

$I_j(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3)$. В результате оказывается, что принятой в [6] постановке задачи вместо (35) соответствует оценка $\Omega - \tilde{\Omega} = O(\varepsilon^3)$, $\Delta - \tilde{\Delta} = O(\varepsilon^3)$, а вместо (38) – оценка $\Omega - \tilde{\tilde{\Omega}} = O(\varepsilon^2)$, $\Delta - \tilde{\tilde{\Delta}} = O(\varepsilon^2)$.

1. Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М. Теория полета неуправляемых ракет. – М.: Физматгиз, 1959. – 360 с.
2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 475 с.
3. Коносевиц Б.И. К теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 28. – С. 44 – 55.
4. Мэрфи Ч.Х. Динамическая неустойчивость осесимметричного снаряда // Ракетная техника и космонавтика. – 1982. – 20, N 5. – С. 132–141.
5. Новожилов И.В. Фракционный анализ. – М.: Изд-во МГУ. – 1991. – 190 с.
6. Пугачев В.С. Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
7. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 12.10.99

УДК 531.38

©2000. Т.А. Кушпиль, Д.Д. Лещенко, И.А. Тимошенко

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Рассматривается движение вокруг центра инерции твердого тела близкого к динамически сферическому и содержащего вязкоупругий элемент. Этот элемент моделируется подвижной массой, прикрепленной при помощи упругой связи с вязким трением к точке, расположенной на одной из главных осей инерции. Считается, что малые параметры, обусловленные близостью моментов инерции и наличием подвижной массы, одного порядка. Вводятся сферические координаты, определяющие положение вектора угловой скорости, для которых получена и исследована система дифференциальных уравнений. Рассмотрены специальные случаи движения.

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени, и восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации. Тело предполагается быстро закрученным, проекция вектора возмущающего момента на оси инерции тела одного порядка малости с восстанавливающим моментом. Получены и исследуются усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях. Рассмотрены примеры.

1. Исследуем движение вокруг центра инерции близкого к динамически сферическому твердого тела, к которому в точке O_1 , расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплена при помощи упругой связи точка массы m . Начало декартовой системы координат, связанной с твердым телом, поместим в центр инерции тела точку O , а орты e_1, e_2, e_3 направим по главным осям инерции так, чтобы орт e_3 определял ось, на которой расположена точка O_1 . Тогда для радиус-вектора точки O_1 имеем $\rho = \rho e_3$, причем, не нарушая общности, будем считать $\rho > 0$.

При выводе уравнений движения используется схема, изложенная в [8].

При исследовании эволюции вращения твердого тела ограничимся условиями

$$\Omega^2 \gg \lambda \omega \gg \omega^2, \quad (\omega \equiv |\omega| \sim 1) \quad (1)$$

что дает возможность пренебрегать свободными колебаниями точки m и учитывать лишь ее вынужденные движения, которые будем искать в виде разложения по степеням Ω^{-2} . В этом случае уравнение движения твердого тела с тензором инерции J_0^*

записывается в следующей векторной форме [8]

$$J_0^* \dot{\omega} + (\omega \times J_0^* \omega) = \Phi(\omega) + O(\Omega^{-4}, \lambda^2 \Omega^{-6}). \quad (2)$$

В (1) $\Omega^2 = \frac{c}{m}$, $\lambda = \frac{\delta}{m}$, где c – жесткость упругой связи соединения подвижной массы с точкой тела, δ – коэффициент вязкого трения. Тензор инерции J_0^* в (2) соответствует телу, у которого подвижная масса совмещена с O_1 . Вектор-функция Φ содержит члены порядков Ω^{-2} , $\lambda \Omega^{-4}$ и представляет собой полином, содержащий четвертые и пятые степени ω .

