УДК 531.38

©2000. **М.Е. Лесина, Л.В. Кудряшова**

О НЕКОТОРЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ДОНЕЦКОЙ ШКОЛЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статья представляет собой обзор результатов по научным направлениям, сформированным в Донецкой школе механики. Это – конструктивный метод инвариантных соотношений; новые формы представления математических моделей в классических задачах; открытие новых классов точных решений; создание метода компьютерной визуализации движений тел и форм закрученного и изогнутого стержня.

В отличие от механики прикладной, разрабатывающей инженерные методы расчета конструкций (в том числе – движущихся объектов), аналитическая механика создает методы математического моделирования широких классов объектов, содержащих наборы параметров, характеризующих рассматриваемую систему. При такой общности постановок задач принимают и значительные идеализации рассматриваемых объектов, стремясь, чтобы получаемая математическая модель (система дифференциальных уравнений) была доступна для анализа. Полагают, например, тела абсолютно твердыми, жидкость – несжимаемой и лишенной вязкости, стержни – тонкими, гибкими и т.п. Так в аналитической динамике были сформированы классические задачи: о движении тела, имеющего неподвижную точку – центр идеального сферического шарнира, а в более общей постановке – задача о движении системы тел, сочлененных идеальными (лишенными трения) шарнирами; задача о движении тела в простирающейся беспредельно идеальной несжимаемой жидкости; основанная на математической аналогии с задачей о движении твердого тела задача о кручении и изгибе концевыми нагрузками тонкого стержня и др. В течение длительного времени эти задачи разрабатывались крупнейшими учеными, получившими в них первые результаты фундаментального значения, послужившие на стыке XIX и XX веков началом формирования новых разделов аналитической динамики. Работы основоположников породили обширную литературу, но лишь во второй половине XX века были созданы конструктивные методы и алгоритмы исследования. В основном они принадлежат ученым Донецкой школы динамики твердого тела.

В основанной П.В.Харламовым Донецкой школе механики было сформировано несколько научных направлений, которые опирались на соответствующие фундаментальные результаты. Они развиты затем научным коллективом Донецка.

I. Создан конструктивный метод инвариантных соотношений. Этот метод с учетом специфики математических моделей динамики твердого тела открыл возможности строить в замкнутом виде точные аналитические решения.

II. В классических задачах получены новые формы представления математических моделей, упрощающие использование метода инвариантных соотношений при нахождении точных решений.

III. Использование этих результатов привело к открытию новых классов точных решений (значительно увеличилось их количество) и подвело фундамент под критический анализ некоторых решений, которые находили ранее другими (иногда искусственными) путями.

IV. Создан метод компьютерной визуализации движений тел и форм закрученного и изогнутого стержня, посредством которого на основе найденных математических решений получают необходимую механике информацию о движении тел и деформации стержня.

Результаты, полученные по некоторым из этих направлений, уже были предметом обзоров [26, 52-55, 135, 136] (по состоянию на конец 70-х годов). В последующие годы многие из результатов были обобщены и дополнены. Возникла необходимость дать новый обзор, для написания которого привлечены статьи [26, 52-55, 135, 136].

I. Конструктивный метод инвариантных соотношений построения точных решений систем дифференциальных уравнений. П.В.Харламов предложил конструктивное определение инвариантного соотношения и разработал метод построения точных решений с инвариантными соотношениями. Его основные результаты изложены в работе [132]. Там рассматриваются динамические системы с параметрами

$$x_i^\bullet = X_i(x_1, x_2, ..., x_n;\ a_1, a_2, ..., a_m), \qquad i = 1, 2, ..., n\ . \tag{1}$$

Именно такими системами и описываются задачи динамики твердого тела. В общем случае система (1) может иметь несколько первых интегралов

$$J_j(x_1, x_2, ..., x_n;\ a_1, a_2, ..., a_m) = C_j, \qquad j = 1, 2, ..., p\ . \tag{2}$$

П.В.Харламов рассматривает некоторую функцию

$$f^0(x_1, x_2, ..., x_n;\ a_1, a_2, ..., a_m;\ c_1, c_2, ..., c_q)\ , \tag{3}$$

характеризуемую набором параметров $c_1, c_2, ..., c_q$. Каждой функции этого класса сопоставляется последовательность $f^{(j)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ $j = 1, 2, ...$, члены которой определяются равенством

$$f^{(j)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \frac{\partial}{\partial x_i} f^{(j-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\ , \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_m), \quad \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, ..., c_q)\ .$$

Доказано, если в последовательности (3), (4) имеется $l < n$ функционально независимых членов, то такими будут первые члены последовательности. Задача построения инвариантного соотношения $f^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$ сведена тем самым к исследованию функциональной зависимости совокупности конечных соотношений $f^{(j)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ $(j = 0, 1, ..., l-1)$, к которым необходимо присоединить интегралы (2). Эти соотношения зависимы, вообще говоря, не при всех, а лишь при некоторых значениях $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{C}^*(C_1^*, C_2^*, ..., C_p^*)$ параметров. При этом система

$$x_i^\bullet = X_i(x_1, x_2, ..., x_n;\ a_1^*, a_2^*, ..., a_m^*)$$

с интегралами $J_j(x_1, x_2, ..., x_n;\ a_1^*, a_2^*, ..., a_m^*) = C_j^*$ допускает инвариантное соотношение $f^0(x_1, x_2, ..., x_n;\ a_1^*, a_2^*, ..., a_m^*;\ c_1^*, c_2^*, ..., c_q^*) = 0$.

