

11. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
12. Gashenenko I.N. Angular velocity of the Kovalevskaya top // Regular and chaotic dynamics. – 2000. – 5, N 1. – P.104-113.
13. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – 37. – S.153-181.
14. Jacob A. Invariant manifolds in motion of a rigid body about a fixed point // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1971. – 16, N 10. – P.1497-1521.
15. McCord C.K., Meyer K.R., Wang Q. The integral manifolds of the three body problem//Memoirs of the AMS. – 1998. – 132, N 628. – 91 p.
16. Oshemkov A.A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Advances in Sov. Math. – 1991. – 6. – P.67-146.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 20.12.99

УДК 531.38

©2000. А.М. Ковалев, В.В. Кириченко

## УРАВНЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА ГЕССА В ОКРЕСТНОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Движение гироскопа Гесса рассматривается в специальной системе координат, введенной П.В. Харламовым. В исходных переменных описано и исследовано множество равномерных вращений. С помощью интегралов выполнено понижение порядка уравнений до третьего. Выделены стационарные решения редуцированной системы. Для исходной системы получены линеаризованные в окрестности стационарных движений уравнения и указаны их интегралы.

Гироскоп Гесса [4] занимает важное место в динамике твердого тела благодаря тому, что, во-первых, частными случаями его движения являются случаи Эйлера и Лагранжа, и, во-вторых, решение уравнений движения при данном распределении масс обладает рядом замечательных свойств [1], установленных ещё Г.Г.Аппельротом, А.М. Ляпуновым, П.А.Некрасовым при решении задачи С.В.Ковалевской. Частные случаи движения гироскопа Гесса описываются решениями В.Гесса и А.И.Докшевича, которые достаточно хорошо изучены аналитически и геометрически. Движение гироскопа Гесса в общем случае пока не исследовано. В настоящей работе дан полный анализ равномерных вращений гироскопа Гесса и рассматривается его движение в их окрестности. Выполнена редукция уравнений движения до третьего порядка, получены линеаризованные уравнения и их интегралы.

**1. Исходные соотношения.** Рассматривается движение твердого тела, имеющего неподвижную точку и находящегося в поле силы тяжести. В качестве подвижной системы координат, жестко связанной с телом, выбирается специальная система координат, введенная П.В.Харламовым [3]. Начало координат выбирается в неподвижной точке, первая ось проводится через центр масс тела, вторая и третья оси направляются так, чтобы выражение кинетической энергии имело вид

$$T = \frac{1}{2}(a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2) + (b_1y + b_2z)x, \quad (1)$$

где  $x, y, z$  - проекции вектора момента количества движения тела на выбранные оси;  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  - компоненты гирационного тензора в специальных осях.

Гироскоп Гесса характеризуется следующим распределением масс

$$a_2 = a_3 = a_*, \quad b_2 = 0.$$

Приняв дополнительно обозначения:  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  - проекции единичного вектора направления силы тяжести на подвижные оси,  $\Gamma$  - произведение веса тела и расстояния между центром масс и неподвижной точкой, запишем уравнения и интегралы движения гироскопа Гесса

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -b_1zx, \\ \dot{y} &= (a_1 - a_*)zx + b_1yz - \Gamma\gamma_3, \\ \dot{z} &= -(a_1 - a_*)yx + b_1x^2 - b_1y^2 + \Gamma\gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 &= a_*z\gamma_2 - (a_*y + b_1x)\gamma_3, \\ \dot{\gamma}_2 &= (a_1x + b_1y)\gamma_3 - a_*z\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_3 &= (a_*y + b_1x)\gamma_1 - (a_1x + b_1y)\gamma_2, \\ a_1x^2 + a_*(y^2 + z^2) + 2b_1yx - 2\Gamma\gamma_1 &= 2E, \\ x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 &= k, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что случай  $\Gamma = 0$  соответствует случаю Эйлера, а случай  $b_1 = 0$  соответствует случаю Лагранжа, в которых, как известно, существует дополнительный четвертый интеграл, независимый с интегралами (3).

**2. Редукция к системе третьего порядка.** Понизим порядок системы (2) с помощью интегралов (3). Из уравнений (3) находим

$$\gamma_1 = \mu, \quad \gamma_2 = \frac{1}{y^2 + z^2}[y(k - \mu x) + z\sqrt{H}], \quad \gamma_3 = \frac{1}{y^2 + z^2}[z(k - \mu x) - y\sqrt{H}], \tag{4}$$

где

$$H = (1 - \mu^2)(y^2 + z^2) - (k - \mu x)^2, \quad \Gamma\mu = \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{2}a_*(y^2 + z^2) + b_1xy - E, \tag{5}$$

знак перед радикалом в формулах (4) определяется из начальных условий.