В рассматриваемой задаче главные центральные моменты инерции тела близки друг к другу. Представим их в виде

$$J_{0_1}^* = J_0 + \varepsilon A', \quad J_{0_2}^* = J_0 + \varepsilon B', \quad J_{0_3}^* = J_0 + \varepsilon C', \quad (3)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Согласно (1), в уравнении движения (2) Ω^{-2} , $\lambda \Omega^{-4}$ – малые параметры. Предполагаем, что они одного порядка малости ε с гироскопическими моментами, т. е. $\Omega^{-2} \sim \varepsilon$, $\lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$. Тогда, пренебрегая малыми второго порядка и выше, получим уравнения движения в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\varepsilon}{J_0} q r [B' - C' + \rho^2 m (p^2 + q^2 + r^2)], \\ \dot{q} &= -\frac{\varepsilon}{J_0} p r [A' - C' + \rho^2 m (p^2 + q^2 + r^2)], \\ \dot{r} &= -\frac{\varepsilon}{J_0} p q (B' - A'), \end{aligned} \quad (4)$$

здесь p, q, r – проекции вектора ω на оси e_1, e_2, e_3 .

Домножая три уравнения (4) на p, q, r соответственно и складывая их, получим, что первым интегралом системы является

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \omega_0^2 = const. \quad (5)$$

Введем углы Θ, φ , определяющие ориентацию вектора ω относительно твердого тела, согласно равенствам

$$p = \omega_0 \cos \varphi \sin \Theta, \quad q = \omega_0 \sin \varphi \sin \Theta, \quad r = \omega_0 \cos \Theta, \quad (6)$$

где $0 \leq \Theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Перейдем в уравнениях (4) к переменным (6), вводя одновременно медленное время $\tau = \varepsilon \omega_0 \frac{B' - A'}{J_0} t$. Разрешая полученные уравнения относительно производных φ', Θ' по медленному времени τ , находим

$$\begin{aligned} \Theta' &= \sin \Theta \sin \varphi \cos \varphi, \\ \varphi' &= \cos \Theta (\mu - \sin^2 \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mu = (A' - C' + \rho^2 m \omega_0^2) / (A' - B')$.

Исследуем систему (7) для Θ и φ с первым интегралом

$$\sin^2 \Theta (\mu - \sin^2 \varphi) = c_1 = \sin^2 \Theta_0 (\mu - \sin^2 \varphi_0) = const. \quad (8)$$

В этой системе переменные изменяются в пределах $0 \leq \Theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, а параметр μ может принимать произвольные значения: $-\infty < \mu < +\infty$ (в зависимости от соотношений между моментами инерции).

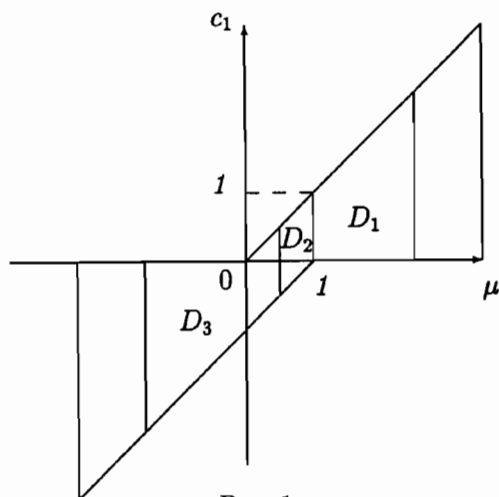


Рис. 1

Область D допустимых значений параметров (c_1, μ) приведена на рис. 1 и представляема в виде $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где каждая подобласть характеризуется следующими свойствами: подобласть D_1 определяется неравенствами $\mu \geq c_1 \geq 0$ ($\mu \geq 1$), подобласть D_2 – соотношениями $\mu \geq c_1 \geq \mu - 1$ ($0 \leq \mu \leq 1$). И, наконец, для D_3 имеем $0 \geq c_1 \geq \mu - 1$ ($\mu \leq 0$). Особыми подмножествами системы (7) являются границы подобластей D_1, D_2, D_3 .