Свою теорию П.В.Харламов распространил и на случай системы инвариантных соотношений. Тем самым предложен четкий алгоритм построения точных решений задач механики. Принципиальным моментом здесь является назначение исходной функции (3), выбор ее и определяет возможность нахождения точного решения. В теоретических постановках без конкретизации правых частей уравнения (1) какие-либо допущения о функции (3) сделать, конечно, нельзя. Успех метода П.В.Харламова в динамике твердого тела объясняется спецификой ее задач: существуют математические модели, в которых правые части уравнений (1) и интегралы (2) – алгебраические функции переменных задачи. Но и до создания этого метода все находившиеся ранее искусственными путями точные решения имели по отношению к переменным алгебраическую структуру. Поэтому естественно было задавать функцию (3) в виде многочлена, вводя в качестве дополнительных параметров c_i его коэффициенты. А поскольку при этом вся совокупность функций (3), (4) оказывалась алгебраической, к ней эффективно могли быть применены разработанные в алгебре методы исключения переменных (например, посредством результантов). Именно этой конструктивностью и обусловлен последующий успех в построении точных решений в динамике твердого тела.

Заметим, что такой конструктивности не имели вводившиеся ранее понятия инвариантного соотношения. Приведем, например, определение А.Пуанкаре, которому принадлежит и сам термин инвариантное соотношение. В его определении нет параметров a_i , и исходная система записана в виде

$$x_i^\bullet = X_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad i = 1, 2, ..., n \ . \tag{5}$$

В связи с этой системой А.Пуанкаре рассматривает совокупность соотношений

$$f_s(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \qquad s = 1, 2, ..., k \ , \tag{6}$$

и предполагается, что эти уравнения влекут как следствие соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} f_s(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$

и заключает: "если уравнения (6) удовлетворены для некоторого значения t , они будут удовлетворены для всех значений t ; вот почему мы назовем систему (6) системой инвариантных соотношений" [78, с.45].

Какие-либо конструктивные предложения о структуре инвариантного соотношения в определении А.Пуанкаре отсутствуют, и основной вопрос о его выборе остается открытым.

Приведем еще и определение Т.Леви-Чивита [185] (оно имеется также в монографии [58, с.278]):

"Конечное соотношение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n;\ t) = 0 \tag{7}$$

называется инвариантным по отношению к заданной обыкновенной системе уравнений $x_i^* = X_i(x_1, x_2, ..., x_n;\ t)$ $i = 1, 2, ..., n$, если все решения системы, которые удовлетворяют этому соотношению вначале, т.е. при частном значении t , будут удовлетворять ему также и при другом значении этого переменного" . Т.Леви-Чивита утверждает, что необходимым и достаточным условием существования инвариантного соотношения (6) является требование, чтобы эта функция удовлетворяла дифференциальному уравнению в частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda f$, вводя при этом подлежащий определению множитель $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n;\ t)$. Значит, это определение остается на уровне теоремы существования, а поэтому не является конструктивным.

Заметим, что введенный таким путем множитель λ этим соотношением не может быть найден, так как он стоит перед функцией, обращающейся в нуль на всех искомых траекториях. Кроме того, Т.Леви-Чивита в определении инвариантного соотношения, в отличие от П.В.Харламова, ограничивается лишь одной (первой) производной в силу уравнений, существенно сужая тем самым само это понятие (у П.В.Харламова это названо инвариантным соотношением первого слоя).

Таким образом, нет никаких оснований говорить, о методах нахождения инвариантных соотношений, предложенных А.Пуанкаре и Т.Леви-Чивита, хотя такие утверждения появляются в некоторых публикациях. Так, в монографии [18, с.79] раздел, посвященный методу инвариантных соотношений, начат определениями Т.Леви-Чивита, которые противопоставлены "второму способу инвариантных соотношений, развитому П.В.Харламовым". И уже в публикации [21] говорят о "методе инвариантных соотношений, предложенном Т.Леви-Чивита и П.В.Харламовым" со ссылкой на монографию [18]. Не уяснив различия между определением понятия инвариантного соотношения у Т.Леви-Чивита и конструктивным методом построения инвариантного соотношения, авторы работ [21, 22] и пришли к некоторым утверждениям, критический анализ которых выполнен в работе [163].

II. Модификация и новые формы уравнений классических задач динамики твердого тела. В середине XVIII века Л.Эйлер в качестве основных переменных, характеризующих движение твердого тела, ввел компоненты угловой скорости тела в осях, неизменно с ним связанных, и направляющие косинусы неподвижных в пространстве осей. И в этих переменных он представил математическую модель движения. Ему принадлежат динамические и кинематические уравнения, носящие теперь его имя (см. об этом в [162]). Именно математическая модель Л.Эйлера использовалась в течение двухсот лет при изучении различных задач динамики твердого тела. В конце прошлого века Н.Е.Жуковский обобщил постановку Л.Эйлера на систему тел, состоящую из тела-носителя и несомых масс, совершающих по отношению к нему циклические движения [34]. Такая система получила название гиростата [90, 140, 178]. Почти все результаты, полученные ранее для одного твердого тела, к настоящему времени обобщены на гиростат, поэтому будем обсуждать их для уравнений Эйлера - Жуковского: [1]

$$A_1 p_1^{\bullet} = (A_2 - A_3)p_2 p_3 + \lambda_2 p_3 - \lambda_3 p_2 + (e_2\nu_3 - e_3\nu_2)\Gamma, \qquad \nu_1^{\bullet} = p_3\nu_2 - p_2\nu_3 \quad (123). \tag{8}$$

