181. *Kharlamov M.P., Kharlamov P.V.* To solve a problem of rigid body dynamics. What does it mean? // Proccedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics. Academia of Scienses of Turin. (June 7-11, 1982). Atti della Accademia delle scienze di Torino.- Vol. 117 (1983).- P.535-562.

182. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die theorie des Kreiselds. - New York, Stuttgart; Johnson reprint corporation, 1965. - 966 p. (Nachdruck der Erstauflagen von 1897 / 1898 / 1903 / 1910).

183. *Kowalewski N.* Eine neue partikulere Lösung der Differenzialgle- ichungen der Bewegung eines schweren starren Korpes um einen festen Punkt // Math. Ann.- 1908.- **65**, N 4.- S.528-537.

184. *Leimanis E.* The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point.- N.Y.: Springer - Verlag, 1965.- 337 p.

185. *Levi-Civita T.* Sur la recherche des solutions particulieres des systemes differentiels et sur les mouvements stationnaires // Prace mat- fiz.- Warszawa, 1906.- **XXII**.- S.1-40.

186. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. für die reine und angew. Math.- 1894.- **113**, H.4.- S. 318-334.

187. *Van der Woude W.* Über die Standeschen Kreiselbewegungen // Math.- Z.- 1923.- **16**.- S. 170-172.

188. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Math.- 1899.-**22**.- P. 201-356.

Донецкий гос. техн. ун-т,
Московский гос. ун-т
Получено 8.09.98

УДК 517.93, 518:512.3

©2000. **Р.Г. Мухарлямов**

ОБ УРАВНЕНИЯХ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ НЕСВОБОДНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данной работе[1]предлагается метод построения уравнений кинематики и механических систем, приспособленных для численной реализации. Построены соответствующие разностные уравнения, гарантирующие вычисления с заданной точностью. Определяются уравнения программных связей и уравнения возмущений связей. Устойчивость программного многообразия при численном решении уравнений динамики достигается соответствующим построением уравнений возмущений программных связей. Уравнения динамики систем с программными связями составляются в форме уравнений Лагранжа в обобщенных координатах. Рассматриваются некоторые обратные задачи динамики твердого тела.

Введение. Как известно, при использовании известных уравнений динамики, содержащих множители Лагранжа, не удается обеспечить асимптотическую устойчивость интегрального многообразия, соответствующего уравнениям связей [7, 15, 20, 21, 23]. При математическом моделировании уравнения связей, наложенных на систему, рассматриваются как сервосвязи [1,2,16,18,19], а реакции связей – как соответствующие управляющие воздействия. Известные классические методы вычисления реакций связей основаны на определении множителей Лагранжа из условия равенства нулю производных уравнений связей. При этом уравнения связей оказываются первыми интегралами уравнений динамики механической системы, при численном решении которых отклонения от уравнений связей возрастают.

Для стабилизации связей приходится учитывать отклонения от уравнений связей вместе с их производными [20,21,23]. Зависимость между ними определяется через принуждения [18] или уравнения возмущений связей [13]. Стабилизация связей возможна только в том случае, когда уравнения возмущений связей имеют асимптотически устой-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, шифр 99-01-0164 и МОПО РФ.

чивое тривиальное решение. Однако этого оказывается недостаточно для того, чтобы отклонения от уравнений связей оставались ограниченными при численном решении дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений движения и уравнений связей.

Обоснованное составление уравнений возмущений связей расширяет возможности построения устойчивых разностных схем для решения соответствующих дифференциально-алгебраических уравнений. В настоящей работе с целью оценки отклонений от уравнений связей вводятся понятия уравнений программных связей, уравнения возмущений связей, понятие устойчивых программных связей. Предлагается алгоритм сведения системы дифференциально-алгебраических уравнений индекса 3 (ДАУ-3), составленных из уравнений движения и уравнений связей, к ДАУ-2, состоящей из дифференциальных уравнений первого порядка и соответствующих им частных интегралов. Показывается, что задача численного решения ДАУ-3 по существу состоит из двух частей: построения систем дифференциальных уравнений по известным частным интегралам [5,9,11] и их численного решения [12,14].

Дифференциально-алгебраические уравнения используются также для решения обратных задач динамики. Определяется силовое поле, соответствующее заданным первым интегралам уравнений динамики. Приводятся примеры.

