9. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966. – 320 с.
10. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ.– Сер. мат., механ., физ., астрон., хим.– 1957.– N 4.– С.9–16.
11. *Румянцев В.В.* Некоторые задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.– М.: Наука, 1972.– С.429–436.
12. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.– М.: Наука, 1987.– 256 с.
13. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
14. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем.– Киев: Наук. думка, 1989.– 208 с.
15. *Шиманов С.Н.* Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // Прикл. математика и механика – 1960. – **24**, вып. 3. – С.447–457.
16. *Burton T.A.* Uniform Asimptotic Stability in Functional Differential Equations // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1978. – **68**, N 2. – P. 195–199.
17. *Hahn W.* Stability of motion. – New York-Berlin-Heidelberg: Springer, 1967.– 446 p.
18. *Ignatyev A.O.* On the asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1999. – **127**, – N 6. – P. 1753–1760.

Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, Донецк Получено 22.07.98

УДК 531.36

©2000. **В.А. Гончаренко, В.И. Гончаренко**

О СТАБИЛИЗАЦИИ ОДНОЙ НЕУСТОЙЧИВОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

Построено однопараметрическое множество систем, потенциальная энергия которых имеет строгий максимум, и обладающих той особенностью, что с ростом величины параметра система не становится ни более "жесткой", ни более "мягкой", а гироскопические силы с особой матрицей коэффициентов неограниченно растут, не нарушая при этом временной устойчивости всей системы.

1. Введение. Суждения об устойчивости линейной механической системы по виду действующих на нее сил берут начало от Томсона (Кельвина) и Тета. Возможность таких суждений для системы общего вида $ADGFE$ развита в работах И.И.Метелицына [5]. Такое направление исследований получило название влияние "структуры сил" на поведение системы.

2. Постановка задачи. Рассматривается линейная механическая система, стесненная стационарными геометрическими связями. Ее состояние относительно положения равновесия определяется обобщенными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Возмущенное движение такой системы описывается следующими уравнениями

$$A * \ddot{x} + D * \dot{x} - G * \dot{x} + F * x - E * x = 0. \quad (1)$$

Здесь положительно определенная матрица A характеризует инерционные свойства системы. Матрицы D и F – симметрические, отвечающие диссипативно-ускоряющим и потенциальным силам. Матрицы G и E – кососимметрические, определяющие гироскопические и позиционные непотенциальные силы, $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – вектор-столбец обобщенных координат, $(\dot{}) \equiv \frac{d}{dt}$ – производная по времени. Все матрицы действительные и имеют порядок n.

Для такой системы $ADGFE$ (1) общего вида формулируется проблема о влиянии "структуры сил" на поведение системы и, в частности, на устойчивость ее движения, а также на возможность ее стабилизируемости за счет выбора гироскопических и (или) позиционных непотенциальных сил [2, 4].

Далее всюду матрица A предполагается единичной, $A = I$.

Известно, что существуют абсолютно неустойчивые системы AF $(F \ll 0)$, устойчивость которых может быть обеспечена за счет выбора гироскопических сил с особой матрицей коэффициентов, $\det G = 0$ [3]. Доказано также, что при пропорциональном увеличении исключительно гироскопических сил устойчивость таких систем разрушается [6]. В данной работе приведен класс систем, сохраняющих устойчивость при неограниченном возрастании гироскопических сил (при условии $\det G = 0$).

3. Описание однопараметрического класса систем, обладающего временной устойчивостью. Рассматривается частный случай системы (1), когда в линейной системе AGF потенциальная энергия имеет строгий максимум, $U(x) = \frac{1}{2}(x, Fx) < 0$ при любом отклонении системы от положения равновесия $x \neq 0$, т. е. матрица потенциальных сил отрицательно определенная, $F \ll 0$.

Для этой системы известна проблема *временной* стабилизации положения равновесия гироскопическими силами с особой матрицей коэффициентов, $\det G = 0$. Пример одной $(n = 4)$ такой устойчивой системы построен в 1975 г. [3]. В то же время устойчивость любой системы такого вида разрушается при пропорциональном увеличении гироскопических сил [6]. Однако в общем случае увеличения гироскопических сил это может быть не так. Необходимо подчеркнуть, что под увеличением силы, характеризуемой особой кососимметрической матрицей, понимается поэлементное увеличение ненулевых элементов ее канонической формы.