Принципиальную возможность получить решение этих уравнений обеспечивает их автономность, наличие последнего множителя и трех интегралов

$$\begin{gathered}(A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 + A_3 p_3^2) - 2(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3)\Gamma = 2E,\\(A_1 p_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2 p_2 + \lambda_2)\nu_2 + (A_3 p_3 + \lambda_3)\nu_3 = k, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.\end{gathered} \tag{9}$$

Задача сводится к квадратурам, как только будет найден четвертый интеграл. Кажущаяся близость окончательного результата в построении математического решения привлекла внимание многих исследователей (в том числе крупнейших математиков), породила громадную литературу (см. библиографию в [26, 52, 53, 135] и библиографический указатель [99]) - задача стала классической.

[1] Из шести уравнений выписаны два, остальные уравнения получаются циклической перестановкой индексов 1,2,3.

Более двухсот лет задачу изучали, основываясь на уравнениях (8). Интегралы (9) теоретически представляют возможность понизить порядок системы и уменьшить в уравнениях число переменных. В стремлении к этому в конце XIX века начались поиски новых форм уравнений динамики твердого тела, но первые попытки не достигли цели. Реализация такой возможности наталкивалась на большие трудности, обусловленные нелинейностью как интегралов, так и исходных уравнений. Так, например, А.Д.Билимович [3], выбирая в качестве основных переменных углы Эйлера, предложил в 1912 г. использовать известную процедуру игнорирования циклических координат и указал последовательность операций, применением которых задача может быть сведена к одному уравнению второго порядка. Из-за чрезвычайной громоздкости это уравнение в явном виде никогда не было записано. В так называемых уравнениях Гесса (1890) [180] старые переменные полностью не исключены, и поэтому наряду с дифференциальными необходимо рассматривать еще три конечных соотношения. Таким образом, уравнения Гесса не имеют преимуществ по сравнению с динамическими уравнениями Эйлера, рассматриваемыми с известными тремя интегралами.

В 1962 г. на конференции в Казани П.В.Харламов сообщил о новом подходе к постановке классической задачи динамики твердого тела [120]. Он отказывается от традиционного использования главных осей тензора инерции в неподвижной точке O тела и определяющую роль придает оси, идущей из O к центру масс тела. Вместо тензора инерции использует взаимный ему гирационный тензор и остальные две оси совмещает с главными осями эллипса - пересечения гирационного эллипсоида с плоскостью, ортогональной первой оси. Эти оси теперь называют осями Харламова [91, с.212-216, 238] (сам он назвал их специальными). Компоненты момента количества движения гиростата относительно точки O обозначены $(x+\lambda, y+\lambda_1, z+\lambda_2)$ при постоянном в нем гиростатическом моменте $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$. Вместе с компонентами (ν, ν_1, ν_2) единичного

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1 \tag{10}$$

вектора направления силы тяжести основными переменными назначены x, y, z, посредством которых представлены компоненты p, q, r угловой скорости гиростата и кинетическая энергия (без постоянного слагаемого):

$$p(x,y,z)=ax+b_1y+b_2z, \qquad q(x,y)=a_1y+b_1x, \qquad r(x,z)=a_2z+b_2x, \tag{11}$$

$$T(x,y,z)=\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x. \tag{12}$$

В осях Харламова вместо (8), (9) имеем уравнения и интегралы

$$x^\bullet=(y+\lambda_1)r-(z+\lambda_2)q\ , \tag{13}$$

$$\nu_1\Gamma=(y+\lambda_1)p-(x+\lambda)q+z^\bullet\ , \quad \nu_2\Gamma=(z+\lambda_2)p-(x+\lambda)r-y^\bullet\ , \tag{14}$$

$$T-\nu\Gamma=E, \tag{15}$$

$$(x+\lambda)\nu+(y+\lambda_1)\nu_1+(z+\lambda_2)\nu_2=k. \tag{16}$$

Если попытки понижения порядка системы (8) на основе интегралов (9) не достигали цели, то в специальных осях это осуществляется элементарно. Эти динамические уравнения П.В.Харламова таковы:

$$\Big[(a_2z+b_2x)(y+\lambda_1)-(a_1y+b_1x)(z+\lambda_2)\Big]\Big[(y+\lambda_1)\frac{dz}{dx}-(z+\lambda_2)\frac{dy}{dx}\Big]+$$

$$+(ax+b_1y+b_2z)\Big[(y+\lambda_1)^2+(z+\lambda_2)^2\Big]+(x+\lambda)\Big[\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+$$

$$+(b_1y+b_2z)x-(a_1y+b_1x)(y+\lambda_1)-(a_2z+b_2x)(z+\lambda_2)-E\Big]=k,$$

$$\bigg\{\Big[(a_2z+b_2x)(y+\lambda_1)-(a_1y+b_1x)(y+\lambda_2)\Big]\frac{dy}{dx}-(a_1x+b_1y+b_2z)(z+\lambda_2)+ \tag{17}$$

$$+(a_2z+b_2x)(x+\lambda)\bigg\}^2+\bigg\{\Big[(a_1y+b_1x)(z+\lambda_2)-(a_2z+b_2x)(y+\lambda_1)\Big]\frac{dz}{dx}-$$

$$-(ax+b_1y+b_2z)(y+\lambda_1)+(ay+b_1x)(x+\lambda)\bigg\}^2+$$

$$+\bigg\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\bigg\}^2-\Gamma^2=0\ .$$