Подставляя формулы (4) в первые три уравнения (2), получаем систему третьего порядка, к интегрированию которой сводится задача о движении гироскопа Гесса

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -b_1zx, \\ \dot{y} &= (a_1 - a_*)xz + b_1yz + \frac{\Gamma}{y^2 + z^2}[-z(k - \mu x) + y\sqrt{H}], \\ \dot{z} &= -(a_1 - a_*)yx - b_1y^2 + b_1x^2 + \frac{\Gamma}{y^2 + z^2}[y(k - \mu x) + z\sqrt{H}]. \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что уравнения (6) сохраняются и для случаев Лагранжа и Эйлера. Однако уравнения (4) сохраняются только для случая Лагранжа. Для случая Эйлера формула (5) места не имеет, и в формулах (4) величина  $\mu$  является произвольной переменной, для

нахождения которой требуется выполнить одну квадратуру. Уравнения (6) для общего случая получены П.В.Харламовым [3].

**3. Равномерные вращения.** Известно, что особым точкам уравнений Эйлера - Пуассона соответствуют равномерные вращения тела вокруг вертикали. Равномерные вращения обладают замечательным свойством, состоящим в том, что для их существования достаточно потребовать лишь постоянство угловой скорости. Поскольку проекции угловой скорости и кинетического момента на подвижные оси связаны невырожденным линейным преобразованием, то эти выводы справедливы и для вектора кинетического момента. Таким образом, особые точки уравнений (2) и (6) должны описывать одни и те же движения: равномерные вращения гироскопа Гесса. Множество равномерных вращений является однопараметрическим, т.е. кривой  $S$  в пространстве угловых скоростей и направляющих косинусов. Механическая интерпретация этих движений состоит в том, что находится положение угловой скорости равномерного вращения в подвижной системе координат, тело устанавливается в неподвижном пространстве таким образом, чтобы эта скорость совпала с вертикалью, и осуществляется равномерное вращение тела с данной скоростью вокруг вертикали. Поэтому для решения задачи о равномерных вращениях основное значение имеет изучение проекции кривой  $S$  на пространство угловых скоростей либо на пространство кинетических моментов.

Рассмотрим сначала особые точки уравнений (2). Из первого уравнения (2) видно, что для равномерных вращений выполнено либо  $x = 0$ , либо  $z = 0$ .

Для  $x = 0$  уравнения особых точек имеют вид:

$$\begin{aligned} b_1 y z - \Gamma \gamma_3 &= 0, & b_1 y^2 - \Gamma \gamma_2 &= 0, \\ a_* z \gamma_2 - a_* y \gamma_3 &= 0, & b_1 y \gamma_3 - a_* z \gamma_1 &= 0, & a_* y \gamma_1 - b_1 y \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений сразу получаем

$$\Gamma \gamma_1 = \frac{b_1^2 y^2}{a_*}, \quad \Gamma \gamma_2 = b_1 y^2, \quad \Gamma \gamma_3 = b_1 y z. \quad (7)$$

Подставляя выражения (7) в последний из интегралов (3), находим, что в плоскости  $Oyz$  кривая  $S_x$  описывается уравнением

$$\Gamma^2 a_*^2 = b_1^2 y^2 (z^2 a_*^2 + (a_*^2 + b_1^2) y^2). \quad (8)$$

График функции (8) изображен на рис.1 для следующих значений параметров

$$a_1 = 11, \quad b_1 = 4, \quad a_* = 9, \quad \Gamma = 27.$$

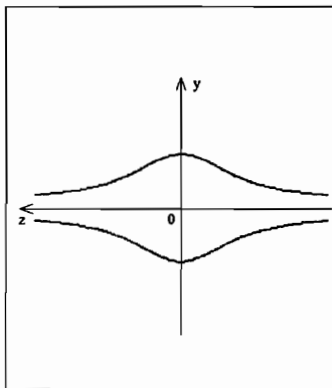


Рис. 1

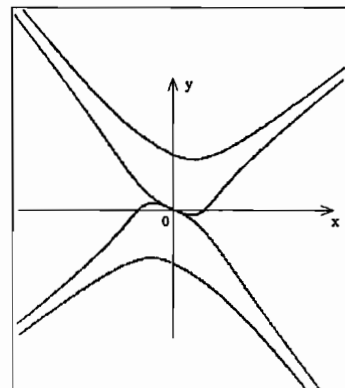


Рис. 2

Для  $z = 0$  уравнения особых точек таковы

$$\Gamma\gamma_3 = 0, \quad -(a_1 - a_*)yx + b_1x^2 - b_1y^2 + \Gamma\gamma_2 = 0,$$

$$(a_*y + b_1x)\gamma_3 = 0, \quad (a_1x + b_1y)\gamma_3 = 0, \quad (a_*y + b_1x)\gamma_1 - (a_1x + b_1y)\gamma_2 = 0.$$

