\sin\gamma_k-Q_2^k\cos\gamma_k=a_kg\sin\alpha_k,\,(k=\overline{2,n-1}),\\
&A_n(\ddot\beta_n+\dot\alpha_n\sin\beta_n\cos\beta_n)+C_nn_n\dot\alpha_n\cos\beta_n+a_n\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}s_i[\ddot\beta_i\cos\beta_i\cos\beta_n+\\
&+\ddot\beta_i\sin\beta_i\sin\beta_n\cos(\alpha_i-\alpha_n)+\ddot\alpha_i\sin\beta_n\cos\beta_i\sin(\alpha_i-\alpha_n)-\dot\beta_i^2\cos\beta_n\sin\beta_i+\\
&+(\dot\alpha_i^2+\dot\beta_i^2)\sin\beta_n\cos\beta_i\cos(\alpha_i-\alpha_n)-2\dot\alpha_i\dot\beta_i\sin\beta_i\sin\beta_n\sin(\alpha_i-\alpha_n)]+\\
&+Q_1^n\cos\gamma_n-Q_2^n\sin\gamma_n=a_ng\cos\alpha_n\sin\beta_n,\\
&A_n(\ddot\alpha_n\cos\beta_n-2\dot\alpha_n\dot\beta_n\sin\beta_n)-C_nn_n\dot\beta_n+a_n\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}s_i[\ddot\alpha_i\cos\beta_i\cos(\alpha_i-\alpha_n)-\\
&-\ddot\beta_i\sin\beta_i\sin(\alpha_i-\alpha_n)-(\dot\alpha_i^2+\dot\beta_i^2)\cos\beta_i\sin(\alpha_i-\alpha_n)-\\
&-2\dot\alpha_i\dot\beta_i\sin\beta_i\cos(\alpha_i-\alpha_n)]+Q_1^n\sin\gamma_n-Q_2^n\cos\gamma_n=a_ng\sin\alpha_n,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

2. Уравнения движения свободной системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Рассмотрим ССТТЖ, которая движется в пространстве под действием внешних сил и моментов. Такую систему будем называть свободной.

Запишем уравнение движения центра масс свободной системы

$$m\dot{\mathbf{v}}_c=\mathbf{F}, \tag{12}$$

где $m=\sum_{i=1}^n m_i$ - масса всей системы; $\mathbf{v_c}$ - вектор скорости центра масс; $\mathbf{F}$ - главный вектор внешних сил, действующих на ССТТЖ.

Уравнения вращательного движения тела S_k относительно его центра масс имеют вид аналогичный [5]

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_1^c\cdot\boldsymbol{\omega}_1+\lambda_1)^{\cdot}=\mathbf{M}_1-\mathbf{L}_2+\mathbf{c}_1\times\mathbf{R}_2,\\
&(\mathbf{A}_k\cdot\boldsymbol{\omega}_k+\lambda_k)^{\cdot}=\mathbf{M}_k+\mathbf{L}_k-\mathbf{L}_{k+1}-\mathbf{c}_k\times\mathbf{R}_k-\\
&-(\mathbf{s}_k-\mathbf{c}_k)\times\mathbf{R}_{k+1},\ (k=\overline{2,n-1}),\\
&(\mathbf{A}_n\cdot\boldsymbol{\omega}_n+\lambda_n)^{\cdot}=\mathbf{M}_n+\mathbf{L}_n-\mathbf{c}_n\times m_n\mathbf{R}_n.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Здесь $\mathbf{A}_k^c$ - тензор инерции тела S_k в точке C_k; $\mathbf{c}_1=\overrightarrow{C_1O_2}$, $\mathbf{c}_k=\overrightarrow{O_kC_k}(k=\overline{2,n})$.

Силы реакции $\mathbf{R}_k$ исключаются с помощью формулы (4).

