Что касается теоремы 2, то она дает следующие условия устойчивости:

$$-\frac{2b(3a-1)\gamma + a_0(a+b) - 2b(1-b)}{4ab} \leq n^2, \quad \widehat{p} \geq [n^2 + 2\pi n(n+1)tg\frac{\pi}{2(n+1)}],$$

$$\frac{1}{a_0(a+b)}[-(a+b)\kappa + (5a^2 - 4ab - 4a + 2b + 1)\gamma^2 -$$
$$-2(ab + b^2 + 2a - b - 1)\gamma - 4ab - b^2 + 1] \leq n^2. \quad (25)$$

Таким образом, достаточные условия устойчивости тривиального решения уравнения (12) представляют собой объединение четырех групп условий, определяемых, соответственно, неравенствами: а) (18), (20); б) (19), (22); в) (23), (24); г) (25).

Замечание. Поскольку система (9) была сведена к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка, то найденные условия обеспечивают устойчивость нулевого решения этой системы при дополнительном условии – отсутствии $\pi-$ периодического решения у уравнения (12) (нерезонансный случай). В противном (резонансном) случае найденные условия гарантируют лишь отсутствие характеристических показателей с положительными вещественными частями у системы уравнений в вариациях (для исходной нелинейной системы имеет место критический по Ляпунову случай).

1. *Болграбская И.А., Веласко Г.Э.* Регулярная прецессия системы гироскопов Лагранжа, образующих полузамкнутую цепь // Тр. ин-та прикл. матемики и механики. - 1998. - Т.2. - С. 3 - 9.
2. *Веласко Г.Э., Пузырев В.Е.* Об устойчивости движения системы двух гироскопов Лагранжа, образующих полузамкнутую цепь // Там же. - С. 17 - 21.
3. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - Москва: Наука, 1972. - 720 с.

Донец. гос. ун-т,
Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, Донецк

Получено 08.12.99

УДК 531.38

©2000. **Н.А. Николаева**

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТЯЖЕЛЫХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛУЗАМКНУТУЮ ЦЕПЬ

В настоящей работе рассматривается система трех гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами и образующих полузамкнутую цепь. Исследуются необходимые условия устойчивости равномерных вращений этой системы вокруг вертикали для случая одинаковых тел.

В работе [1] были введены в рассмотрение системы связанных твердых тел, образующих полузамкнутую цепь. Частным случаем таких систем служит система, в которой точка O_1 тела S_1 является неподвижной, а точка O_{n+1} тела S_n во все время движения принадлежит вертикальной прямой O_1Z. Эти системы представляют интерес в связи с возможностью их использования при моделировании упругих стержневых объектов с двумя опорами на концах.

Уравнения движения. Уравнения движения систем с полузамкнутой цепью для случая n тяжелых твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами, получены в [1] в форме, предложенной П.В. Харламовым [5].

В случае $n = 3$ они имеют вид

$$\left(\widehat{A}_1\boldsymbol{\omega}_1\right)^{\cdot} + m_1 g\mathbf{c}_1 \times \mathbf{e}_z + h_1\mathbf{e}_1^z \times [(m_2+m_3)g\mathbf{e}_z + (m_2+m_3)h_1\dot{\mathbf{b}}_1 +$$

$$+(m_2c_2 + m_3h_2)\dot{\mathbf{b}}_2 + m_3c_3\dot{\mathbf{b}}_3] + h_1\mathbf{e}_1^z \times (R_4^x\mathbf{e}_x + R_4^y\mathbf{e}_y) = \kappa^2(\mathbf{e}_1^z \times \mathbf{e}_2^z),$$

$$\left(\widehat{A}_2\boldsymbol{\omega}_2\right)^{\cdot} + m_2\mathbf{c}_2 \times (g\mathbf{e}_z + h_1\dot{\mathbf{b}}_1) + m_3h_2\mathbf{e}_2^z \times (g\mathbf{e}_z + h_1\dot{\mathbf{b}}_1 + h_2\dot{\mathbf{b}}_2 + c_3\dot{\mathbf{b}}_3) +$$

$$+h_2\mathbf{e}_2^z \times (R_4^x\mathbf{e}_x + R_4^y\mathbf{e}_y) = \kappa^2(\mathbf{e}_2^z \times \mathbf{e}_3^z - \mathbf{e}_1^z \times \mathbf{e}_2^z),$$

$$\left(\widehat{A}_3\boldsymbol{\omega}_3\right)^{\cdot} + m_3\mathbf{c}_3 \times (g\mathbf{e}_z + h_1\dot{\mathbf{b}}_1 + h_2\dot{\mathbf{b}}_2) + h_3\mathbf{e}_3^z \times (R_4^x\mathbf{e}_x + R_4^y\mathbf{e}_y) = -\kappa^2(\mathbf{e}_2^z \times \mathbf{e}_3^z). \qquad (1)$$