1. Моделирование задач кинематики. Кинематическое состояние несвободных механических систем описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x,t), \qquad x \in R_n, \tag{1}$$

определяющей зависимость обобщенных скоростей от положения системы и рассматриваемой обычно совместно с начальными условиями $x(t_0) = x^0$. В случае, когда на механическую систему наложены голономные связи

$$f(x,t) = 0, \qquad f \in R_m, \qquad m \leq n, \tag{2}$$

естественным является допущение о том, что начальные значения координат системы также абсолютно точно удовлетворяют уравнениям связей

$$f(x^0, t_0) = 0. \tag{3}$$

Кинематические соотношения (1) строятся в соответствии с уравнениями связей (2), которые при выполнении условий (3) представляют собой совокупность частных интегралов системы (1). А задача составления соотношений (1) сводится к построению систем дифференциальных уравнений по известным частным интегралам (2). При этом вектор $v(x,t)$ правых частей уравнений системы $\dot{x} = v(x,t)$ должен удовлетворять равенству

$$f_x v + f_t = 0, \quad f_x = (f_{ij}), \quad f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n. \tag{4}$$

Неизвестные $v_1,\dots,v_n$, составляющие вектор v, иногда [7] рассматриваются как искусственно вводимый избыточный набор переменных. Решение уравнения (4) можно построить непосредственно, если часть неизвестных $v^2 = (v_{m+1},\dots,v_n)$ задавать произвольно и остальную часть $v^1 = (v_1,\dots,v_m)$ определять как решение уравнения

$f_{x1}v^1 = -(f_{x2}v^2 + f_t)$, $f_{x1} = (f_{ik}), f_{x2} = (f_{il})$, $i,k = 1,\dots,m$, $l = 1,\dots,m+1$. Тогда система (1) приводится к виду

$$\dot{x}^1 = -f_{x1}^{-1}(f_{x2}v^2 + f_t), \quad \dot{x}^2 = v^2(x,t), \quad x(t_0) = x^0. \tag{5}$$

Пример 1. В [15] для определения зависимости угла поворота φ_2 шатуна относительно оси Ox от соответствующего угла поворота φ_1 кривошипа кривошипно-шатунного механизма используется уравнение

$$r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 = 0, \qquad r, l - const, \tag{6}$$

где r – длина кривошипа, l – длина шатуна. Решение уравнения (6) определяется в параметрической форме как решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}_1 = v_1, \quad \dot{\varphi}_2 = -\frac{v_1 r\cos\varphi_1}{l\cos\varphi_2}, \quad \varphi_1(t_0) = \varphi_1^0, \quad \varphi_2(t_0) = \varphi_2^0, \quad r\sin\varphi_1^0 + l\sin\varphi_2^0 = 0, \tag{7}$$

имеющей структуру (5) в обозначениях $x_1 = \varphi_2, x_2 = \varphi_1$, в которой полагается $v_1 = \omega_1 - const$. Очевидно, что условие $\det(f_{12}) = l\cos\varphi_2 \neq 0$, вообще говоря, не выполняется, однако, по смыслу задачи $\varphi_2 < \dfrac{\pi}{2}$ и при этом выражение $l\cos\varphi_2 \neq 0$.

Для использования системы (5) существенна оговорка о том, что $\det(f_{x1}) \neq 0$, и вектор x^0 удовлетворяет уравнению (3).

Условие $\det(f_{x1}) \neq 0$ хотя и существенно, оно все же преодолимо. В [6] показано, что уравнению (4) при $f_t = 0$ удовлетворяет вектор $v = (v_1,\dots,v_n)$ с составляющими v_j, подобранными в виде суммы произведений:

$$v_j = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_m} c_{j\ j_1\ j_2\dots j_m} f_{1j_1} f_{2j_2}\dots f_{mj_m}, \tag{8}$$

коэффициенты которого с одинаковыми наборами индексов, отличающимися лишь порядком, равны между собой, когда соответствующее число перестановок индексов является четным, и отличаются знаком, когда это число нечетно.

К сожалению, требование $\det(f_{x1}) \neq 0$ является не единственным препятствием к успешному применению метода составления дифференциальных уравнений. "При использовании данного способа описания следует помнить о возможности накопления ошибок интегрирования уравнений" (5). "С ростом времени это приводит к нарушению уравнений связи" (2) или (6) [15]. Следовательно, уравнение должно быть построено так, чтобы его решение $x = x(t, t_0, x^0)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x^0, f(x^0, t_0) = f^0, ||f^0|| \leq \varepsilon$, при численном интегрировании отклонялось от уравнения связей (2) также на величину, сравнимую с ε: $||f(x,t)|| \leq \varepsilon$.

Это оказывается возможным, если для определения правой части $v(x,t)$ уравнения (1) вместо (4) воспользоваться соотношением

$$f_x v + f_t = a, \quad a = a(f, x, t), \quad a(0, x, t) = 0, \tag{9}$$

предложенным в [5,8]. Заметим, что при $a_i = a_i(f_i, x, t), a_i(0, x, t) = 0, i = 1,\dots,m$, каждое равенство $f_i(x,t) = 0$ является частным интегралом [5] или инвариантным соотношением [17], а при $a_i = F_i(f, x, t), a_i(0, x, t) = 0$, равенства $f_i(x,t) = 0$ выполняются одновременно при всех $t > t_0$, если $f_i(x^0, t_0) = 0, i = 1,\dots,m$.