В областях D_1 и D_3 движение представляет собой колебания по Θ и колебания или вращения по φ . Сепаратриса для области D_1 задается соотношением $\sin^2 \Theta = (\mu - 1) \times (\mu - \sin^2 \varphi)^{-1}$, а для области D_3 получим $\sin^2 \Theta = \mu(\mu - \sin^2 \varphi)^{-1} \leq 1$. В области D_2 имеют место колебания по Θ и по φ .

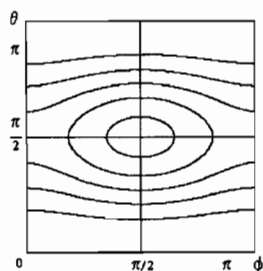


Рис. 2

Рассматриваются 11 различных характерных случаев выбора параметра μ (см. [1]). Так, например, при $\mu = -1.7$ графические зависимости Θ от φ , полученные численно из первого интеграла (7), представлены на рис. 2. Эти графики соответствуют только колебаниям по Θ . По φ – колебания внутри сепаратрисы $\sin^2 \Theta = \mu(\mu - \sin^2 \varphi)^{-1}$ и вращения вне сепаратрисы.

Рассмотрим частные случаи движения тела. Значение $\Theta = 0$ является стационарной точкой первого уравнения (7). При $\Theta = 0$ уравнение для φ принимает вид $\varphi' = \mu - \sin^2 \varphi$ и допускает интегрирование. После интегрирования получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= l \operatorname{tg} (\pm r \tau + \operatorname{arctg} (l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0)), \\ l &= \sqrt{\frac{\mu}{\mu - 1}}, \quad r = \sqrt{\mu(\mu - 1)}, \end{aligned} \quad (9)$$

Верхний и нижний знаки соответствуют случаям $\mu > 1$ и $\mu < 0$. Если $0 < \mu < 1$, то имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = j \frac{e^{J\tau a} - w}{e^{J\tau a} + w}, \quad (10)$$

$$j = \sqrt{\frac{\mu}{1 - \mu}}, \quad J = 2\sqrt{\mu(1 - \mu)}, \quad a = j^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0 + 1, \quad w = -(j^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0 - 1).$$

При малых Θ система (7) записывается следующим образом: $\Theta' = \Theta \sin \varphi \cos \varphi$, $\varphi' = \mu - \sin^2 \varphi$. Здесь учтены члены порядка Θ . Заметим, что уравнение для определения φ совпадает с соответствующим уравнением при $\Theta = 0$, и его решение может быть

представлено в виде (9), (10). После интегрирования уравнения для Θ с учетом (9) получим

$$\Theta^2 = \Theta_0^2 l^{\pm 2} (l^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)^{\mp 1} \times \\ \times [\cos^2(r\tau + \operatorname{arctg}(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0)) + l^2 \sin^2(r\tau + \operatorname{arctg}(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0))]^{\mp 1}, \quad (11)$$

верхние и нижние знаки в (11) отвечают, соответственно, $\mu < 0$ и $\mu > 1$.

Если $0 < \mu < 1$, то с учетом (10) определим

$$\Theta^2 = \Theta_0^2 \cos^2 \varphi_0 (Ae^{2J\tau} + Be^{J\tau} + C) / (4e^{J\tau}), \quad (12)$$

где $A = (1 + j^2)a^2$, $B = 2aw(1 - j^2)$, $C = w^2(1 + j^2)$.

Таким образом, исследована эволюция вращений близкого к динамически сферическому твердого тела, содержащего вязкоупругий элемент.

2. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации Θ , и возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Уравнения движения имеют вид [5]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= k(\Theta) \sin \Theta \cos \varphi + M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -k(\Theta) \sin \Theta \sin \varphi + M_2, \\ C\dot{r} = M_3, \quad M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \Theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3), \\ \dot{\psi} &= p \sin \varphi + q \cos \varphi, \\ \dot{\Theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \Theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; M_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, зависящие от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр) и являющиеся периодически функциями углов Эйлера ψ, Θ, φ с периодами 2π ; A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки O , $A \neq C$.