При этом выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{3} h_i(\mathbf{e}_i^z \cdot \mathbf{e}_x) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} h_i(\mathbf{e}_i^z \cdot \mathbf{e}_y) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты неподвижной инерциальной системы координат O_1XYZ, в которой ось O_1Z направлена противоположно вектору силы тяжести; $\mathbf{e}_k^x, \mathbf{e}_k^y, \mathbf{e}_k^z$ – орты подвижной системы координат $O_kX_kY_kZ_k$, жестко связанной с каждым телом, направленные по их главным осям инерции так, что $\mathbf{e}_k^z$ коллинеарен вектору $\mathbf{O}_k\mathbf{O}_{k+1}$; $\widehat{A}_k$ – тензор инерции тела S_k в точке O_k, $\boldsymbol{\omega}_k$ – угловая скорость тела S_k; $\mathbf{c}_k = \mathbf{O}_k\mathbf{C}_k$, где C_k – центр масс тела S_k, $h_k = O_kO_{k+1}$; m_k – масса S_k; κ^2 – жесткость шарнира в точке O_k $(k = 2, 3)$; R_4^x, R_4^y – компоненты силы реакции связи в точке O_4, $\mathbf{b}_k = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_k^z$.

Пусть $\mathbf{c}_k = c_k\mathbf{e}_k^z$, тогда система уравнений (1),(2) допускает решение

$$\alpha_k = \beta_k = 0, \quad \dot{\gamma}_k = \omega_k = \text{const} \quad (k = 1, 2, 3), \quad R_4^x = R_4^y = 0, \qquad (3)$$

которое соответствует равномерным вращениям каждого из тел системы вокруг третьих главных осей, совпадающих с вертикалью. В формуле (3) $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ - углы Крылова, определяющие положение системы координат, неизменно связанной с телом S_k, по отношению к неподвижной системе координат.

Полагаем далее, что тела представляют собой гироскопы Лагранжа и вращаются с одинаковыми угловыми скоростями. Тогда $A_k = B_k$, $\omega_k = \omega$ $(k = 1, 2, 3)$.

Проектируя векторное уравнение движения тела S_k на оси связанной с ним подвижной системы координат, получим систему уравнений (1) в скалярной форме.

Положим в возмущенном движении $\alpha_k = x_k$, $\beta_k = y_k$, $\dot{\alpha}_k = \dot{x}_k$, $\dot{\beta}_k = \dot{y}_k$, $\dot{\gamma}_k = \omega + \dot{z}_k$, $R_4^x = R_1$, $R_4^y = R_2$. Линейные уравнения (1),(2) возмущенного движения (3) имеют вид:

$$A_1'(\ddot{z}_1 - 2\omega i\dot{z}_1 - \omega^2 z_1) + C_1\omega(i\dot{z}_1 + \omega z_1) - \mu_1 z_1 + \mu(\ddot{z}_2 - 2\omega i\dot{z}_2 - \omega^2 z_2) +$$

$$+\mu'(\ddot{z}_3 - 2\omega i\dot{z}_3 - \omega^2 z_3) - ih_1 Z + \kappa^2(z_1 - z_2) = 0,$$

$$A_2'(\ddot{z}_2 - 2\omega i\dot{z}_2 - \omega^2 z_2) + C_2\omega(i\dot{z}_2 + \omega z_2) - \mu_2 z_2 + \mu(\ddot{z}_1 - 2\omega i\dot{z}_1 - \omega^2 z_1) +$$

$$+\mu''(\ddot{z}_3 - 2\omega i\dot{z}_3 - \omega^2 z_3) - ih_2 Z - \kappa^2(z_3 - 2z_2 + z_1) = 0,$$

$$A_3(\ddot{z}_3 - 2\omega i\dot{z}_3 - \omega^2 z_3) + C_3\omega(i\dot{z}_3 + \omega z_3) - \mu_3 z_3 + \mu'(\ddot{z}_1 - 2\omega i\dot{z}_1 - \omega^2 z_1) +$$