Из этих уравнений имеем

$$\Gamma\gamma_1 = \frac{a_1x + b_1y}{a_*y + b_1x} [(a_1 - a_*)yx - b_1x^2 + b_1y^2], \quad \Gamma\gamma_2 = (a_1 - a_*)yx - b_1x^2 + b_1y^2, \quad \gamma_3 = 0. \quad (9)$$

Отметим, что  $a_*y + b_1x \neq 0$ , поскольку тождественное равенство возможно лишь при условии  $a_1a_* - b_1^2 = 0$ , что противоречит условию положительной определенности квадратичной формы (1).

Подставляя выражения (9) в геометрический интеграл, получаем уравнение кривой равномерных вращений  $S_z$  в плоскости  $z = 0$ :

$$[(a_1 - a_*)yx - b_1x^2 + b_1y^2]^2 [(a_1x + b_1y)^2 + (a_*y + b_1x)^2] = (a_*y + b_1x)^2 \Gamma^2. \quad (10)$$

Укажем свойства кривой  $S_z$ :

1. Кривая  $S_z$  проходит через начало координат и относительно него симметрична.
2. Кривая  $S_z$  имеет асимптоты

$$x[(a_* - a_1) \pm \sqrt{(a_* - a_1)^2 + 4b_1^2}] - 2b_1y = 0. \quad (11)$$

Асимптоты (11) совпадают по направлению с главными осями гириационного тензора, а также и тензора инерции.

3. Кривая  $S_z$  пересекает любую прямую  $y = \alpha x$  в двух симметричных точках при следующих значениях  $x$ :

$$x = \pm \frac{\Gamma^{1/2}(a_*\alpha + b_1)^{1/2}}{[(a_1 + b_1\alpha)^2 + (a_*\alpha + b_1)^2]^{1/4} [(a_1 + b_1\alpha)\alpha - (a_*\alpha + b_1)]^{1/2}}.$$

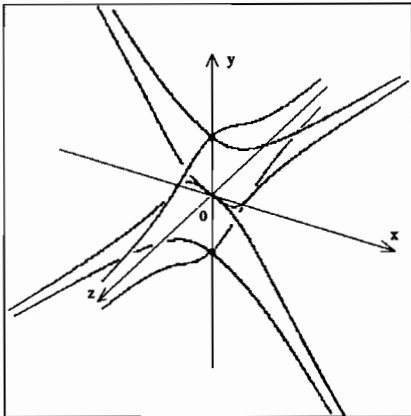


Рис. 3

Кривая  $S_z$  пересекает ось  $Oy$  также в двух точках

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{a_*^{1/2}\Gamma^{1/2}}{b_1^{1/2}(a_*^2 + b_1^2)^{1/4}}.$$

Вид кривой  $S_z$  показан на рис. 2 для указанных выше значений параметров. Все множество равномерных вращений состоит из трех пар пересекающихся кривых (рис. 3). Асимптотам соответствуют главные оси тензора инерции, невозможность равномерных вращений вокруг которых для случая, когда центр масс не принадлежит главной оси, установлена еще О. Штауде [5].

**4. Стационарные решения редуцированной системы.** Найдем стационарные решения редуцированной системы, приравняв нулю правые части уравнений (6). Из

первого уравнения, как и для равномерных вращений, находим, что либо  $x = 0$ , либо  $z = 0$ . Для первого случая оставшиеся два уравнения сводятся к

$$H = 0, \quad b_1 y(y^2 + z^2) - k\Gamma = 0,$$

а для второго - к следующим уравнениям

$$H = 0, \quad \Gamma(k - \mu x) - (a - a_*)y^2 x + b_1 y(x^2 - y^2) = 0.$$

Решая эти уравнения для обоих случаев, находим, что величины  $x, y, z$  зависят от двух постоянных интегрирования  $k, E$ , т.е. множество стационарных решений (а им соответствуют равномерные вращения) является двухпараметрическим, что противоречит тому, что множество равномерных вращений является кривой. Причина этого несоответствия состоит в том, что выполненная редукция имеет особенность на данных решениях из-за зависимости интегралов (3), а это приводит к появлению решений системы (6), не имеющих механического смысла [2]. Таким образом, стационарные решения системы (6) существуют только при значениях постоянных  $k, E$ , связанных определенной зависимостью. Соответствующие значения величин  $x, y, z$  и зависимости между  $k, E$  найдем, используя решения (7) - (10) и интегралы (3).