Пусть $\mathbf{r}_k^c=\overrightarrow{CC_k}$, тогда [5]

$$\mathbf{r}_k^c=\mathbf{r}_1^c+\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_k+\sum_{i=2}^{k-1}\mathbf{s}_i,\ k\geq 2.$$

Так как $\sum_{i=1}^n m_i\mathbf{r}_i^c=M\mathbf{r}_c$, то

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1^c=\mathbf{v}_c-(1-m_1/m)\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{c}_1-\textstyle\sum_{i=2}^n m_i(\boldsymbol{\omega}_i\times\mathbf{c}_i+\sum_{j=2}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_j\times\mathbf{s}_j)/m,\\
&\mathbf{v}_k^c=\mathbf{v}_1^c+\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{c}_1+\boldsymbol{\omega}_k\times\mathbf{c}_k+\textstyle\sum_{i=2}^{k-1}\boldsymbol{\omega}_i\times\mathbf{s}_i.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Следует отметить, что в формуле (10) скорости центров масс тела S_k определялись по отношению к первому телу. Это имеет смысл, если на первое тело действуют дополнительные силы. В противном случае целесообразно выделить в качестве основного тела центральное тело ($n=2j+1$) или центральный шарнир [5].

Известно, что нахождение решения уравнения Навье-Стокса связано с большими трудностями. Однако нас интересует интегральная характеристика влияния жидкости на твердое тело, т. е. гиростатический момент жидкости λ_k. В ряде случаев его удается вычислить аналитически.

Гиростатический момент λ_k легко вычисляется для простейших случаев движения жидкости: безвихревое движение идеальной жидкости ($\nu_i = 0, \operatorname{rot}\mathbf{u}_i = -2\boldsymbol{\omega}_i$), однородно-вихревое движение идеальной жидкости ($\nu_i = 0, \operatorname{rot}\mathbf{u}_i = 2(\boldsymbol{\Omega}_i - \boldsymbol{\omega}_i)$), сильно вязкая и слабо вязкая жидкости [7]. Примеры вычислений гиростатического момента для рассмотренных случаев можно найти в работе [2].

3. Исследование устойчивости равномерного вращения системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Предположим, что в невозмущенном движении тело S_k вращается как одно целое с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{k0}$. Пусть $\boldsymbol{\omega}_{k0} = \omega_{k0}\mathbf{e}_3^k$.

Система уравнений (6), (8)-(10) допускает частное решение

$$\begin{array}{l} p_k = q_k = 0,\ r_k = \omega_{k0},\ \mathbf{u}_k = 0, \\ \alpha_{11}^{k0} = \cos\omega_{k0}t,\ \alpha_{12}^{k0} = \sin\omega_{k0}t,\ \alpha_{13}^{k0} = 0, \\ \alpha_{21}^{k0} = -\sin\omega_{k0}t,\ \alpha_{22}^{k0} = \cos\omega_{k0}t,\ \alpha_{23}^{k0} = 0, \\ \alpha_{31}^{k0} = \alpha_{32}^{k0} = 0,\ \alpha_{33}^{k0} = 1,\ (k = \overline{1,n}), \end{array} \tag{15}$$

которое соответствует равномерному вращению тел S_k вокруг осей $\mathbf{l}_k$, совпадающих с вертикалью.

Исследуем устойчивость этого решения по части переменных, которые определяют положения осей $\mathbf{l}_k$ в пространстве, угловые скорости твердых тел и относительные скорости движения жидкости.

Сохраняя прежние обозначения, запишем уравнения возмущенного движения

$$\begin{array}{l} A_1'\dot{p}_1 + (C_1 - B_1')q_1\omega_{1O} + s_1\sum_{i=2}^{n} a_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{22}^{1i} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{21}^{1i}] + \\ +Q_1^1 = a_1g\alpha_{23}^{10}, \\ B_1'\dot{q}_1 - (C_1 - A_1')p_1\omega_{10} - s_1\sum_{i=2}^{n} a_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{12}^{1i} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{11}^{1i}] + \\ +Q_2^1 = -a_1g\alpha_{13}^{10}, \\ C_1\dot{r}_1 + Q_3^1 = 0; \\ A_k'\dot{p}_k + (C_k - B_k')q_k\omega_{k0} + a_k\sum_{i=1}^{k-1} s_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{22}^{ik} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{12}^{ik}] + \\ +s_k\sum_{i=k+1}^{n} a_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{22}^{ki} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{21}^{ki}] + Q_1^k = a_kg\alpha_{23}^{k0}, \\ B_k'\dot{q}_k - (C_k - A_k')p_k\omega_{k0} - a_k\sum_{i=1}^{k-1} s_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{21}^{ik} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{11}^{ik}] - \\ -s_k\sum_{i=k+1}^{n} a_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{12}^{ki} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{11}^{ki}] + Q_2^k = -a_kg\alpha_{13}^{k0}, \\ C_k\dot{r}_k + Q_3^k = 0; \\ A_n\dot{p}_n + (C_n - B_n)q_n\omega_{n0} + a_n\sum_{i=1}^{n-1} s_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{22}^{in} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{12}^{in}] + \\ +Q_1^n = a_ng\alpha_{23}^{n0}, \\ B_n\dot{q}_n - (C_n - A_n)p_nr_n - a_n\sum_{i=1}^{n-1} s_i[(\dot{p}_i - q_ir_i)\alpha_{21}^{in} - (\dot{q}_i + p_ir_i)\alpha_{11}^{in}] + \\ +Q_1^n = -a_ng\alpha_{13}^{n0}, \\ C_n\dot{r}_n + Q_3^n = 0. \end{array} \tag{16}$$