В качестве примера может быть использовано обобщение конкретной системы [3] на однопараметрический класс линейных безусловно неустойчивых потенциальных систем $(F \ll 0)$, устойчивость которых обеспечивается гироскопическими силами с вырожденной матрицей коэффициентов:

$$\ddot{x} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & p & 0 \\ -1 & 0 & 0 & p \\ -p & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & -p & -p^2 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} -p^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^3 \end{pmatrix} x = 0, \quad x \in R^4. \tag{2}$$

Особенностью этого класса является то, что с ростом величины действительного параметра p система не становится ни более "жесткой", ни более "мягкой". Понятия более "жесткая" система или более "мягкая" (или система "не ужесточается") используются в общепринятом смысле [1] на основании сравнения значений потенциальной энергии $\widetilde{U}(x) = \frac{1}{2}(x, \widetilde{F}x)$ системы $A\widetilde{F}$ с матрицей $\widetilde{F} = -F$ при одних и тех же значениях инерционной матрицы A и вектора обобщенных координат x.

В то же время при увеличении параметра p гироскопические силы неограниченно растут, поскольку они характеризуются кососимметрической матрицей G, имеющей характеристический многочлен $\det(\nu I - G) = \nu^2\,(\nu^2 + (p^2+1)^2)$, и поэтому матрица G имеет собственные значения $\nu_{1,2} = 0$ и $\nu_{3,4} = \pm i(p^2 + 1)$.

Как будет показано, система (2) устойчива всегда при значении параметра $p \geq 4$, а значит и при произвольно больших гироскопических силах.

Отметим, что в рассматриваемой системе (2) гироскопические силы в определенном смысле растут быстрее потенциальных. Действительно, после замены независимой переменной времени t $(\tau = p^{3/2}t)$, уравнения движения (2) принимают вид:

$$x'' - G^\tau(p)x' + F^\tau(p)x = 0,$$

где $G^\tau(p) = p^{-3/2}G(p)$, $F^\tau(p) = p^{-3}F(p) = \mathrm{diag}(-p^{-9}, -p^{-9}, -1, -1)$ и $(') \equiv \frac{d}{d\tau}$. Полученная система обладает тем свойством, что $\widetilde{\omega}^\tau_{1,2} = p^{-9}$ и $\widetilde{\omega}^\tau_{3,4} = 1$, т. е. при увеличении параметра p часть собственных частот системы $A\widetilde{F}^\tau$ уменьшается, а оставшаяся часть – остается неизменной. Значит система "не ужесточается" в указанном выше смысле. Одновременно, поскольку собственные значения матрицы $G^\tau(p)$ такие, что $\nu^\tau_{1,2} = 0$ и $\nu^\tau_{3,4} = \pm i\left(p^{1/2} + p^{-3/2}\right)$, то с ростом значения параметра p гироскопические силы в отличие от потенциальных увеличиваются.

Исследование устойчивости системы (2) заключается в следующем.

Во-первых, выписывается характеристическое уравнение системы (2)

$$f(\lambda) \equiv \det(I * \lambda^2 - G * \lambda + F) \equiv f(-\lambda) \equiv g(-\lambda^2) = 0,$$

где

$$g(\mu) \equiv \left(\mu + p^{-6}\right)^2 \left(\mu + p^3\right)^2 - \mu\left[p^2\left(\mu + p^{-6}\right) + \mu + p^3\right]^2.$$

Следует отметить, что из соотношения $g(\mu) = 0$ следует положительность всех его действительных корней:

$$\mu = \frac{\left(\mu + p^{-6}\right)^2 \left(\mu + p^3\right)^2}{\left[p^2\left(\mu + p^{-6}\right) + \mu + p^3\right]^2} > 0.$$

Поэтому, если все корни многочлена $g(\mu)$ действительные величины, то все собственные значения системы (2) чисто мнимые $\lambda = \pm i\omega$ $(\mu = -\lambda^2 > 0)$.

Во-вторых, несложно показать, что действительно для всех значений параметра $p \geq 4$ все корни многочлена $g(\mu)$ положительны, и даже более того, в этом случае имеют место мажорантные оценки:

$$p^{-12} < \mu_1 < p^{-11}, \quad 1 < \mu_2 < p, \quad p < \mu_3 < p^2, \quad p^3 < \mu_4 < p^4. \qquad (3)$$

Вследствие отмеченного, в рассматриваемом случае все собственные значения системы (2) различные и чисто мнимые. Следовательно, система (2) обладает *временной* устойчивостью при $p \geq 4$.