Из (9) следует, что вектор v должен определяться как решение системы m линейных уравнений с n неизвестными

$$Sv = b, \quad S = f_x, \quad d = a - f_t. \tag{10}$$

В [11] было построено общее решение уравнения (10) и в [13] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Совокупность всех решений линейной системы (10) с матрицей S, ранг которой равен m, определяется выражением $v = cv^\tau + v^\nu$, где c – произвольный множитель, $v^\nu = S^+b$, $S^+ = S^T(SS^T)^{-1}, v^\tau$ – векторное произведение: $v^\tau = [s_1 \dots s_m c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ векторов-строк матрицы S и произвольных векторов $c_{m+1}, \dots, c_{n-1}$.

Составляющая v_i^τ векторного произведения вычисляется как определитель, строки которого составлены соответственно из орта $e^i = (\delta_{i1} \dots \delta_{in}), \delta_{ij} = 0, i \neq j, \delta_{ii} = 1$ пространства R_n, векторов-строк матрицы S и произвольных векторов $c_{m+1}, \dots, c_{n-1}$.

Имея общее решение уравнения (10) и обозначая $[f_x C] = [f_{1x} \dots f_{mx} c_{m+1} \dots c_{n-1}]$, где под C подразумевается матрица, по строкам которой расположены векторы $c_{m+1}, \dots, c_{n-1}$, получаем искомое множество систем дифференциальных уравнений кинематики несвободной механической системы:

$$\dot{x} = c[f_x C] + f_x^+(a - f_t), \quad f_x^+ = f_x^T W^{-1}, \quad W = f_x f_x^T, \tag{11}$$

для которых равенство (2) представляет совокупность частных интегралов. В случае $c_k = f_{kx}(x), k = m+1, \dots, n-1$, вычисление составляющих вектора $v^\tau = [f_{1x}, \dots f_{n-1,x}]$ как определителей со строками $e^i, f_{1x}, \dots, f_{n-1,x}$ можно интерпретировать как метод функциональных определителей, использованный в [3].

Очевидно, полагая $a \equiv 0$ в (11), при надлежащих обозначениях легко получить соответствующие выражения (8). Заметим, что в случае $\det(f_{x1}) \geq \delta > 0$ решение уравнения (10) можно непосредственно представить в виде [9]

$$\dot{x}^1 = f_{x1}^{-1}(a - f_{x2}v^2 - f_t), \qquad \dot{x}^2 = v^2(x, t). \tag{12}$$

Система (12) совпадает с (5) при $a \equiv 0$. Форма представления решения уравнения (10) в виде (12) была использована при проведении различных теоретических исследований и решении прикладных задач механики (например [3,4]).

Если функция $c(x,t)$ и матрица $C(x,t)$ определяют величину и направление скорости $\dot{x}$ движения изображающей точки вдоль многообразия $\Omega(t)$, определяемого уравнениями (2), то наличие $a(f,x,t)$ влияет на движение в окрестности $\Omega(t)$ и позволяет обеспечить устойчивость движения по интегральному многообразию $\Omega(t)$. Необходимые определения и основные теоремы об устойчивости интегральных многообразий приведены в [10]. Об устойчивости, в частности, можно судить по поведению определенно-положительной функции Ляпунова $V = 0,5 f^T L f$ с постоянной матрицей L, производная которой, вычисленная в силу (11), равна $\dot{V} = f^T L a$, или $\dot{V} = f^T L P f$, если считать $a = Pf, P = P(x,t)$.

2. Численное решение уравнений кинематики. Уравнение (11), если даже обеспечивает асимптотическую устойчивость многообразия $\Omega(t)$, не может гарантировать при численном решении необходимую точность выполнения равенства (2). При численном решении системы (11) для обеспечения требуемой точности выполнения равенств (2) необходимо иметь соответствующий критерий.

Пусть известны начальные значения t_0, x^0, такие, что $||f^0|| = \sup_i |f_i^0| < \varepsilon, f^0 = f(x^0, t_0)$, и построено уравнение (11), допускающее асимптотически устойчивое интегральное многообразие $\Omega(t)$. Полагая $a = P(x,t)f$ и используя правую часть системы (11), построим разностное уравнение

$$x^{k+1} = x^k + \tau \dot{x}^k, \quad x^k = x(t_k), \quad t_{k+1} = t_k + \tau, \quad \dot{x} = c[f_x C] + f_x^+(Pf - f_t), \tag{13}$$

для которого справедливо следующее утверждение [14].