$$+\mu''(\ddot{z}_2 - 2\omega i\dot{z}_2 - \omega^2 z_2) - ih_3 Z + \kappa^2(z_3 - z_2) = 0,$$

$$h_1 z_1 + h_2 z_2 + h_3 z_3 = 0, \tag{4}$$

где

$$z_k = x'_k + iy'_k, \quad Z = R'_1 + iR'_2, \quad x'_k = x_k \cos\omega t - y_k \sin\omega t, \quad y'_k = x_k \sin\omega t + y_k \cos\omega t,$$

$$R'_1 = R_1 \cos\omega t - R_2 \sin\omega t, \quad R'_2 = R_1 \sin\omega t + R_2 \cos\omega t,$$

$$A'_1 = A_1 + (m_2 + m_3)h_1^2, \quad \mu = (m_2 c_2 + m_3 h_2)h_1, \quad \mu_1 = [m_1 c_1 + (m_2 + m_3)h_1]g,$$

$$\mu' = m_3 c_3 h_1, \quad A'_2 = A_2 + m_3 h_2^2, \quad \mu_2 = (m_2 c_2 + m_3 h_2)g, \quad \mu'' = m_3 c_3 h_2, \quad \mu_3 = m_3 c_3 g,$$

A_k, C_k – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции тела S_k $(k = 1, 2, 3)$.

Уравнения для $\overline{z}_k, \overline{Z}$ получаем из (4) заменой i на $-i$.

Исследование устойчивости равномерных вращений. Рассмотрим случай, когда тела одинаковы, при этом $m_k = m,\ A_k = A,\ C_k = C,\ h_k = h,\ c_k = c\ (k = 1, 2, 3)$, и неуравновешены (центры масс находятся выше точки опоры), тогда $c > 0$. Пусть $h = 2c$.

Разыскивая решения системы (4) в виде $z_k = z_k^o e^{i(\lambda+\omega)t}$, $Z = Z^o e^{i(\lambda+\omega)t}$ $(k = 1, 2, 3)$, где λ - некоторые постоянные, приходим к уравнению

$$\lambda^4[3A^2 + 4mc^2(A - mc^2)] + 2\lambda^3\omega C(3A + 2mc^2) + \lambda^2[3C^2\omega^2 + 12(mcg - \kappa^2)(A + mc^2) +$$

$$+6mcg - 4mc^2\kappa^2] + 6\lambda\omega C(3mcg - 2\kappa^2) + 23(mcg)^2 - 36mcg\kappa^2 + 9\kappa^4 = 0. \tag{5}$$

Введем безразмерные параметры

$$v = C\omega/\sqrt{Amcg}, \quad a = mc^2/A, \quad b = \kappa^2/mcg, \quad \lambda = \lambda_1\sqrt{mcg/A}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) запишется следующим образом:

$$\lambda_1^4(-4a^2 + 4a + 3) + 2\lambda_1^3 v(3 + 2a) + \lambda_1^2[3v^2 + 12(1 - b)(1 + a) + 6 - 4ab] +$$

$$+6\lambda_1 v(3 - 2b) + 23 - 36b + 9b^2 = 0. \tag{7}$$

Отметим, что в уравнении (7), согласно (6), $a > 0$, $b > 0$, и кроме того, $a - 1 < 0$, поскольку $a - 1 = (mc^2 - A)/A = -A_c A$, где A_c - центральный экваториальный момент инерции тела.

Необходимые условия устойчивости равномерных вращений будут выполнены, если все корни λ_1 уравнения (7) действительны.

Для определения количества действительных корней (7) воспользуемся графоаналитическим методом, предложенным в работе [3]. Запишем (7) следующим образом:

$$3\lambda_1^2 v^2 + 2q(\lambda_1)\lambda_1 v + r(\lambda_1) = 0, \tag{8}$$

где

$$q(\lambda_1) = \lambda_1^2(3 + 2a) + 3(3 - 2b), \quad r(\lambda_1) = r_2\lambda_1^4 + 2r_1\lambda_1^2 + r_0,$$

$$r_2 = -4a^2 + 4a + 3 > 0, \quad r_1 = 6(1 - b)(1 + a) + 3 - 2ab,$$

$$r_0 = 9b^2 - 36b + 23.$$

Корни уравнения (8):

$$v_{1,2} = \frac{-q(\lambda_1) \pm \sqrt{q^2(\lambda_1) - 3r(\lambda_1)}}{3\lambda_1}. \tag{9}$$

Построим график функции (9), из которого для любого заданного значения безразмерной скорости вращения v можно определить количество действительных корней уравнения (7).