Здесь $a, a_1, a_2, 0, b_1, b_2$ – компоненты гирационного тензора $\boldsymbol{a}$; Γ – произведение веса гиростата и расстояния его центра масс от неподвижной точки тела. Постоянные E и k интегралов (15), (16) с учетом (12), выступают уже в качестве параметров уравнений (17).

Эту систему можно свести к одному уравнению второго порядка, однако, как показала Е.И.Харламова [153], оно оказывается чрезвычайно громоздким.

Замечательно, что в случае, когда одна из специальных осей совпадает с главной и гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}$ ортогонален этой оси, Е.И.Харламовой [151] удалось свести задачу к одному разрешающему уравнению, но уже не дифференциальному, а интегро-дифференциальному

$$\mathrm{Re}(a_1-a_2)^2\bigg\{\frac{2a_2^2}{s^2}\,\frac{d^2x}{d\sigma^2}+\Big[(2a-a_2)(a_1-a_2)-2b^2\Big]x+2a_2b\lambda_1-$$

$$-a_2(a_1-a_2)\lambda-ia_2\Big(\frac{a_2}{s}\,\frac{dx}{d\sigma}-bx+a_1\lambda_1\Big)\bigg\}\Big\langle(\nu^0+\nu_1^0)\exp[is(\sigma-\sigma_0)]+$$

$$+\frac{s}{a_2(a_1-a_2)^2\Gamma}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\bigg\{\frac{a_1a_2}{s}\,\frac{dx}{d\tau}-a_2bx+a_1a_2\lambda_1-i\Big[\frac{a_2b}{s}\frac{dx}{d\tau}+a(a_1-a_2)x-$$

$$-b^2x+a_2b\lambda_1\Big]\bigg\}\bigg\{\frac{a_2^2}{s^2}\,\frac{d^2x}{d\tau^2}+[(a-a_2)(a_1-a_2)-b^2]x+ \tag{18}$$

$$+a_2b\lambda_1-a_2(a_1-a_2)\lambda\bigg\}\exp[is(\sigma-\tau)]d\tau\Big\rangle\Gamma=a_2(a_1-a_2)^3k\Gamma+$$

$$+\bigg\{\frac{a_2^2}{s^2}\,\frac{d^2x}{d\sigma^2}+[(a-a_2)(a_1-a_2)-b^2]x+a_2b\lambda_1-$$

$$-a_2(a_1-a_2)\lambda\bigg\}\bigg\{\frac{a_1a_2^2}{s^2}\Big(\frac{dx}{d\sigma}\Big)^2-2\frac{a_2^2b}{s}x\frac{dx}{d\sigma}+2\frac{a_1a_2^2}{s}\lambda_1\frac{dx}{d\sigma}+$$

$$+\Big[(2a_2-a_1)b^2+a(a_1-a_2)^2\Big]x^2-2a_2^2b\lambda_1x+a_1a_2^2\lambda_1^2-2(a_1-a_2)^2E\bigg\}\ .$$

Здесь s – параметр, введенный для упрощения уравнения (18); a, a_1, a_2, b – компоненты гирационного тензора; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести (ν, ν_1, ν_2 – его компоненты); $\boldsymbol{\nu}^0$ - положение вектора $\boldsymbol{\nu}$ в начальный момент. Теперь достаточно установить из этого уравнения зависимость искомых величин от вспомогательной переменной σ , чтобы получить точное решение задачи.

Именно на основе этих уравнений были получены новые классы решений указанной задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку.

В динамических уравнениях (17) и интегродифференциальном уравнении (18) достигнут наинизший порядок уравнений задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. Эти уравнения имеют алгебраическую структуру. Именно такие свойства их и обеспечили те успехи, которые в последнее время установлены в построении новых классов решений труднейших классических задач аналитической механики. Отметим, что получение уравнений (17), (18) оказалось возможным лишь при отказе от сложившихся традиционных постановок задач (введены специальные оси и гирационный тензор).

Одной из наиболее общих задач динамики твердого тела, сводящихся к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, является задача о движении твердого тела в простирающейся безгранично идеальной несжимаемой жидкости. Основными переменными такой задачи Г.Кирхгоф назначает компоненты угловой скорости и скорости точки тела в осях, связанных с телом. В этих переменных традиционно и записывают уравнения движения, обычно рассматривая лишь тот случай, когда поверхность, ограничивающая тело, односвязна (см., например, [37, с.200; 49, с.390; 57, с.210;]). В более общем случае, когда тело имеет полости, заполненные жидкостью, и отверстия, через которые циркулирует внешняя по отношению к телу жидкость, В.А.Стеклов [94] в тех же переменных привел задачу к уравнениям:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right)^{\bullet} + \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \alpha_3\right)\omega_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \alpha_2\right)\omega_3 + \left(\frac{\partial T}{\partial v_3} + \beta_3\right)v_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial v_2} + \beta_2\right)v_3 = 0, \qquad (19)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v_1}\right)^{\bullet} + \left(\frac{\partial T}{\partial v_3} + \beta_3\right)\omega_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial v_2} + \beta_2\right)\omega_3 = 0 \qquad (123). \qquad (20)$$