$$\dot{\alpha}_{13}^{k0} = \alpha_{23}^{k0}\omega_{k0} - q_k,\ \dot{\alpha}_{23}^{k0} = -\alpha_{13}^{k0}\omega_{k0} + p_k; \tag{17}$$

$$\partial\mathbf{u}_k/\partial t + 2\boldsymbol{\omega}_{k0} \times \mathbf{u}_k + \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \times \mathbf{r}_k = -\nabla p_k/\rho_k + \nu_k\Delta\mathbf{u}_k,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_k = 0, \quad \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \quad \text{на } \partial\tau_k. \tag{18}$$

Здесь $\alpha_{11}^{ki} = \cos\varphi_{ik}$ $\alpha_{12}^{ki} = -\sin\varphi_{ik}$, $\alpha_{21}^{ki} = \sin\varphi_{ik}$, $\alpha_{22}^{ki} = -\cos\varphi_{ik}$, $\varphi_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$, $\varphi_k = \omega_{k0}t$.

В случае сильно вязкой жидкости ($Re_k \ll 1$) гиростатический момент λ_k можно вычислить по следующей формуле

$$\lambda_k = -\rho_k Re_k \mathbf{P}_k^1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_k + \rho_k (Re_k)^2 (\mathbf{P}_k^2 \ddot{\boldsymbol{\omega}}_k + \omega_{k0} \mathbf{P}_k^3 \dot{\boldsymbol{\omega}}_k) + O(Re_k)^3$$

Свойства тензоров $\mathbf{P}_k^2$ и $\mathbf{P}_k^3$ описаны в [3].

Остановимся более подробно на случае идеальной жидкости ($\nu_k = 0$). В этом случае вектор относительной скорости $\mathbf{u}_k$ можно представить в виде разложения по собственным векторным функциям $\mathbf{V}_{kl}(x_k, y_k, z_k)$ [1]:

$$\mathbf{u}_k(x_k, y_k, z_k, t) = \sum_{l=1}^{\infty} S_{kl} \mathbf{V}_{kl} \tag{19}$$

и вычислять гиростатический момент λ_k по формуле

$$\lambda_k = \sum_{l=1}^{\infty} S_{kl} \mathbf{a}_{kl}, \tag{20}$$

где

$$\mathbf{a}_{kl} = \rho_k \int_{\tau_k} \mathbf{r}_k \times \mathbf{V}_{kl} d\tau.$$

Комплексные вектор - функции $\mathbf{V}_{kl}$ ортогональны в области τ_k [1]

$$\int_{\tau_k} \mathbf{V}_{kl} \cdot \mathbf{V}_{km}^* d\tau = \begin{cases} N_{kl}^2, l = m \\ 0, \quad l \neq m. \end{cases}$$

Знак * над вектор - функцией $\mathbf{V}_{km}$ означает операцию комплексного сопряжения.

Подставив (19) в (18) и воспользовавшись ортогональностью функций $\mathbf{V}_{kl}$, получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $S_{kl}(t)$

$$N_{kl}^2 (\dot{S}_{kl} - i\lambda_{kl} S_{kl}) + \mathbf{a}_{kl}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_k = 0, \ l = 1, 2, 3, ..., \infty, \tag{21}$$

где $\lambda_{kl} = 2\omega_{k0}/\kappa_{kl}$.

Собственные векторные функции $\mathbf{V}_{kl}$ и соответствующие им собственные числа κ_{kl} определяются только геометрией полости τ_k и находятся из решения соответствующей краевой задачи [1].