Поскольку $v_{1,2}(\lambda_1)$ является нечетной функцией, то исследование функции (8) достаточно провести при $\lambda_1 > 0$.

Ось $\lambda_1 = 0$ является вертикальной ассипмтотой. Для $v_1(\lambda_1)$ имеем наклонную асимптоту $l_1 = (2a-3)\lambda_1$, для $v_2(\lambda_1)$ - $l_2 = -(6a+3)\lambda_1$, а значит при $\lambda_1 \to +\infty$ $v_1(\lambda_1) \to -\infty$, $v_2(\lambda_1) \to -\infty$, причем $v_2(\lambda_1) < v_1(\lambda_1)$.

Рассмотрим случаи, когда параметр b принадлежит одному из следующих интервалов $B_1 = (0, b_1^*)$, $B_2 = (b_1^*, b_2^*)$ и $B_3 = (b_2^*, \infty)$, где b_1^*, b_2^* – корни уравнения $r_0(b) = 0$.

Для $b \in B_1$ имеем $r(\lambda_1) > 0$, поскольку $r_i > 0$ $(i = 0,1,2)$. Отсюда заключаем, что уравнение $r(\lambda_1) = 0$ не имеет действительных корней, а значит, график функции $v(\lambda_1)$ не пересекает ось $O\lambda_1$. Кроме того, $q(\lambda_1) > 0$, тогда $v_1(\lambda_1) < 0, v_2(\lambda_1) < 0$, и при $\lambda_1 \to 0$ $v_1(\lambda_1) \to -\infty$, $v_2(\lambda_1) \to -\infty$. Схематический график функции изображен на рис. 1.

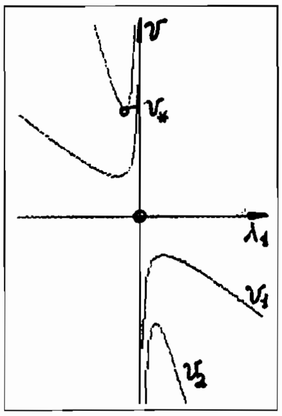

Рис. 1

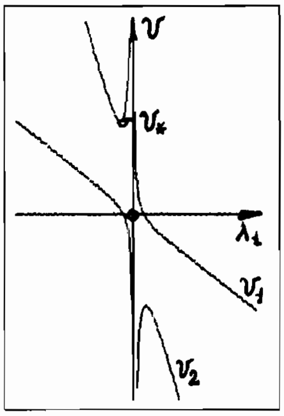

Рис. 2

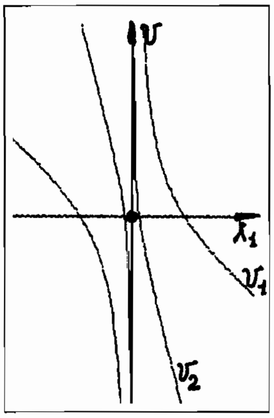

Рис. 3

Если $b \in B_2$, то уравнение $r(\lambda_1) = 0$ имеет один положительный корень, а график функции $v_{1,2}(\lambda_1)$ – одно пересечение с осью λ_1. Поскольку $\lim\limits_{\lambda_1 \to 0} r(\lambda_1) = r_0 < 0$, то $d_1 = q^2(\lambda_1) - 3r(\lambda_1) > q^2(\lambda_1)$ при $\lambda_1 \to 0$, и $v_1(\lambda_1) \to +\infty$, $v_2(\lambda_1) \to -\infty$ при $\lambda_1 \to 0$. График функции изображен на рис. 2.

Для $b \in B_3$ получаем существование двух положительных корней уравнения $r(\lambda_1) = 0$, поскольку $r_1 < 0$, $r_0 > 0$, $r_2 > 0$ и $d_1 = r_1^2 - r_2 r_0 > 0$. Это означает, что график $v_{1,2}(\lambda_1)$ имеет два пересечения с осью $O\lambda_1$. При $\lambda_1 \to 0$ $q(\lambda_1) < 0$, $d_1 = q^2(\lambda_1) - 3r(\lambda_1) < q^2(\lambda_1)$, и $v_1(\lambda_1) \to +\infty$, $v_2(\lambda_1) \to +\infty$. График представлен на рис. 3.