Входящие в эти уравнения постоянные α_i, β_i характеризуют циклические течения жидкости, а T - квадратичная форма основных переменных [2]

$$2T = A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}v_iv_j + 2C_{ij}\omega_iv_j.$$

П.В.Харламов предложил новую форму уравнений движения этой задачи, назначив основными переменными компоненты R_i, P_i векторов измененной импульсивной силы $\boldsymbol{R}$ и пары $\boldsymbol{P}$ [118, 123]. С квадратичной формой

$$2T = a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j + 2c_{ij}P_iR_j \qquad (21)$$

сопоставлены линейные формы $\omega_i = \partial T/\partial P_i, \ v_i = \partial T/\partial R_i$, при помощи которых и записаны уравнения указанной задачи

$$P_1^{\bullet} = (P_2 + \lambda_2)\omega_3 - (P_3 + \lambda_3)\omega_2 - R_3v_2 + R_2v_3 + \mu_2R_3 - \mu_3R_2,$$

[2]По дважды входящему в одночленное выражение индексу проводится суммирование по значениям 1, 2, 3.

$$R_1^\bullet = R_2\omega_3 - R_3\omega_2 \quad (123). \tag{22}$$

Они имеют интегралы

$$T - \mu_i R_i = h, \quad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2,$$
$$(P_1 + \lambda_1)R_1 + (P_2 + \lambda_2)R_2 + (P_3 + \lambda_3)R_3 = k. \tag{23}$$

При отсутствии циркуляций

$$\lambda_i = 0, \quad \mu_i = 0 \tag{24}$$

эта форма уравнений имеется у С.А.Чаплыгина [172, 173].

В дополнение к указанным двум формам дифференциальных уравнений обсуждаемой задачи П.В.Харламов в одной из своих ранних публикаций [116] указывает возможность записи еще двух форм этой задачи, когда основными переменными назначаются P_i, v_i или R_i, ω_i . Развернутая запись последней формы уравнений использована Е.И.Харламовой, Л.А.Степановой [165]: при обозначениях

$$J_k = a_k^{-1}, \quad \mu_i = \Gamma e_i, \quad N_{ij} = \Big(b_{ij} - \sum_{k=1}^{3} c_{ik}c_{jk}J_k\Big)R^2 \ ,$$
$$E_1 = (c_1J_1 - c_2J_2 - c_3J_3)R, \quad E_{23} = (J_2 + J_3)c_{23}R \quad (123)$$

и замене переменных $P_1 = J_1(\omega_1 - c_{1i}R\nu_i)$, $R_i = R\nu_i$, $v_1 = \dfrac{N_{1i}}{R}\nu_i + \sum\limits_{i=1}^{3} c_{1i}J_i\omega_i$ уравнения (22) преобразованы к виду

$$J_1\omega_1^\bullet = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + (E_{3i}\omega_2 -$$
$$-E_{2i}\omega_3 + N_{3i}\nu_2 - N_{2i}\nu_3)\nu_i + (e_2\nu_3 - e_3\nu_2)\Gamma, \tag{25}$$
$$\nu_1^\bullet = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3 \quad (123).$$

Уравнения (25) получены здесь как одна из форм математической модели движения тела в жидкости, однако в таком представлении она очевидным образом может быть использована как обобщение классической задачи о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку, если в ней к потенциальным силам введены еще и гироскопические силы с тензором E_{ij} . Тем самым П.В.Харламов установил полную аналогию между этими двумя задачами динамики твердого тела, рассматривавшимися ранее как совершенно независимые. Позже эта аналогия неоднократно обсуждалась [71, 72, 75, 160, 165].

Если обнаруживают, что уравнения рассматриваемой задачи совпадают по форме с уравнениями задачи уже изучавшейся, получают возможность, не проводя дополнительных исследований, распространить результаты первой на последнюю. Но и в тех случаях, когда аналогия обнаружена после того, как обе задачи изучались независимо, она небесполезна - в каждой из задач разрабатывались свои методы и перенос их в другую задачу обогащает ее. Добавим к этому, что в результате установленной аналогии обычно выясняется, что различные авторы в разное время изучали, по существу, одну и ту же систему уравнений, и неоднократно усилия направлялись на достижение результата, уже полученного в смежной задаче.