Подставив (20) в (9), получим

$$\mathbf{Q}^k = \sum_{l=1}^{\infty} [\mathbf{a}_{kl} \dot{S}_{kl} + (\boldsymbol{\omega}_{k0} \times \mathbf{a}_{kl}) S_{kl}].$$

В случае осесимметричной полости τ_k [1]

$$Q_1^k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} (\dot{S}_{kl} - i\omega_{k0} S_{kl}), \ Q_2^k = iQ_1^k, \ Q_3^k = 0.$$

4. Исследование устойчивости равномерного вращения системы n гироскопов Лагранжа, содержащих идеальную жидкость. Предположим, что ось $\mathbf{l}_k$ является для тела S_k осью массовой и геометрической симметрии ($k = \overline{1, n}$).

Перейдем к новым переменным $p_k^{'}, q_k^{'},\ \alpha_{13}^k,\ \alpha_{23}^k$

$$\begin{aligned}&p_k^{'} = p_k \sin\varphi_k + q_k\cos\varphi_k,\ q_k^{'} = p_k\cos\varphi_k - q_k\sin\varphi_k;\\ &\alpha_{13}^k = \alpha_{13}^{k0}\sin\varphi_k + \alpha_{23}^{k0}\cos\varphi_k,\ \alpha_{23}^k = \alpha_{13}^{k0}\cos\varphi_k - \alpha_{23}^{k0}\sin\varphi_k;\end{aligned}$$

Пусть $\Omega_k = q_k^{'} - ip_k^{'},\ S_{kl}^{'} = e^{-i\varphi_k}S_{kl},\ \gamma_k = \alpha_{13}^k + i\alpha_{23}^k$, тогда в новых переменных система уравнений (16)-(17), (21) примет вид

$$\begin{aligned}&A_1^{'}\dot\Omega_1 + iC_1\omega_{10}\Omega_1 + s_1\textstyle\sum_{i=2}^n a_i\dot\Omega_i + 2\sum_{l=1}^\infty a_{1l}\dot S_{1l}^{'} = a_1 g\gamma_1,\\ &A_k^{'}\dot\Omega_k + iC_k\omega_{k0}\Omega_k + a_k\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} s_i\dot\Omega_k + s_k\sum_{i=k+1}^n a_i\dot\Omega_i +\\ &+2\textstyle\sum_{l=1}^\infty a_{kl}\dot S_{kl}^{'} = a_k g\gamma_k,\ k=\overline{2, n-1},\\ &A_n\dot\Omega_n + iC_n\omega_{n0}\Omega_n + a_n\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} s_i\dot\Omega_i + 2\sum_{l=1}^\infty a_{nl}\dot S_{nl}^{'} = a_n g\gamma_n;\\ &\dot\gamma_k = \Omega_k;\\ &\dot S_{kl}^{'} + i(\omega_{k0}-\lambda_{kl})S_{kl}^{'} + a_{kl}(\dot\Omega_k + i\omega_{k0}\Omega_k)/N_{1n}^2 = 0,\\ &k=\overline{1,n},\ l=1,2,...\infty.\end{aligned}$$

Представив искомые функции в виде $ae^{i\lambda t}$, запишем характеристическое уравнение возмущенного движения системы n гироскопов Лагранжа с полостями, содержащими идеальную жидкость

$$\begin{vmatrix} F_1 & s_1a_2 & \dots & s_1a_n\\ s_1a_2 & F_2 & \dots & s_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_1a_n & s_2a_n & \dots & F_n\end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

Здесь

$$F_k = A_k^{'} + \frac{C_k\omega_{k0}}{\lambda} + \frac{a_k g}{\lambda^2} - (\lambda+\omega_{k0})\sum_{l=1}^\infty \frac{E_{kl}}{\lambda+\omega_{k0}-\lambda_{kl}},\ E_{kl} = 2a_{kl}^2/N_{kl}^2.$$

Коэффициенты $E_{kl},\ \lambda_{kl}$ определяются только геометрией полости τ_k, и их значения для эллипсоидальной, цилиндрической и конической полостей можно найти в [1].

Необходимое условие устойчивости равномерного вращения системы n гироскопов Лагранжа, содержащих идеальную жидкость состоит в действительности всех корней уравнения (22). Оставляя конечное число членов ряда, можно привести это уравнение к полиномиальному виду и воспользоваться методом Штурма для определения числа действительных корней.