Теорема 2. Существуют такие постоянные $\alpha, \tau_1, \varepsilon$ и матрица $P(x,t)$, что при выполнении неравенств

1) $||f^0|| \le \varepsilon$,

2) $\tau \le \tau_1$,

3) $||E + \tau P(x,t)|| \le \alpha < 1$,

4) $\frac{\tau_1^2}{2}||f^{(k2)}|| \le (1-\alpha)\varepsilon, \quad f^{(k2)} = v^T f_{xx} v + 2 f_{xt} v + f_{tt}$,

решение разностного уравнения (13) будет удовлетворять условию $||f^k|| \le \varepsilon$ при любом $k = 0, 1, \dots, K$.

В [14] также получены условия, накладываемые на правые части уравнений возмущений связей для обеспечения точности $||f^k|| \le \varepsilon$ при решении системы дифференциальных уравнений (11) методом Рунге-Кутта.

Пример 2. Для определения зависимости угла φ_2 отклонения шатуна от угла φ_1 отклонения кривошипа составим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 &= cl\cos\varphi_2 - \dfrac{pr\cos\varphi_1(r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2)}{r^2\cos^2\varphi_1 + l^2\cos^2\varphi_2}, \\ \dot{\varphi}_2 &= -cr\cos\varphi_1 - \dfrac{pr\cos\varphi_2(r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2)}{r^2\cos^2\varphi_1 + l^2\cos^2\varphi_2}. \end{cases} \tag{14}$$

Система (14) допускает частный интеграл

$$f(\varphi_1, \varphi_2) \equiv r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 = 0, \tag{15}$$

производная которого, вычисленная в силу системы (14), есть $\dot{f} = -pf$. При $p > 0$ кривая, определяемая уравнением (15), является асимптотически устойчивым интегральным многообразием системы (14). Определим условия, которые следует наложить на величины $c, \tau_1, p, \varepsilon$, чтобы выполнялись ограничения $||f^k|| \le \varepsilon, f^k = f(\varphi_1^k, \varphi_2^k), k = 1, 2, \dots$, при вычислении $\varphi_1^{k+1}, \varphi_2^{k+1}$ по разностным формулам: $\varphi_1^{k+1} = \varphi_1^k + \tau v_1^k, \varphi_2^{k+1} = \varphi_2^k + \tau v_2^k$, если $||f^0|| \le \varepsilon$.

Если $r = 1, l = 4, \varphi_1^0 = 0, \varphi_2^0 = 0, \varepsilon = \varepsilon_1 = 10^{-4}, c = 1$, то условия $||f^k|| \le \varepsilon$ будут выполняться при $100 \le p \le 1900$.

3. Уравнения динамики систем с программными связями. Для описания динамики механической системы обычно пользуются уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + R. \tag{16}$$

Здесь $q = (q_1, \dots, q_n), \dot{q} = v = (v_1, \dots, v_n), T$ – кинетическая энергия механической системы, Q – вектор обобщенных сил, R – вектор обобщенных сил реакций связей, определяемых из условия выполнения уравнений связей

$$f(q,t) = 0, \quad f'(v,q,t) = 0, \quad f = (f_1, \dots, f_m), \quad f' = (f_{m+1}, \dots, f_r). \tag{17}$$

Связи, описываемые уравнениями (17), предполагаются обычно идеальными. При этом $R = F^T\lambda$, где $F = (f_{ij})$, $f_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial q_j}, i = 1, \dots, m$, $f_{ij} = \dfrac{\partial f_i'}{\partial v_j}, i = m+1, \dots, r$ – якобиан, соответствующий уравнениям связей, и вектор множителей Лагранжа λ определяется из условий $\ddot{f} = 0, \dot{f}' = 0$. При этом интегральное многообразие $\Omega(t)$, описываемое уравнениями

$$f(q,t) = 0, \quad \dot{f}(q,v,t) = 0, \quad f'(q,v,t) = 0, \quad \dot{f} = f_q v + f_t, \tag{18}$$

не может быть асимптотически устойчивым. Это приводит к тому, что при численном интегрировании дифференциальных уравнений отклонения от многообразия возрастают по норме.

В самом деле, уравнения связей могут оказаться нарушенными уже в начальный момент:

$$q(t_0) = q^0, \quad v(t_0) = v^0, \quad f(q^0, t_0) = f^0, \quad \dot{f}(v^0, q^0, t_0) = \dot{f}^0, \quad f'(v^0, q^0, t_0) = f'^0.$$

Если даже начальные данные точно удовлетворяют уравнениям (17), дальнейшее накопление ошибок численного интегрирования приводит к росту отклонений от уравнений связей. Для удержания неизбежных отклонений от уравнений связей в определенных границах необходимо вводить соответствующую коррекцию в разностную схему решения уравнений (16). Это означает, что связи, которыми ограничены изменения координат и скоростей системы, должны поддерживаться за счет дополнительно вводимых сил, как это происходит в системах с сервосвязями [1,2,16,18,19].