В работе делаются следующие исходные предположения

$$p^2 + q^2 \ll r^2, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (14)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим.

Неравенства (14) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\Theta) = \varepsilon K(\Theta), \\ M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, \tau, \psi, \Theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (15)$$

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (13) при малом ε , если выполнены условия (14). Будем пользоваться методом усреднения [3,7] на интервале времени порядка ε^{-1} .

После ряда преобразований системы уравнений (13) получим систему вида [3]

$$\dot{a} = \varepsilon A^{-1} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) - \varepsilon K D_{11} \cos \Theta (b - K D_{11} \sin \Theta \cos \alpha) -$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon K' D_{11} \sin \Theta \sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \varepsilon^2 K D_{12} \delta \cos \Theta (b - 2K D_{11} \sin \Theta \cos \alpha) + \\
& \quad + \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin \Theta \sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \varepsilon^2 K D_{22} M_3^0 \sin \Theta \sin \alpha, \\
\dot{b} & = \varepsilon A^{-1} (M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) + \varepsilon K D_{11} \cos \Theta (a + K D_{11} \sin \Theta \sin \alpha) + \\
& + \varepsilon K' D_{11} \sin \Theta \cos \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) - \varepsilon^2 K D_{12} \delta \cos \Theta (a + 2K D_{11} \sin \Theta \sin \alpha) - \\
& \quad - \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin \Theta \cos \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) - \varepsilon^2 K D_{22} M_3^0 \sin \Theta \cos \alpha, \quad (16) \\
\dot{\delta} & = \varepsilon C^{-1} M_3^0, \quad M_i^0(a, b, \delta, \psi, \Theta, \alpha, \gamma, \tau) = M_i^*(P, Q, \delta, \psi, \Theta, \varphi, \tau), \\
\dot{\psi} & = \varepsilon (a \sin \alpha - b \cos \alpha) (\sin \Theta)^{-1} + \varepsilon K D_{11} - \varepsilon^2 K D_{12} \delta, \\
\dot{\gamma} & = (C - A) A^{-1} r_0 + \varepsilon (C - A) A^{-1} \delta, \quad \dot{\Theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \\
\dot{\alpha} & = C A^{-1} r_0 + \varepsilon C A^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \Theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \\
& \quad - \varepsilon K D_{11} \cos \Theta + \varepsilon^2 K D_{12} \delta \cos \Theta, \quad D_{ij} = C^{-i} r_0^{-1}, \quad K' = \frac{dK}{d\Theta}.
\end{aligned}$$

В системе (16) $a, b, \delta, \psi, \Theta$ – медленные переменные; α, γ – быстрые переменные. В работах [5,6] исследованы движения твердого тела при предположениях (14), когда возмущающие моменты не зависят от t , а восстанавливающий момент $k = \text{const}$ или $k = k(\Theta)$. Если предположить, что возмущающие моменты зависят от быстрой переменной t , то получим существенно нелинейную систему, и непосредственное применение метода усреднения весьма затруднено. Исследуем случай зависимости возмущающих моментов от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$. Функции M_i^0 ($i = 1, 2, 3$) из (16) являются периодическими функциями α и γ с периодом 2π .

В ряде работ, например [4,7], исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием момента, изменяющегося во времени.

Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Проекция вектора возмущающего момента M_i на главные оси инерции с учетом (15) примут вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1(\tau) P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1(\tau) Q, \quad M_3 = -\varepsilon^2 I_3(\tau) r. \quad (17)$$

Здесь $I_1(\tau)$, $I_3(\tau)$ – положительные интегрируемые функции на промежутке $[0, 1]$.