Анализ рис. 1 и 2 позволяет заключить, что для $b \in B_1$ либо $b \in B_2$ уравнение (7) имеет четыре действительных корня при $v^2 > v_*^2 = v_*^2(b)$. Если же $b \in B_3$, как следует из рис. 3, уравнение (7) имеет все действительные корни при любом значении v.

В заключение рассмотрим случаи, когда $b = b_1^*$ и $b = b_2^*$. При этом $r_0 = 0$, $r(\lambda_1) = \lambda_1^2(r_2\lambda_1^2 + 2r_1) = \lambda_1 r_3(\lambda_1)$, и для (7) сразу имеем действительный корень $\lambda_1 = 0$.

Тогда необходимыми условиями устойчивости будут условия существования всех действительных корней λ_1 кубического уравнения

$$3\lambda_1 v^2 + 2q(\lambda_1)v + r_3(\lambda_1) = 0. \qquad (10)$$

Разрешая (10) относительно v, получим (8). Построим для (8) график.

Учитывая, что $r_3(0) = 0$, при $b = b_1^*$ имеем $q = \lim\limits_{\lambda_1 \to 0} q(\lambda_1) > 0$, и $v_1^*(0) = 0$, $v_2^*(\lambda_1) \to -\infty$ при $\lambda_1 \to 0$; для $b = b_2^*$ $q < 0$, и $v_1^*(\lambda_1) \to +\infty$ при $\lambda_1 \to 0$, $v_2^*(0) = 0$. Значению $b = b_1^*$ соответствует график на рис. 4, $b = b_2^*$ – на рис. 5.

Анализируя график на рис. 4 получаем, что уравнение (10) имеет три действительных корня для $v^2 > v_*^2$. Из рис. 5 имеем действительность всех корней этого уравнения для любого значения v.

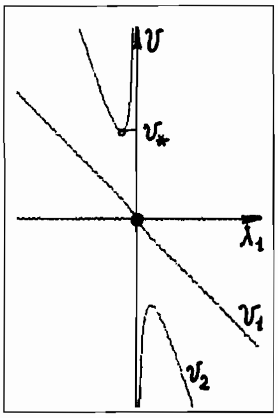

Рис. 4

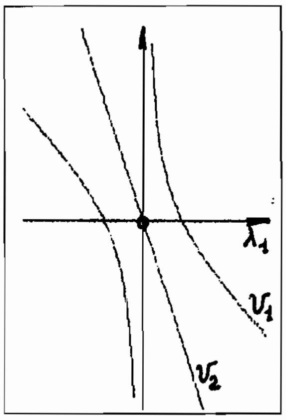

Рис. 5

Итак, для системы трех одинаковых неуравновешенных гироскопов Лагранжа необходимые условия устойчивости равномерных вращений будут выполнены, начиная с некоторого значения угловой скорости ω, причем для значений жесткости шарнира $\kappa^2 \geq b_2^* mcg$, где $b_2^* \approx 3,2$, движение будет устойчивым при любых ω.

Отметим, что полученный результат возникает лишь для систем, образующих полузамкнутую цепь [2]. Для свободных и несвободных систем твердых тел [4], для тела на струне [3] устойчивость равномерных вращений вокруг вертикали возможна только начиная с некоторого значения угловой скорости.

Случай уравновешенных тел. Рассмотрим теперь систему, состоящую из уравновешенных тел (центры масс находятся ниже точки опоры). Тогда $c < 0$. Производя в уравнении (5) замену c на $-c$ и полагая $c > 0$, в уравнении (8) имеем следующие коэффициенты:

$$q(\lambda_1) = \lambda_1^2(3 + 2a) - 3(3 + 2b), \quad r(\lambda_1) = r_2\lambda_1^4 + 2r_1\lambda_1^2 + r_0,$$

$$r_2 = -4a^2 + 4a + 3 > 0, \quad r_1 = -6(1 + b)(1 + a) - 3 - 2ab < 0, \quad r_0 = 9b^2 + 36b + 23 > 0,$$

и $d = q^2(\lambda_1) - 3r(\lambda_1) = 16ab^2\lambda_1^4 + 24ab\lambda_1^2 + 3(4 + 3b^2) > 0$.