Определение 1. Связи, заданные уравнениями

$$f(q,t) = \alpha(t), \tag{19}$$

$$f'(v,q,t) = \alpha'(t), \tag{20}$$

где $\alpha(t), \alpha'(t)$ определяются как решения дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \ddot{\alpha} = a(\dot{\alpha}, \alpha, \alpha', v, q, t), \quad \dot{\alpha}' = a(\dot{\alpha}, \alpha, \alpha', v, q, t), \\ a(0,0,0,v,q,t) = 0, \quad a'(0,0,0,v,q,t) = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

рассматриваемых совместно с уравнениями динамики при начальных условиях

$$q(t_0) = q^0, \quad v(t_0) = v^0, \quad \alpha(t_0) = f^0, \quad \dot{\alpha}(t_0) = \dot{f}^0, \quad \alpha'(t_0) = f'^0, \tag{22}$$

называются *программными связями.*

Определение 2. Уравнения (21) называются *уравнениями возмущений связей.*

Определение 3. Программные связи (19), (20) называются *устойчивыми программными связями,* если для любого ε существует такое δ, что из $\sup(||f^0||, ||\dot{f}^0||, ||f'^0||) \le \delta$ следует выполнение неравенства $\sup(||\alpha(t)||, ||\dot{\alpha}(t)||, ||\alpha'(t)||) \le \varepsilon$ при всех $t > t_0$.

Определение 4. Программные связи (19), (20) называются *асимптотически устойчивыми программными связями,* если они устойчивы и $\lim\limits_{t\to\infty} ||\alpha(t)|| = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} ||\dot{\alpha}(t)|| = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} ||\alpha'(t)|| = 0$.

Программные связи (19), (20), как и обычные связи, накладывают ограничения на положения и скорости точек системы. Положения системы, для которых ее координаты $q_1, \dots, q_n$ удовлетворяют уравнению (19) для данного значения $\alpha \in \Omega_\alpha$, являются возможными положениями для данного времени t. Вектор v, удовлетворяющий для данного значения $\alpha' \in \Omega'_\alpha$ уравнению (20) при данном возможном для момента времени t положении q системы, является вектором кинематически возможных скоростей $v_1, \dots, v_n$. Из (19), (20) следует, что вектор δq возможных перемещений системы должен удовлетворять условиям

$$F\delta q = \delta z, \qquad \delta z = (\delta\alpha_1, \dots, \delta\alpha_r). \tag{23}$$

Равенство (23) представляет собой систему линейных уравнений относительно составляющих вектора δq с прямоугольной матрицей коэффициентов. Общее решение системы (23) определяется в соответствии с теоремой 1:

$$\delta q = \delta s[FC] + F^+\delta z, \tag{24}$$

где δs – произвольная малая скалярная величина. Подстановка полученного выражения (24) возможных перемещений системы в один из принципов механики позволяет получить соответствующие уравнения динамики системы.

Определение 5. Программные связи являются *идеальными*, если при любой матрице выполняется условие $R^T[FC] = 0$. Нетрудно видеть, что реакция идеальных связей $R = F^T\lambda$, определяемых в классической механике, удовлетворяет этому условию в силу известного тождества $F^T[FC] \equiv 0$. Предполагая связи идеальными, подставим в выражение принципа Даламбера-Лагранжа

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial T}{\partial q} - Q - R\right)^T \delta q = 0$$

общее решение (24) уравнения (23):

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial T}{\partial q} - Q\right)^T ([FC]\delta s + F^+\delta z) - \lambda^T\delta z = 0. \tag{25}$$

Так как матрица C и скаляр δs произвольны, то равенство (25) возможно только в том случае, когда вектор $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial v} - \dfrac{\partial T}{\partial q} - Q$ и строки матрицы F линейно зависимы, то есть вектор q удовлетворяет уравнениям Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + F^T\lambda. \tag{26}$$

Уравнения (19)-(21), (26) составляют замкнутую систему, из которой при соответствующих начальных условиях (22) определяются значения q, v, z и вектора λ, который можно рассматривать как вектор управления программным движением.

4. Сведение ДАУ-3 к системе ДАУ-2. Система уравнений (19)–(21), (26) представляет собой систему ДАУ-3. Введением соответствующей замены переменных ДАУ-3 может быть сведена к системе ДАУ-2, которая после определения выражения вектора λ приводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка, допускающей частные интегралы, определяемые уравнениями связей (18). Для построения разностных схем решения системы дифференциальных уравнений первого порядка могут быть использованы методы, изложенные в п.2.