При отсутствии жидкости $\rho_k = 0$ $(E_{kl} = 0)$ характеристическое уравнение (22) совпадает с известным уравнением А.Я. Савченко [5].

Когда $a_2 = a_3 = ... = a_n$, т.е. точка подвеса тела S_k $(k = 2,3,...,n)$ совпадает с центром масс "увеличенного" тела S_k [5] необходимое условие устойчивости имеет вид

$$F_1\cdot F_2\cdots F_n = 0$$

или

$$A_1^{'} + \frac{C_1\omega_{10}}{\lambda} + \frac{a_1 g}{\lambda^2} - (\lambda+\omega_{10})\sum_{l=1}^\infty \frac{E_{1l}}{\lambda+\omega_{10}-\lambda_{1l}} = 0, \tag{23}$$

$$A_k^{'} + \frac{C_k\omega_{k0}}{\lambda} - (\lambda+\omega_{k0})\sum_{l=1}^\infty \frac{E_{kl}}{\lambda+\omega_{k0}-\lambda_{kl}} = 0 \tag{24}$$

Уравнение (23) совпадает с характеристическим уравнением для одного несвободного твердого тела с жидкостью, а уравнение (24) - для одного свободного твердого тела с жидкостью [2].

При исследовании необходимых условий устойчивости удобно воспользоваться уравнениями движения системы n гироскопов Лагранжа, записанными в углах А. Н. Крылова (11). Сохраняя прежние обозначения запишем уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned}
&A_1^{'}\ddot{\beta}_1 + C_1\omega_{10}\dot{\alpha}_1 + s_1\textstyle\sum_{i=2}^{n} a_i\ddot{\beta}_i + Q_1^1 e^{-i\gamma_1} = a_1 g\beta_1,\\
&A_1^{'}\ddot{\alpha}_1 - C_1\omega_{10}\dot{\beta}_1 + s_1\textstyle\sum_{i=2}^{n} a_i\ddot{\alpha}_i + iQ_1^1 e^{-i\gamma_1} = a_1 g\alpha_1,\\
&A_k^{'}\ddot{\beta}_k + C_1\omega_{k0}\dot{\alpha}_k + a_k\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} s_i\ddot{\beta}_i + s_k\sum_{i=k+1}^{n} a_i\ddot{\beta}_i + Q_1^k e^{-i\gamma_k} = a_k g\beta_k,\\
&A_k^{'}\ddot{\alpha}_1 - C_k\omega_{k0}\dot{\beta}_k + a_k\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} s_i\ddot{\alpha}_i + s_k\sum_{i=k+1}^{n} a_i\ddot{\alpha}_i + iQ_1^k e^{-i\gamma_k} = a_k g\alpha_k,\\
&A_n\ddot{\beta}_n + C_n\omega_{n0}\dot{\alpha}_n + a_n\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} s_i\ddot{\beta}_i + Q_1^n e^{-i\gamma_n} = a_n g\beta_n,\\
&A_n\ddot{\alpha}_n - C_n\omega_{n0}\dot{\beta}_n + a_n\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} s_i\ddot{\alpha}_i + iQ_1^n 1 e^{-i\gamma_n} = a_n g\alpha_n.
\end{aligned} \tag{25}$$

Пусть $u_k = \beta_k - i\alpha_k$, тогда система уравнений (25) примет вид

$$\begin{aligned}
&A_1^{'}\ddot{u}_1 + iC_1\omega_{10}\dot{u}_1 + s_1\textstyle\sum_{i=2}^{n} a_i\ddot{u}_i + 2\sum_{l=1}^{\infty} a_{1l}\dot{S}_{1l}^{'} = a_1 g u_1,\\
&A_k^{'}\ddot{u}_k + iC_k\omega_{k0}\dot{u}_k + a_k\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} s_i\ddot{u}_i + s_k\sum_{i=k+1}^{n} a_i\ddot{u}_i + 2\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\dot{S}_{kl}^{'} = a_k g u_k,\\
&A_n\ddot{u}_n + iC_n\omega_{n0}\dot{u}_n + a_n\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} s_i\ddot{u}_i + 2\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}\dot{S}_{nl}^{'} = a_n g u_n,\\
&\dot{S}_{kl}^{'} + i(\omega_{k0} - \lambda_{kl})S_{kl}^{'} + (\ddot{u}_k + i\omega_{k0}\dot{u}_k)a_{kl}/N_{kl}^2 = 0,\ k = \overline{1,n},\ l = 1, 2, ..., \infty.
\end{aligned} \tag{26}$$

Легко заметить, что характеристическое уравнение для системы (26) совпадает с характеристическим уравнением (22).