Рассмотренные две классические задачи получили математическое обобщение. Наиболее далеко идущее обобщение дал М.П.Харламов в монографии [114] (см. также более раннее сообщение [111])

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\bullet}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nabla}_{\nu}\Pi+\boldsymbol{\nu}'\times\boldsymbol{\nabla}_{\nu'}\Pi+\boldsymbol{\nu}''\times\boldsymbol{\nabla}_{\nu''}\Pi. \qquad (26)$$

Здесь в дополнение к введенному еще Лагранжем в правых сторонах уравнений (26) потенциалу $\Pi(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}',\boldsymbol{\nu}'')$ имеется вектор $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}',\boldsymbol{\nu}'')$. Его компоненты $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ – "любые функции на многообразии $M = SO$ (3) " [114, с.50, 47]. И "самые общие уравнения, описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле потенциальных и гироскопических сил", таковы [114, с.50]:

$$\begin{gathered}A_1\omega_1^{\bullet}+(A_3-A_2)\omega_2\omega_3+\omega_2\kappa_3-\omega_3\kappa_2=\\ =\nu_2\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_2}+\nu_2'\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_3'}-\nu_3'\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_2'}+\nu_2''\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_3''}-\nu_3''\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_2''}\quad(123).\end{gathered} \qquad (27)$$

Для замыкания системы они требуют привлечения девяти кинематических уравнений

$$\nu_1^{\bullet}=\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3,\qquad \nu_1'^{\bullet}=\omega_3\nu_2'-\omega_2\nu_3',\qquad \nu_1''^{\bullet}=\omega_3\nu_2''-\omega_2\nu_3''\qquad(123). \qquad (28)$$

Система (27), (28) допускает интегралы

$$\begin{gathered}A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2+2\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3;\ \nu_1',\nu_2',\nu_3';\ \nu_1'',\nu_2'',\nu_3'')=2E,\\ \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1,\quad {\nu_1'}^2+{\nu_2'}^2+{\nu_3'}^2=1,\quad \nu_1''^2+\nu_2''^2+\nu_3''^2=1\ ,\\ \nu_1'\nu_1''+\nu_2'\nu_2''+\nu_3'\nu_3''=0,\qquad \nu_1''\nu_1+\nu_2''\nu_2+\nu_3''\nu_3=0,\qquad \nu_1\nu_1'+\nu_2\nu_2'+\nu_3\nu_3'=0.\end{gathered}$$

Понятно, что при такой общности постановки при четырех (Π, $\boldsymbol{\kappa}$) неконкретизированных функциях прямая задача не имеет смысла, и возможна постановка лишь обратных и полуобратных задач.

В стремлении сблизить свойства системы (27), (28) со свойствами уравнений классических задач в [114] поставлен вопрос об условиях существования у нее интеграла площадей. Доказано, что этот интеграл существует, если силовое поле осесимметрично $\Pi=\Pi(\boldsymbol{\nu})$, а "вектор, составленный из коэффициентов формы гироскопических сил, мог быть записан в виде

$$\boldsymbol{\kappa}\ (\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{\nu}F(\boldsymbol{\nu})+\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{\nu}), \qquad (29)$$

где F и f – функции, зависящие только от ν_1,ν_2,ν_3. Если выполнено условие (29), то интеграл площадей имеет следующее выражение: $A_1\omega_1\nu_1+A_2\omega_2\nu_2+A_3\omega_3\nu_3+f(\nu_1,\nu_2,\nu_3)= = k$ ", или в векторном представлении,

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+f(\boldsymbol{\nu})=k. \qquad (30)$$

Таким образом, в [111, 114] получено математическое обобщение основных классических задач аналитической динамики твердого тела в виде системы

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\bullet}+\boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\nu}F(\boldsymbol{\nu})+\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{\nu})]=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nabla}\Pi(\boldsymbol{\nu}),\qquad \boldsymbol{\nu}^{\bullet}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}=0 \qquad (31)$$

с интегралами

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+2\Pi(\boldsymbol{\nu})=2E,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+f(\boldsymbol{\nu})=k,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1 \tag{32}$$

или в компонентной записи

$$A_1\omega_1^\bullet+\omega_2\left[A_3\omega_3+\nu_3F(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\frac{\partial f(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}\right]-\omega_3\left[A_2\omega_2+\nu_2F(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial f(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}\right]=\nu_2\frac{\partial\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}, \tag{33}$$

$$\nu_1^\bullet+\omega_2\nu_3-\omega_3\nu_2=0\quad(123);$$

$$A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2+2\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=2E,$$
$$A_1\omega_1\nu_1+A_2\omega_2\nu_2+A_3\omega_3\nu_3+f(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=k, \tag{34}$$

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1. \tag{35}$$

Иногда удобно вместо угловой скорости использовать вектор момента количества движения с введением гирационного тензора $\boldsymbol{a}$, тогда $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G}$, $\omega_1=a_1G_1+a_{12}G_2+$ $+a_{13}G_3$ (123). При такой замене соотношения (31)-(34) принимают вид

$$\boldsymbol{G}^\bullet-[\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\nu}F(\boldsymbol{\nu})+\nabla f(\boldsymbol{\nu})]\times(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G})=\boldsymbol{\nu}\times\nabla\Pi(\boldsymbol{\nu}),\quad \boldsymbol{\nu}^\bullet=\boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G}),$$

$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G}+2\Pi(\boldsymbol{\nu})=2E,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{G}+f(\boldsymbol{\nu})=k,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1$$

или

$$G_1^\bullet=\left[G_2+\nu_2F(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\frac{\partial f(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}\right](a_{13}G_1+a_{23}G_2+a_3G_3)-$$
$$-\left[G_3+\nu_3F(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\frac{\partial f(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}\right](a_{12}G_1+a_2G_2+a_{23}G_3)+$$
$$+\nu_2\frac{\partial\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}\quad(123),$$
$$\nu_1^\bullet=\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3\quad(123);$$
$$a_1G_1^2+a_2G_2^2+a_3G_3^2+2(a_{23}G_2G_3+a_{31}G_3G_1+a_{12}G_1G_2)+2\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=2E,$$
$$\nu_1G_1+\nu_2G_2+\nu_3G_3+f(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=k. \tag{36}$$

Интегрирующий множитель системы (33), как и в классических задачах – константа, так что и в этом случае для сведения задачи к квадратурам достаточно в дополнение к интегралам (34), (35) указать еще один интеграл.