Пусть

$$T = \frac{1}{2} v^T M v, \qquad M = (m_{jl}), \quad m_{jl} = m_{jl}(q), \quad j, l = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Вычислим выражение левой части уравнения (26). Определим из (27) производные

$$\frac{\partial T}{\partial v} = M v, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = M\dot{v} + \dot{M} v, \quad \dot{M} = (\dot{m}_{jl}), \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q_n}\right), \tag{28}$$

где $\dot{m}_{jl} = \sum\limits_{s=1}^{n} m_{jl,s} v_s$, $\dfrac{\partial T}{\partial q_s} = m_{jl,s} v_j v_l$, $m_{jl,s} = \dfrac{\partial m_{jl}}{\partial q_s}$.

Учитывая (28), уравнение (26) можно записать в виде, разрешенном относительно старших производных:

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = M^{-1}(Q - \gamma + F^T \lambda), \tag{29}$$

$$\gamma_l = \gamma_{kj,l} v_k v_j, \quad \gamma_{kj,l} = \frac{1}{2}(m_{lk,j} + m_{jl,k} - m_{kj,l}).$$

Запишем систему уравнений (19)-(21) в виде

$$f(q,t) = y, \quad \dot{f}(q,v,t) = \dot{y}, \quad f'(q,v,t) = y', \tag{30}$$

$$\dot{f} \equiv f_q v + f_t, \quad f_q = \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = A_{10} y + A_{11}\dot{y} + A_{12} y', \quad \frac{dy'}{dt} = A_{20} y + A_{21}\dot{y} + A_{22} y', \tag{31}$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x,t), \quad \alpha = 1,2, \quad \beta = 0,1,2.$$

В частности, если матрицы $A_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1,2$; $\beta = 1,2$) являются постоянными блочно-диагональными, то система (31) соответствует линейной комбинации уравнений связей и их производных, предложенной в [21].

Введем обозначения:

$$x = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} v \\ Q - \gamma \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & M, \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & f_q \\ 0_{r-m,n} & f'_v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ f' \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} f_q & f_v \\ \dot{f}_q & \dot{f}_v \\ f'_q & f'_v \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где I_n – единичная матрица, $0_{m,n}$ – $m \times n$-матрица, состоящая из нулей, и запишем систему (29)-(31) в виде управляемой системы

$$\dot{x} = N^{-1} w + N^{-1} D^T \lambda \tag{33}$$

с вектором управления λ, соответствующим уравнению программных связей

$$g(x,t) = \alpha, \quad \alpha = (y, \dot{y}, y'), \tag{34}$$

и уравнению возмущений связей

$$\dot{\alpha} = A\alpha, \quad A = \begin{pmatrix} 0_{mm} & I_m & 0_{m,r-m} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Вычисляя производную $\dot{g}$ с учетом обозначений (32) и уравнений (33)-(35), получим равенство

$$G\dot{x} + g_t = Ag. \tag{36}$$

Из (32), (36) следуют очевидное тождество

$$\dot{f} - f_q v - f_t \equiv 0$$

и уравнение

$$S\lambda = Ag - S, \quad S = FM^{-1}F^T, \tag{37}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \dot{f}_q v + f_q M^{-1}(Q - \gamma) + \dot{f}_t \\ f'_q v + f'_v M^{-1}(Q - \gamma) + f'_t \end{pmatrix},$$

для определения вектора λ множителей Лагранжа системы (29)-(31).

Подставляя в (33) решение $\lambda = S^{-1}(Ag - S)$ уравнения (37), получим уравнение

$$\dot{x} = \mathbf{v}(x,t) + B(x,t)g(x,t), \tag{38}$$

которое содержит в правой части вектор $\mathbf{v} = N^{-1}(w - D^T S^{-1} S)$ и матрицу $B = N^{-1} D^T S^{-1} A$, удовлетворяющие равенствам:

$$G\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0_{r1} \end{pmatrix}, \quad GB = \begin{pmatrix} 0_{m,m+r} \\ A \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Из (36), (39) следует, что $v = c[g_x C]$ при определенных $c, C, B = g_x^+ A$, то есть уравнение (38) содержится во множестве систем дифференциальных уравнений, определяемых равенством (11), и выполняется равенство

$$\dot{g} = Ag. \tag{40}$$

Если $f_t = 0, g = (f, \dot{f})$, то, полагая $\dot{g} = -\gamma A g, A = L(HL)^{-1}$, $H = \begin{pmatrix} F & 0 \\ v^T F_{q^T} & F \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} F^T & 0 \\ 0 & F^T \end{pmatrix}$, $F = f_q$, приходим к системе, исследованной в [20].