После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных и быстрых переменных в случае (17) примет вид

$$\begin{aligned}
a^{(1)} & = \exp\left(-A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau) d\tau\right) (a^0 \cos wt - b^0 \sin wt), \\
b^{(1)} & = \exp\left(-A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau) d\tau\right) (b^0 \cos wt + a^0 \sin wt), \\
\delta^{(1)} & = -C^{-1} r_0 \int_0^{\varepsilon t} I_3(\tau) d\tau, \quad \psi^{(1)} = \varepsilon K D_{11} t + \psi_0, \quad \Theta^{(1)} = \Theta_0, \quad (18) \\
\alpha^{(1)} & = C A^{-1} r_0 t - \varepsilon A^{-1} \int_0^t \left(\int_0^{\varepsilon t} I_3(\tau) d\tau\right) dt - \varepsilon K D_{11} \cos \Theta_0 t + \varphi_0, \\
\gamma^{(1)} & = (C - A) A^{-1} r_0 t - \varepsilon (C - A) A^{-1} C^{-1} r_0 \int_0^t \left(\int_0^{\varepsilon t} I_3(\tau) d\tau\right) dt.
\end{aligned}$$

Здесь $w = \frac{1}{2}\varepsilon D_{11}(2K \cos \Theta_0 + K' \sin \Theta_0)$; a^0 , b^0 определяются следующим образом: $a^0 = P_0 - \lambda_0 \sin \varphi_0$, $b^0 = -Q_0 + \lambda_0 \cos \varphi_0$, $\lambda_0 = K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \Theta_0$; переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний, $\alpha = \gamma + \varphi$, $r = r_0 + \varepsilon \delta$; P_0 , Q_0 , r_0 , ψ_0 , φ_0 – начальные значения соответствующих переменных при $t = 0$.

На основании приведенных формул можно определить эволюцию углов прецессии и нутации во втором приближении

$$\begin{aligned} \Theta_\varepsilon^\nu(t) &= \Theta_0 + \varepsilon A D_{11} \exp\left(-A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau) d\tau\right) C^0 \sin(\alpha^{(1)} - \chi) + \varepsilon K_0 D_{22} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau) d\tau \sin \Theta_0, \\ \psi_\varepsilon^\nu(t) &= \psi_0 + \varepsilon K D_{11} t + S^{(1)}, \\ \sin \chi &= \cos \beta = b^{(1)} (C^0)^{-1} \exp\left(A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau) d\tau\right), \\ S^{(1)} &= \varepsilon^2 K D_{21} \int_0^t \left(\int_0^{\varepsilon t} I_3(\tau) d\tau\right) dt + \varepsilon^2 A K^2 D_{33} \cos \Theta_0 t - \\ &- \varepsilon A D_{11} \exp\left(-A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau) d\tau\right) C^0 \sin(\alpha^{(1)} + \beta) \operatorname{cosec} \Theta_0, \quad C^0 = \sqrt{(a^0)^2 + (b^0)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, в выражении (19) для Θ_ε^ν слагаемое порядка ε является произведением медленного экспоненциально убывающего множителя $\exp(-A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau) d\tau)$, обусловленного диссипацией энергии, и осцилирующего множителя $\sin(\alpha^{(1)} - \chi)$. Величину декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видим из формул (18) для $a^{(1)}$, $b^{(1)}$. В выражении (19) для $\psi_\varepsilon^\nu(t)$ слагаемое $S^{(1)}$ (порядка $O(\varepsilon)$) уточняет для данной задачи формулу угловой скорости прецессии $\omega_0 = K C^{-1} r_0^{-1}$, имеющую место в приближенной теории гироскопов [2].

Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа под действием момента, приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты примут вид

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = \varepsilon^2 M_3^0(\tau). \quad (20)$$

Здесь $M_3^0(\tau)$ – интегрируемая функция на промежутке $[0,1)$.