Лишена смысла имеющаяся возможность допустить зависимость скалярной функции F от компонент угловой скорости в виде $F=F(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\nu})=F(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, разрушающая характерную для задач динамики твердого тела структуру динамических уравнений. При такой зависимости для нахождения интегрирующего множителя потребовалось бы интегрировать уравнение в частных производных [101, с.424-434; 124, с.186-207]. В работе [65] обсуждена обратная постановка задачи - по данному интегрирующему множителю найдена функция $F(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\nu})$.

В [114, с.55, 56] дано и другое представление вектора $\boldsymbol{\kappa}$ посредством вектора $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\nu})$ с компонентами

$$\lambda_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \quad \lambda_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \quad \lambda_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3) \tag{37}$$

в виде $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\nu}) = -\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})$, так что $F(\boldsymbol{\nu}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\lambda}$, $f(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu}$,

$$\kappa_1 = \lambda_1 + \left(\nu_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial\nu_1} - \nu_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial\nu_2}\right) - \left(\nu_1\frac{\partial\lambda_3}{\partial\nu_3} - \nu_3\frac{\partial\lambda_3}{\partial\nu_1}\right) \quad (123).$$

В таком представлении интеграл (36) принимает традиционный вид $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} = k$ или $(A_1\omega_1+\lambda_1)\nu_1+(A_2\omega_2+\lambda_2)\nu_2+A_3\omega_3+\lambda_3)\nu_3 = k$. Функции (37) выступают при этом в роли компонент гиростатического момента.

С использованием интегралов (34), (35) из уравнений (33) исключены компоненты угловой скорости и порядок системы понижен [114, с.58]. Окончательный результат выполнения полной редукции для уравнений М.П.Харламова получен при введении переменных С.А.Чаплыгина [67]. Эти переменные, определяющие $\lambda\mu$ – сеть на сфере (35), вводятся соотношениями $\nu_1^2 = (a_1-\lambda)(a_1-\mu)/(a_1-a_2)(a_1-a_3)$ (123) , где $a_i = 1/A_i$ занумерованы по убыванию, а λ,μ принадлежат промежуткам $a_1 \ge \lambda \ge a_2 \ge \mu \ge a_3$. При такой замене уравнения М.П.Харламова приводятся к виду

$$G'_\lambda - \frac{1}{2}\left[\sqrt{\lambda-\mu}\,\sigma + \frac{\Lambda M}{\lambda-\mu}\left(\frac{\lambda'}{\Lambda^2}+\frac{\mu'}{M^2}\right)\right]G_\mu - g_\lambda\lambda' F_* + M\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mu} - \sigma\frac{\partial f}{\partial\mu}\right) = 0,$$

$$G'_\mu + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\lambda-\mu}\,\sigma + \frac{\Lambda M}{\lambda-\mu}\left(\frac{\lambda'}{\Lambda^2}+\frac{\mu'}{M^2}\right)\right]G_\lambda - g_\mu\mu' F_* - \Lambda\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda} - \sigma\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right) = 0,$$

$$G_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\mu'}{M} + \frac{\Lambda}{\sqrt{\lambda-\mu}}[k-f(\lambda,\mu)]\right\}, \quad G_\mu = \frac{1}{\mu}\left\{-\frac{\lambda'}{\Lambda} + \frac{M}{\sqrt{\lambda-\mu}}[k-f(\lambda,\mu)]\right\}.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по промежуточной переменной τ,

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\lambda(\tau)-\mu(\tau)}, \quad \text{а} \quad g_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda-\mu}}{2\Lambda(\lambda)}, \quad g_\mu = \frac{\sqrt{\lambda-\mu}}{2M(\mu)},$$

$$\Lambda^2(\lambda) = (a_1-\lambda)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3), \quad M^2(\mu) = (a_1-\mu)(a_2-\mu)(\mu-a_3),$$

$$\sigma(\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda\mu}\left\{a_1a_2a_3[k-f(\lambda,\mu)] + \frac{\Lambda M}{\sqrt{\lambda-\mu}}\left(\frac{\lambda\lambda'}{\Lambda^2} - \frac{\mu\mu'}{M^2}\right)\right\},$$

$$F_*(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu) + \left(\nu_1\frac{\partial f}{\partial\nu_1} + \nu_2\frac{\partial f}{\partial\nu_2} + \nu_3\frac{\partial f}{\partial\nu_3}\right)_{\nu_i=\nu_i(\lambda,\mu)}.$$

Эти уравнения автономны и имеют интеграл $\dfrac{\lambda\lambda'^2}{\Lambda^2}+\dfrac{\mu\mu'^2}{M^2} = 2\lambda\mu[E-\Pi(\lambda,\mu)] - a_1a_2a_3[k-$ $-f(\lambda,\mu)]^2$, что позволяет понизить их порядок еще на две единицы.