5. Обратные задачи динамики. Система уравнений (19)-(21),(29) может быть использована для решения обратных задач динамики - определения силовых полей, допускающих заданные интегралы механической системы [3,22]. Рассмотрим следующую обратную задачу динамики. Уравнения движения механической системы имеют обычно следующую структуру:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} & = K(q)v, \\ \\ \dfrac{dv}{dt} & = w(q,v,t) + B(q,v,t)u + W(q,v,t)\lambda. \end{cases} \tag{41}$$

К виду (41) приводятся, например, уравнения Лагранжа, разрешенные относительно ускорений (29): $K(q) = E$, $w(q,v,t) = -M^{-1}\gamma$, $B(q,v,t) = M^{-1}$, $W(q,v,t) = M^{-1}F^T$, уравнения динамики твердого тела с неподвижной точкой, уравнения динамики тела переменной массы. Пусть известны некоторые первые интегралы системы (41)

$$f(q,t) = c, \quad f'(q,v,t) = c' \tag{42}$$

при $\lambda \equiv 0$. Требуется определить соответствующий вектор обобщенных сил u.

Множество значений вектора u определяется как общее решение

$$u = a[SC] + S^+h$$

системы

$$Su = h, \tag{43}$$

полученной дифференцированием выражений (42) в силу (41):

$$S = \begin{pmatrix} f_q K \\ f'_v \end{pmatrix} B, \qquad -h = \begin{pmatrix} f_q Kw + \dot{f}_q Kw + f_q \dot{K} w + \dot{f}_t \\ f'_q w + f'_q v + f_t \end{pmatrix},$$

a – произвольная постоянная, C – произвольная матрица размерности $(n - r - 1) \times n$.

Очевидно, что если $S = S(q), h = h(q)$, то полагая $C = C(q)$ и $a = a(q)$, можно получить множество позиционных сил $u = u(q)$, допускающих интегралы (42). Легко доказывается также справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Вектор u, зависящий только от координат $q_1, \ldots, q_n$ механической системы $u = u(q)$, может быть определен как решение уравнений

$$S_{vi}u = h_{vi}, \quad S_{vi} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{v}_i}, \quad h_{vi} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}_i}. \tag{44}$$

Действительно, если $u = u(q)$, то уравнение (44) непосредственно следует из (43).

Полагая для упрощения $r = n$, запишем соответствующее решение уравнения (43) или (44):

$$u = S^{-1}(q)h(q) \tag{45}$$

и обозначим $u_{i,qj} = \dfrac{\partial u_i}{\partial q_j}$.

Теорема 4. Если при всех $i \neq k$ выполняются равенства $e^k S^{-1}(h_{qi} - S_{qi}S^{-1}h) = e^i S^{-1}(h_{qk} - S_{qk}S^{-1}h)$, то силы $u_1, \ldots, u_n$ являются потенциальными.

В самом деле, записывая результат дифференцирования равенства (43) по q_i с учетом равенства (45) и воспользовавшись условиями, которым удовлетворяют потенциальные силы $u_{i,qj} = u_{j,qi}, u_{i,qj} = \dfrac{\partial u_i}{\partial q_j}$, легко убедиться в справедливости утверждения теоремы.

Пример 3. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой описывается уравнениями (41), где $\lambda \equiv 0$,

$$q_1 = \gamma_1, \qquad (1,2,3), \qquad v_1 = p, \;\; v_2 = q, \;\; v_3 = r,$$

$$K(q) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \frac{1}{A}(B-C)v_2v_3, \quad (1,2,3), \quad B(q,v) = diag\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right).$$

В случае Лагранжа $A = B, x_c = y_c = 0$ система имеет три первых интеграла

$$f_1 \equiv A(p^2+q^2) + Cr^2 + 2Pz_c\gamma_3 = c_1, \quad P - const,$$

$$f_2 \equiv A(p\gamma_1 + q\gamma)\varphi,$$

$$f_3 \equiv r = c_3,$$

по которым определяются

$$S = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} P(q\gamma_2 - p\gamma_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений (44)

$$\frac{\partial S}{\partial p}u = \frac{\partial h}{\partial p}, \quad \frac{\partial S}{\partial q}u = \frac{\partial h}{\partial q}, \quad \frac{\partial S}{\partial r}u = \frac{\partial h}{\partial r}$$

непосредственно следует: $u_1 = P\gamma_2, \; u_2 = -P\gamma_1, \; u_3 = 0.$

В случае С.В. Ковалевской $A = B = 2C, \; y_c = z_c = 0$ из выражений первых интегралов

$$f_1 \equiv C\left(p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2\right) + Px^c\gamma_1 = c_1,$$

$$f_2 \equiv C(2p\gamma_1 + 2q\gamma_2 + r\gamma_3) = c_2,$$

$$f_3 \equiv \left(p^2 - q^2 - \frac{1}{C}Px_c\gamma_1\right)^2 + \left(2pq - \frac{1}{C}Px_c\gamma_2\right)^2 = c_3$$