В плоскости  $x = 0$  имеем

$$y^2 = \frac{a_*}{3b_1^2}(-E + \sqrt{E^2 + 3\Gamma^2}), \quad z^2 = \frac{\Gamma^2}{b_1^2 y^2} - \frac{a_*^2 + b_1^2}{a_*^2} y^2. \quad (12)$$

Постоянная  $k$  связана с  $E$  соотношением

$$k = \frac{\Gamma b_1 \sqrt{3}}{\sqrt{a_*(-E + \sqrt{E^2 + 3\Gamma^2})}} - \frac{1}{3\Gamma \sqrt{3a_*}} \sqrt{(-E + \sqrt{E^2 + 3\Gamma^2})^3}.$$

В плоскости  $z = 0$  значения  $x, y$  находятся из совместного решения уравнения (10) и уравнения

$$(a_* y + b_1 x)[a_1 x^2 + a_* y^2 + 2b_1 xy - 2E] - 2(a_1 x + b_1 y)[(a_1 - a_*)yx - b_1 x^2 + b_1 y^2] = 0. \quad (13)$$

Подставляя найденные отсюда величины  $x(E), y(E)$  в формулы (9) и второй интеграл (3), получаем зависимость  $k$  от  $E$

$$k = -x(E)\gamma_1(E) - y(E)\gamma_2(E).$$

Отметим, что найденные стационарные движения редуцированной системы зависят только от постоянной энергии  $E$ . Выписанные выражения для постоянной  $k(E)$  необходимы при получении уравнений возмущенного движения.

**5. Уравнения и интегралы линейного приближения.** С целью рассмотрения движения тела в окрестности решения Гесса получим уравнения и интегралы линейного приближения в окрестности равномерных вращений, соответствующих кривой  $S_x$ . Описывающее эти вращения решение системы (2) отметим индексом 0. Величины  $y_0, z_0$  удовлетворяют уравнению (8), а  $\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}$  выражаются через  $y_0, z_0$  по формулам (7). Для системы (2) введем возмущения по формулам

$$x = x_1, \quad y = y_0 + x_2, \quad z = z_0 + x_3, \quad \gamma_1 = \gamma_{10} + x_4, \quad \gamma_2 = \gamma_{20} + x_5, \quad \gamma_3 = \gamma_{30} + x_6. \quad (14)$$

Подставляя величины (14) в уравнения (2) и ограничиваясь в правых частях линейными членами, с учетом формул (7) получаем уравнения первого приближения

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -b_1 z_0 x_1, \\
 \dot{x}_2 &= (a_1 - a_*) z_0 x_1 + b_1 z_0 x_2 + b_1 y_0 x_3 - \Gamma x_6, \\
 \dot{x}_3 &= (a_* - a_1) y_0 x_1 - 2b_1 y_0 x_2 + \Gamma x_5, \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{b_1 y_0 z_0}{\Gamma} (b_1 x_1 + a_* x_2) + a_* \frac{b_1 y_0^2}{\Gamma} x_3 + a_* z_0 x_5 - a_* y_0 x_6, \\
 \dot{x}_5 &= \frac{b_1 y_0 z_0}{\Gamma} (a_1 x_1 + b_1 x_2) - \frac{b_1^2 y_0^2}{\Gamma} x_3 - a_* z_0 x_4 + b_1 y_0 x_6, \\
 \dot{x}_6 &= \frac{b_1 y_0^2}{\Gamma a_*} (b_1^2 - a_* a_1) x_1 + a_* y_0 x_4 - b_1 y_0 x_5.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения (15) допускают интегралы