Рассмотрим уравнение $r(\lambda_1^2) = 0$. Поскольку его дискриминант $d_1 = b^2(100a^2 + 60a + 9) + 24ab(10a + 3) + 4(32a^2 + 4a + 3) > 0$ и имеется две перемены знака в коэффициентах, то данное уравнение имеет два действительных корня, а значит, $v_{1,2}(\lambda_1)$ дважды пересекает ось $O\lambda_1$ при $\lambda_1 > 0$. Изучим поведение функций $v_1(\lambda_1)$, $v_2(\lambda_1)$ в окрестности нуля и на бесконечности. Поскольку $\lim\limits_{\lambda_1 \to 0} r(\lambda_1) = r_0 > 0$, $\lim\limits_{\lambda_1 \to 0} q(\lambda_1) = -3(3 + 2b) < 0$, то при $\lambda_1 \to 0$ $v_1(\lambda_1) \to +\infty$, $v_2(\lambda_1) \to +\infty$. При $\lambda_1 \to +\infty$ поведение функции $v_{1,2}(\lambda_1)$ аналогично случаю $c > 0$. График функции такой же как на рис. 3. Следовательно, для уравновешенных тел необходимые условия устойчивости выполняются при любых значениях угловой скорости ω. Этот результат совпадает с полученным в [4] для несвободных систем.

1. *Болграбская И.А., Савченко А.Я.* Системы связанных твердых тел, образующих полузамкнутую цепь.- 1994. - Вып.26(2). – С.33 – 40.
2. *Веласко Эррера Г.* Устойчивость равномерных вращений системы двух гироскопов Лагранжа, образующих полузамкнутую цепь// Механика твердого тела. – 1997. – Вып.29. – С.50 –54.
3. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. – М.: Наука, 1991. – 330 с.
4. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. - Киев: Наук. думка, 1991. – 168 с.
5. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы связанных твердых тел// Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52 – 73.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 10.11.99

УДК 531.36

©2000. **Н.Н. Чинкуляк**

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

С помощью интегралов уравнений возмущенного движения установлена устойчивость регулярной прецессии в обобщенной задаче [2] о движении твердого тела с неподвижной точкой.

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим описанную в работе [2] систему четырех связанных тяжелых твердых тел S_0, S_1, S_2, S_3, движущуюся под действием силы тяжести. В этой системе тело S_0 с массой m_0 имеет неподвижную точку O. Тела S_i $(i = 1,2,3)$ с массами m_i имеют общие точки O_i с телом S_0. Точки O_i $(i = 1,2,3)$ находятся соответственно на первой, второй и третьей оси системы координат $O\mathbf{e}_1^{(0)}\mathbf{e}_2^{(0)}\mathbf{e}_3^{(0)}$, жестко связанной с телом S_0. Точки O_i' $(i = 1,2,3)$, принадлежащие телам S_i $(i = 1,2,3)$ соответственно, во все время движения находятся на оси, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{\gamma}$, направленным противоположно вектору силы тяжести. Кроме того $|\mathbf{OO}_i| = |\mathbf{O}_i\mathbf{O}_i'| = l_i$. В точках O и O_i' $(i = 1,2,3)$ расположены идеальные сферические шарниры, а в точках O_i $(i = 1,2,3)$ – специальные шарниры [2], обеспечивающие симметрию движений тел S_i и S_0 относительно плоскости π_i, проходящей через точку O_i перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\gamma}$.

Кинетическая T и потенциальная П энергии такой системы определяются равенствами [2]

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot A\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot B(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}), \qquad \Pi = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1^{(0)} + \omega_2\mathbf{e}_2^{(0)} + \omega_3\mathbf{e}_3^{(0)}$ – абсолютная угловая скорость тела S_0, $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1\mathbf{e}_1^{(0)} + \gamma_2\mathbf{e}_2^{(0)} + \gamma_3\mathbf{e}_3^{(0)}$ – единичный вектор вертикали; $A = \|A_{ij}\|$ – симметричная матрица, элементы которой таковы:

$$A_{11} = \sum_{i=0}^{3} A_{11}^{(i)} + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2 - 2m_2 l_2 c_2^{(2)} - 2m_3 l_3 c_3^{(3)}, \qquad (123)$$

$$A_{21} = A_{12} = A_{12}^{(0)} - A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(2)} + A_{12}^{(3)} - m_1 l_1 c_2^{(1)} - m_2 l_2 c_1^{(2)},$$