Запишем уравнения возмущенного движения по инерции n одинаковых гироскопов Лагранжа, соединенных упругими сферическими шарнирами ($c_k = c$, $s_k = 2c$, $m_k = m$, $\mathbf{A}_k^c = \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
&A_1^{'}\ddot{u}_1 + iC\omega_{10}\dot{u}_1 + \mu\textstyle\sum_{i=2}^{n} a_i\ddot{u}_i + 2\sum_{l=1}^{\infty} a_{1l}\dot{S}_{1l}^{'} = \kappa_1^2(u_2 - u_1),\\
&A_k^{'}\ddot{u}_k + iC\omega_{k0}u_k + \mu a_k\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\ddot{u}_i + \mu(2k-1)\sum_{i=k+1}^{n} a_i\ddot{u}_i +\\
&+2\textstyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\dot{S}_{kl}^{'} = \kappa_k^2(u_{k+1} - u_k) - \kappa_{k-1}^2(u_k - u_{k-1}),\ k = \overline{2, n-1},\\
&A_n^{'}\ddot{u}_n + iC\omega_{n0}\dot{u}_i + \mu\textstyle\sum_{i=2}^{n} a_i\ddot{u}_i + 2\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}\dot{S}_{nl}^{'} = -\kappa_{n-1}^2(u_n - u_{n-1}),\\
&\dot{S}_{kl}^{'} + i(\omega_{k0} - \lambda_{kl})S_{kl}^{'} + a_{kl}(\ddot{u}_k + i\omega_{k0}\dot{u}_k)/N_{kl}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь

$$A_k^{'} = A + \mu mc[(2n-2k+1)(2k-1) - n],\ (A_1^{'} = A_n^{'}),\ a_k = (2n-2k+1)mc,\ \mu = c/n;$$

κ_k^2 - жесткость k-ого сферического шарнира;

Характеристическое уравнение возмущенного движенияы (27) имеет вид

$$\begin{vmatrix}
F_1 & \mu_{12} + \kappa_1^2/\lambda^2 & \mu_{13} & \dots & \mu_{1n-1} & \mu_1 n_n\\
\mu_{12} + \kappa_1^2/\lambda^2 & F_2 & \mu_{23} + \kappa_2^2/\lambda^2 \dots & \mu_{2n-1} & \mu_{2n} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\mu_{1n} & \mu_{2n} & \mu_{3n} & \dots & \mu_{n-1n} + \kappa_{n-1}^2/\lambda^2 & F_n
\end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

где $\mu_{ij} = \mu(2i-1)a_i$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $n = 3$ и твердые тела связаны упругими сферическими шарнирами.

а) Несвободная система ССТТЖ. В этом случае характеристическое уравнение (22) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} F_1 & s_1a_2 + \kappa_1^2/\lambda^2 & s_1a_3 \\ s_1a_2 + \kappa_1^2/\lambda^2 & F_2 & s_2a_3 + \kappa_2^2/\lambda^2 \\ s_1a_3 & s_2a_3 + \kappa_2^2/\lambda^2 & F_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{29}$$

где

$$F_k = A_k' + \frac{C_k\omega_{k0}}{\lambda} + \frac{a_kg - \kappa_{k-1}^2 - \kappa_k^2}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{k0})\sum_{l=1}^{\infty}\frac{E_{kl}}{\lambda + \omega_{k0} - \lambda_{kl}},$$

$$A_1' = A_1 + m_{23}s_1^2,\ A_2' = A_2 + m_3s_2^2,\ a_1 = m_1c_1 + s_1m_{23},$$
$$a_2 = m_2c_2 + m_3s_2,\ a_3 = m_3c_3,\ \kappa_0 = \kappa_3 = 0,\ m_{ij} = m_i + m_j.$$

b) Свободная система ССТТЖ. В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1 + \kappa_1^2/\lambda^2 & \mu_2 \\ \mu_1 + \kappa_1^2/\lambda^2 & F_2 & \mu_3 + \kappa_2^2/\lambda^2 \\ \mu_2 & \mu_3 + \kappa_2^2/\lambda^2 & F_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Здесь