$$\begin{aligned}
 &x_1 [(a_*^2 + b_1^2)(z_0^2 + y_0^2)(a_* - a_1)a_* + y_0^2 b_1^2 (b_1^2 - 2a_*^2 - 3a_* a_1)] x_1 - \\
 &- 2a_* b_1 (a_*^2 + b_1^2)(z_0^2 + 2y_0^2) x_2 - 2z_0 y_0 a_* b_1 (a_*^2 + b_1^2) x_3 + 6a_*^2 b_1 \Gamma y_0 x_4 + \\
 &+ 2\Gamma y_0 a_* (a_*^2 - 2b_1^2) x_5 + 2z_0 a_* \Gamma (a_*^2 + b_1^2) x_6 = C_1, \\
 &b_1 y_0 x_4 + a_* y_0 x_5 + a_* z_0 x_6 = C_2, \quad b_1 y_0 x_1 + a_* y_0 x_2 + a_* z_0 x_3 - \Gamma x_4 = C_3, \\
 &\xi^2 + \eta^2 = C_4^2, \quad \eta + \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \sin\left(\frac{\alpha}{b_1 z_0} \ln \frac{x_1}{C_5}\right) = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \xi &= b_1^2 y_0 z_0 [\alpha^2 - b_1^2 (a_*^2 + 4b_1^2) y_0^2] x_1 + a_* (\alpha^2 + b_1^2 z_0^2) [b_1 a_*^2 y_0 z_0 x_2 - \\
 &- b_1 (a_*^2 + 4b_1^2) y_0^2 x_3 - 2\Gamma b_1 a_* z_0 x_4 - \Gamma a_*^2 z_0 x_5 + \Gamma (a_*^2 + 4b_1^2) y_0 x_6], \\
 \eta &= \alpha (b_1 y_0 [b_1^2 (a_*^2 + 4b_1^2) - a_*^2 (\alpha^2 + b_1^2 z_0^2)] x_1 + \\
 &+ a_* (\alpha^2 + b_1^2 z_0^2) (2b_1^2 y_0 x_2 + \Gamma a_* x_4 - 2\Gamma b_1 x_5)), \\
 \alpha &= \sqrt{4b_1^2 y_0^2 + a_*^2 (y_0^2 + z_0^2)}.
 \end{aligned}$$

Переходя к получению линеаризованных уравнений для редуцированной системы, отмечаем, что она имеет особенность при  $H = 0$ , что как раз и соответствует изучаемым движениям. Это требует устранения данной особенности для получения линеаризованных уравнений. Для достижения этой цели можно применить различные приемы, основанные на использовании линеаризованной системы (15), дифференциально-алгебраической системы, включающей в дополнение к  $x, y, z$  переменную  $H$  и соответствующее алгебраическое уравнение, и др. Получение соответствующих уравнений, их анализ и сравнение представляет предмет отдельного исследования.

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. - М.: Гостехиздат, 1953. - С. 264 - 273.
2. Горр Г.В., Илюгин А.А., Харламова Е.И. Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. - 1974. - N 6. - С. 3-9.
3. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. - Новосибирск.: 1965. - 221 с.

4. Hess W. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine partikuläre Lösung der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. - 1890. - 37, Н. 2. - S. 153-181.

5. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // Journ für die reine und angew Math. - 1894. - 113, Н. 2. - S. 318-334.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 7.10.99

УДК 531.38

©2000. Г.В. Горр, Е.В. Саркисянц, С.В. Скрыпник

## ОБ ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕЛА В СЛУЧАЕ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Изучены условия существования изоконических движений тела в случае, когда система дифференциальных уравнений движения допускает три линейных инвариантных соотношения. Найден новый класс изоконических движений тела, для которого подвижным годографом является спиралевидная кривая, расположенная на эллипсоиде вращения.

Метод инвариантных соотношений [8] на конструктивном уровне позволяет найти условия существования произвольного инвариантного соотношения и осуществить поиск новых частных случаев интегрируемости уравнений динамики твердого тела. Важность построения решений обусловлена применением метода годографа [6] кинематического истолкования движения тела. Обзор результатов, посвященных некоторым решениям уравнений динамики, приведен в [1].

Линейные по основным переменным задачи инвариантные соотношения представляют собой соотношения, которые наиболее подробно изучены в литературе [7]. Изоконические движения тела с неподвижной точкой, для которых подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно, касательной к ним плоскости [2], в силу своей наглядности представляют особый интерес для кинематического истолкования движения методом годографов [6].

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим в векторном виде дифференциальные уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку, для обобщенной задачи динамики (см., например, [4]) :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{ax} + \mathbf{ax} \times \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\nu}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{ax}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – момент количества движения тела;  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор оси симметрии силового поля;  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – гиростатический момент, характеризующий движения носимых тел;  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор обобщенного центра масс;  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  – гирационный тензор, построенный в неподвижной точке;  $\mathbf{B} = (B_{ij})$ ,  $\mathbf{C} = (C_{ij})$  – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}$  обозначает производную по времени.

Уравнения (1), (2) имеют интегралы

$$\mathbf{ax} \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{C}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (3)$$

где  $E$  и  $k$  – произвольные постоянные.