следует $u_1 = 0, \; u_2 = Px_c\gamma_3, \; u_3 = -Px_c\gamma_2.$

1. *Азизов А.Г.* Об одном методе реализации сервосвязей, наложенных на механическую систему. I, II. // Изв. АН Уз.ССР, сер. тех. наук. - 1972. - Вып. 3. - С. 27-31; вып. 5. - С. 32-36.
2. *Беген Анри.* Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. - М.: Наука, 1967. - 171 с.
3. *Галиуллин А.С., Гафаров Г.Г., Малайшка Р.П., Хван А.М.* Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. - М.: Редакция журнала "Успехи физических наук", 1997.- 324 с.
4. *Воробьев Е.И., Попов С.А., Шевелева Г.И.* Механика промышленных роботов. Учеб. пособ. для втузов. В 3-х кн. Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. Кн. 1. Кинематика и динамика. Москва. Высш. шк., 1988.- 304с.
5. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. математика и механика. - 1952. - **21**, вып. 6. - С. 659-670.
6. *Игнатьев М.Б.* Голономные автоматические системы. - М.; Л.: Изд-ие АН СССР, 1963. - 204 с.
7. *Коренев Г.В.* Введение в механику человека. - М.: Наука, 1977. - 264 с.

8. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. - М.: Иностр. лит. - 1951. - Т.2, ч. 2. - 555 с.
9. *Мухарлямов Р.Г.* Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы // Дифференц. уравнения. - 1967. - **3**, N 2. - С. 180-192.
10. *Мухарлямов Р.Г.* Построение множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Там же. - 1969. - **5**, N 4. - С.688-699.
11. *Мухарлямов Р.Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Там же 1971. - **7**, N 10. - С. 1825-1834.
12. *Мухарлямов Р.Г.* О решении систем нелинейных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1971. - **11**, N 4. - С. 829-836.
13. *Мухарлямов Р.Г.* Об уравнениях движения механических систем // Дифференц. уравнения. - 1983. - **19**, N 12. - С. 2048-2056.
14. *Мухарлямов Р.Г.* О численном решении дифференциально - алгебраических уравнений // Вестник РУДН, сер. Прикл. математика и информатика. - 1999. - N 1. - С. 20-24.
15. *Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.* Уравнения движения механических с истем в избыточном наборе переменных // Сб. научно-методических статей по теор. механике. - 1987. - Вып. 18. - С. 62-66.
16. *Нугманова Ш.С.* Об уравнениях движения управляемых систем // Тр. Казанского авиац. ин-та. - 1953. - **27**. - С. 23-40.
17. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. - Киев.: Наукова думка, 1995. - 407 с.
18. *Четаев Н.Г.* О вынужденных движениях // Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. - М.: Изд-е АН СССР, 1962. - С. 329-335.
19. *Шульгин М.Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. - Ташкент: Изд-ие Ср. Аз. ун-та, 1958. - 189 с.
20. *Ascher U.M., Hongsheng Chin, L.R.Petzold, S. Reich.* Stabilization of constrained Mechanical systems with DAEs and invariant manifolds // Mechanics of Structures and Machines. - 1995. - **23**. - P. 135-158.
21. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. - 1972. - **1**. - P.1-16.
22. *Bozis G., Ichtiaroglou S.* Existence and construction of dynamical systems having a prescribed integral of motion - an inverse problem // Inverse Problems. - 1987. - **3**. - P. 213-227.
23. *Rentrop P., Strehmel K., Weiner R.* Ein Uberblick uber Eincshrittverfaren zur numerischen Integration in der technischen Simulation // GAMM-Mitteilungen. - 1996. - **19**, H.1. - S. 9-43.

Российский ун-т Дружбы народов, Москва Получено 21.12.99

УДК 531.38

©2000. **И.Н. Гашененко**

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

В работе изучены и классифицированы множества допустимых угловых скоростей, отвечающие фиксированным интегральным уровням задачи о движении гиростата вокруг неподвижной точки. Получено уравнение двумерной огибающей поверхности, которая ограничивает семейство траекторий-годографов в подвижном базисе. Исследована возможность самопересечений подвижных годографов угловой скорости.

1. Введение. Тело с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, и тело, несущее симметричный вращающийся ротор, являются наиболее известными, но не единственными примерами механической системы, называемой гиростатом [10]. Движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки описывается системой дифференциальных уравнений

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega} \qquad (1)$$