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных и быстрых переменных с учетом (20)

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= a^0 \cos wt - b^0 \sin wt, \quad b^{(1)} = b^0 \cos wt + a^0 \sin wt, \\ \delta^{(1)} &= C^{-1} \int_0^{\varepsilon t} M_3^0(\tau) d\tau, \quad \psi^{(1)} = \varepsilon K_0 D_{11} t + \psi_0, \quad \Theta^{(1)} = \Theta_0, \\ \alpha^{(1)} &= C A^{-1} r_0 t + \varepsilon A^{-1} \int_0^t \left(\int_0^{\varepsilon t} M_3^0(\tau) d\tau\right) dt - \varepsilon K_0 D_{11} \cos \Theta_0 t + \varphi_0, \\ \gamma^{(1)} &= (C - A) A^{-1} r_0 t + \varepsilon (C - A) A^{-1} C^{-1} \int_0^t \left(\int_0^{\varepsilon t} M_3^0(\tau) d\tau\right) dt, \\ w &= \frac{1}{2} \varepsilon D_{11} (2K \cos \Theta_0 + K' \sin \Theta_0), \end{aligned} \quad (21)$$

где a^0 , b^0 , r_0 , ψ_0 , φ_0 – начальные значения соответствующих переменных при $t = 0$.

Из системы (21) видно, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, поэтому определим эволюцию углов прецессии и нутации во втором приближении:

$$\Theta_\varepsilon^\nu(t) = \Theta_0 + \varepsilon A D_{11} C^0 \sin(\alpha^{(1)} - \chi), \quad \psi_\varepsilon^\nu(t) = \psi_0 + \varepsilon K_0 D_{11} t + V^{(1)},$$

$$V^{(1)} = \varepsilon^2 AK^2 D_{33} \cos \Theta_0 t - \varepsilon K_0 D_{22} \int_0^t \left(\int_0^{\varepsilon t} M_3^0(\tau) d\tau \right) dt - \varepsilon A D_{11} C^0 \sin(\alpha^{(1)} + \beta), \quad (22)$$

$$\sin \chi = \cos \beta = \frac{b^{(1)}}{C^0}, \quad C^0 = \sqrt{(a^0)^2 + (b^0)^2}.$$

Таким образом, в выражении (22) для Θ_ε^ν ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные a^0, b^0 . Слагаемое $V^{(1)}$ уточняет для данной задачи выражение для угловой скорости прецессии, известное из приближенной теории гироскопов.

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1996. – N 2. – С. 3–12.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1969. – Ч.2. – 332 с.
3. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
4. Кузмак Г.Е. К вопросу о пространственном движении осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени // ДАН СССР. – 1960. – 132, N 23. – С. 549–552.
5. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Прикл. математика и механика. – 1990. – 54, N 2. – С. 224–232.
6. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – N 6. – С. 8–17.
7. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
8. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – N 4. – С. 33–44.

Одесская гос. академия строительства и архитектуры,

Одесская гос. академия холода

Получено 22.11.99

УДК 531.383

©2000. Д.А. Сухоручкин

О СТРУННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОГО МАЯТНИКА ФУКО

Объектом исследования является однородная натянутая струна¹ закрепленная обоими концами в некотором основании, способном вращаться относительно инерциального пространства. Такая струна может служить чувствительным элементом в электромеханической модели струнного гироскопа — датчика поворота основания вокруг оси, проходящей через концы струны. Уравнения движения идеальной системы допускают решение, в одном из предельных случаев определяющее плоскую стоячую волну. Тогда источником инерциальной информации может служить ориентация плоскости стоячей волны, неизменная относительно инерциального пространства [2]. Указанное свойство сохранения ориентации плоскости колебаний позволяет отнести рассматриваемую систему к классу обобщенных маятников Фуко [1]. В целях управления колебаниями и съема информации представляется возможным использовать электрический ток, пропустив его по струне и поместив систему в магнитное поле. Приводятся уравнения, связывающие форму колеблющейся струны с силой тока и вектором магнитной индукции.

Рассмотрим струну длиной l , натянутую с силой T_0 и жестко закрепленную обоими концами в некотором основании. Свяжем с основанием координатные оси x, y, z , чтобы ось z проходила через точки закрепления (рис. 1).

¹Под струной понимается тонкая нить, которая не сопротивляется изгибу и кручению, не связанным с изменением ее длины.