Справедливость мажорантных оценок (3) показывается путем прямой проверки знаков многочлена $g(\mu)$ в точках $\mu = p^k$ при $p \geq 4$. Однако, поскольку

$$g(\mu) = \left\{\left(\mu + p^{-6}\right)\left(\mu + p^3\right) + \mu^{1/2}\left[p^2\left(\mu + p^{-6}\right) + \mu + p^3\right]\right\} \cdot h(\mu),$$

где $h(\mu) = \left(\mu + p^{-6}\right)\left(\mu + p^3\right) - \mu^{1/2}\left[p^2\left(\mu + p^{-6}\right) + \mu + p^3\right]$, то в выбранных точках достаточно определить знак функции

$$h(p^k) = p^{2k} + p^{k+3} + p^{k-6} + p^{-3} - p^{3k/2+2} - p^{3k/2} - p^{k/2+3} - p^{k/2-4}.$$

Например, в случае $k = 4$ значение функции $h(p^4) = p^5\,(p^2 - p - 1) + p^{-3}$. Видно, что при $p \geq 4$ это значение положительное, и значит $g(p^4) > 0$.

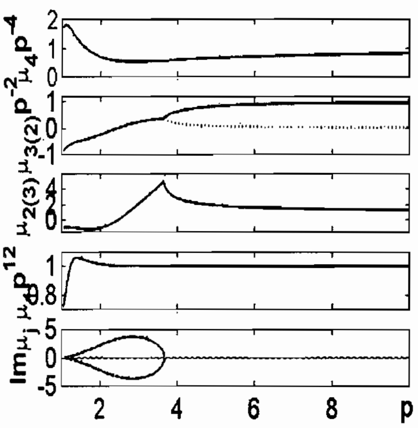
Если $k = 3$, то значение функции $h(p^3) = -p^{4,5}\,(p^2 - 2p^{1,5} + 2) + 2p^{-3} - p^{-2,5}$. Очевидно, что при $p \geq 4$ оно отрицательное, и поэтому значения функции $g(p^3) < 0$.

Заметим, что при $k = 4 - \varepsilon$ и малом значении величины ε функция $h(p^{4-\varepsilon}) = p^{8-2\varepsilon} + p^{7-\varepsilon} + p^{-2-\varepsilon} + p^{-3} - p^{8-3\varepsilon/2} - p^{6-3\varepsilon/2} - p^{5-\varepsilon/2} - p^{-2-\varepsilon/2}$. Это выражение становится отрицательным при достаточно большом значении параметра p.

Следовательно, последняя мажоранта имеет место, и более того, при больших значениях параметра p четвертый корень многочлена $g(\mu)$ ведет себя как p^4 $(\mu_4 \sim p^4)$, т. е. соответствующая собственная частота системы (2) $\omega_4 \sim p^2$.

Аналогично показывается справедливость всех мажорантных оценок, а также асимптотическое поведение собственных частот системы (2):

$$\omega_1 \sim p^{-6}, \quad \omega_2 \sim 1 \quad \text{и} \quad \omega_3 \sim p.$$



4. Наглядное представление. В качестве иллюстрации к сказанному на рисунке приведены результаты численного определения корней многочлена $g(\mu)$, пронумерованных в порядке возрастания их действительных частей.

На четырех верхних графиках изображены величины действительных частей этих корней в зависимости от значения параметра p. На нижнем, пятом, графике показано изменение величин мнимых частей второго и третьего корня (также в зависимости от значения параметра p). Как видно, бифуркационное значение параметра действительно меньше 4, а при его значении $p \geq 4$ все корни многочлена $g(\mu)$ действительные и положительные. Причем, по всей видимости, при $p \geq 4$ эти корни находятся в указанных интервалах: $\mu_1 p^{12}$, $\mu_2 \in (1, p)$ и $\mu_3 p^2$, $\mu_4 p^4 \in (p^{-1}, 1)$, и асимптотически ведут себя как отмечено выше: $\mu_1 \sim p^{-12}$, $\mu_2 \sim 1$, $\mu_3 \sim p^2$ и $\mu_4 \sim p^4$.

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 431 с.
2. *Гончаренко В.И.* О стабилизации движения линейных систем // Прикл. механика. – 1991. – **27**, N 5. – С. 107–110.
3. *Лахаданов В.М.* О стабилизации потенциальных систем // Прикл. математика и механика. – 1975. – **39**, N 1. – С. 53–58.
4. *Лахаданов В.М.* Об устойчивости движения в зависимости от структуры сил: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1975. – 13 с.
5. *Метелицын И.И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, N 1. – С. 31–34.
6. *Lancaster P., Zizler P.* On the stability of gyroscopic sysyems // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1998. – **65**, No. 2, June. – P. 519–522.

Национальный технический ун-т Украины, Киев

АНТК им. О.К.Антонова, Киев

Получено 21.10.99