$$F_k = A_k' + \frac{C_k\omega_{k0}}{\lambda} - \frac{\kappa_{k-1}^2 + \kappa_k^2}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{k0})\sum_{l=1}^{\infty}\frac{E_{kl}}{\lambda + \omega_{k0} - \lambda_{kl}},$$

$$A_1' = A_1 + \frac{m_1m_{23}}{m}c_1^2,\ A_2' = A_2 + \frac{m_2m_{13}c_2^2 - 2m_2m_3c_2s_2 + m_3m_{12}s_2^2}{m},\ A_3' = A_3 + \frac{m_3m_{12}}{m}c_3^2,$$
$$\mu_1 = \frac{m_1c_1}{m}(m_2c_2 + m_3s_2),\ \mu_2 = \frac{m_1m_3}{m}c_1c_3,\ \mu_3 = \frac{m_3c_3}{m}[m_1s_2 + (s_2 - c_2)m_2].$$

2. Пусть $n = 2$ и твердые тела связаны упругим сферическими шарнирами.

а) Несвободная система ССТТЖ. В этом случае характеристическое уравнение (22) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} F_1 & s_1a_2 + \kappa_1^2/\lambda^2 \\ s_1a_2 + \kappa_1^2/\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{31}$$

где

$$A_1' = A_1 + m_2s_1^2,\ a_1 = m_1c_1 + s_1m_2,\ a_2 = m_2c_2.$$

b) Свободная система ССТТЖ. В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1 + \kappa_1^2/\lambda^2 \\ \mu_1 + \kappa_1^2/\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

Здесь

$$A_1' = A_1 + \frac{m_1m_2}{m}c_1^2,\ A_2' = A_2 + \frac{m_2m_1}{m}c_2^2, \mu_1 = \frac{m_1c_1}{m}m_2c_2,\ .$$

Характеристические уравнения (31) и (32) совпадают с уравнениями, полученными и исследованными в работе [2].

Уравнение (30) в случае одинаковых тел S_1, S_2 и S_3 и $\omega_{10}=\omega_{20}=\omega_{30}=\omega_0$, $\kappa_1=\kappa_2=0$ может быть представлено в виде

$$(\tilde{F}-\frac{2}{3})(\tilde{F}-\frac{1}{3})(\tilde{F}+\frac{7}{3})=0, \tag{33}$$

где

$$\tilde{F}=\frac{1}{mc^2}F=\frac{1}{mc^2}(A+\frac{2}{3}mc^2+\frac{C\omega_0}{\lambda}-(\lambda+\omega_0)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{E_l}{\lambda+\omega_0-\lambda_l}).$$

Уравнение (32) в случае одинаковых тел S_1 и S_2 при $\kappa_1=0$ может быть записанно следующим образом

$$(\tilde{F}-\frac{1}{2})(\tilde{F}+\frac{1}{2})=0. \tag{34}$$

Здесь

$$\tilde{F}=\frac{1}{mc^2}F=\frac{1}{mc^2}(A+\frac{1}{2}mc^2+\frac{C\omega_0}{\lambda}-(\lambda+\omega_0)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{E_l}{\lambda+\omega_0-\lambda_l}).$$

Из уравнений (33) и (34) следует, что если вращение вокруг центра масс одного твердого тела с жидкостью неустойчиво, то вращение все системы также будет неустойчиво. По всей видимости этот вывод будет справедлив не только для $n=2,3$, но и в общем случае.

1. *Докучаев Л.В., Рвалов В.В.* Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР, МТТ. – 1973. – N 2.- С. 6–14.
2. *Кононов Ю.Н.* О движении системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. – 1997. – Вып.29. – С. 76 – 85.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989.– 416с.
4. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость.– М.: Наука, 1965.– 439с.
5. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость стационарных движений механических систем.– Киев: Наук. думка, 1977. – 160с.
6. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела.– 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
7. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 230с.
8. *Kononov Yu.N.* On the Motion of System of the Rigid Bodies with Cavities Containing Fluid // 15 th World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics (IMACS 97, Berlin, August, 1997), Proceedings, v.3. Computational Physics, Chemistry and Biology.– 1997.– P.401-406.

Донец. гос. ун-т Получено 22.11.99