Появлявшейся еще у Л.Эйлера задаче о форме равновесия тонкого стержня дал современную постановку Г.Кирхгоф [37]. Для случая, когда на стержень действуют лишь концевые нагрузки, он указал математическую аналогию этой задачи с задачей о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку. Поэтому разработанные Донецкой школой методы исследования последней были распространены и на задачу о стержне в работах А.А.Илюхина, М.П.Харламова и их учеников [35, 109].

Упругую линию стержня (геометрическое место центров площадей поперечного сечения) параметризуют длиной дуги $s \in [0, l]$, и в каждой точке этой линии вводят базис $\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)$, направив $\boldsymbol{e}_1(s)$ по касательной к упругой линии, а $\boldsymbol{e}_2(s)$ и $\boldsymbol{e}_3(s)$ – по направлениям главных осей инерции поперечного сечения стержня. Изменение ориентации этого базиса при смещении вдоль упругой линии характеризуют вектором Дарбу $\boldsymbol{\omega}(s)$, так что $\dfrac{d\boldsymbol{e}_i}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i$.

Ненапряженный в естественном состоянии (в общем случае криволинейный) стержень имеет свой вектор Дарбу $\boldsymbol{\omega}^0(s)$, и разность $\boldsymbol{\omega}(s) - \boldsymbol{\omega}^0(s)$ служит геометрической характеристикой деформации стержня. Действие на часть $[0, s]$ стержня со стороны остальной части $[s, l]$ характеризуют силой $\boldsymbol{P}_\gamma$ и моментом $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\lambda}$. Так как стержень находится лишь под действием концевых нагрузок, величина силы $\mathbf{P}$ не зависит от s , а направление $\boldsymbol{\gamma}$ концевой силы в изменяющемся вдоль упругой линии базисе $\boldsymbol{e}_i(s)$ имеет зависящие от s компоненты $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_i(s)\boldsymbol{e}_i(s)$, так что

$$\boldsymbol{\gamma}^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{38}$$

(здесь точка означает дифференцирование в базисе $\boldsymbol{e}_i(s)$). Момент $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\lambda}$ зависит от деформированного состояния $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0)$, тензор $\mathbf{B}$ характеризует упругие свойства материала стержня и полагается не зависящим от s . В представлении $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{\lambda} = (M_i + \lambda_i)\boldsymbol{e}_i$ имеем $M_i = B_{ij}\omega_j$, $\lambda_i = -B_{ij}\omega_j^0$.

Сопоставляя тензору B_{ij} взаимный тензор b_{ij} , при использовании осей П.В.Харламова имеем, подобно (11):

$$p = aM_1 + b_1M_2 + b_2M_3, \quad q = a_1M_2 + b_1M_1, \quad r = a_2M_3 + b_2M_1.$$

Уравнения равновесия части $[0; s]$ стержня в специальных осях таковы

$$\begin{aligned} \frac{d(M_1 + \lambda_1)}{ds} &= (M_2 + \lambda_2)r - (M_3 + \lambda_3)q, \\ \frac{d(M_2 + \lambda_2)}{ds} &= (M_3 + \lambda_3)p - (M_1 + \lambda_1)r - P\gamma_1, \\ \frac{d(M_3 + \lambda_3)}{ds} &= (M_1 + \lambda_1)q - (M_2 + \lambda_2)p + P\gamma_2. \end{aligned} \tag{39}$$

В этих осях компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$ обозначены $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ и покомпонентная запись уравнений (38) дает $\dfrac{d\gamma}{ds} = r\gamma_1 - q\gamma_2$, $\dfrac{d\gamma_1}{ds} = p\gamma_2 - r\gamma$, $\dfrac{d\gamma_2}{ds} = q\gamma - p\gamma_1$.

Подстановка $(M_1, M_2, M_3; s) \Rightarrow (x, y, z; t)$ отождествляет систему (39) с (13), (14). Некоторые отличия этих задач заключаются в том, что в динамике твердого тела изучали лишь случаи, характеризуемые постоянными значениями λ_i гиростатического момента, в то время как в системе (39) эти величины – функции дуговой координаты s оси стержня в его недеформированном, вообще говоря, криволинейном состоянии. Однако это различие в многочисленных исследованиях теории стержней не проявлялось, так как изучали лишь те случаи, когда величины λ_i постоянны - это недеформированный прямой стержень с $\lambda_i = 0$ и винтовая пружина при постоянном шаге винта в недеформированном состоянии, характеризуемая постоянными значениями λ_i.

Существенным вкладом А.А.Илюхина является найденное им для анизотропных стержней неравенство [35, с.26]

$$B_{11} \leq 2a_{11}(2a_{11}B_{22} - a_{16}B_{12})(2a_{11}B_{33} - a_{15}B_{13})\Big[(a_{11}a_{55} - a_{15}^2)(2a_{11}B_{22} - a_{16}B_{12}) +$$

$$+(a_{11}a_{66} - a_{16}^2)(2a_{11}B_{22} - a_{15}B_{13})\Big]^{-1}, \qquad (40)$$

связывающее компоненты тензора B_{ij} с модулями упругости E_1, G_{12}, G_{13} и характеризующими упругие свойства материала коэффициентами a_{ij}. Оно обобщило известное неравенство Е.Л.Николаи [69, с.83] $B_1 \leq \dfrac{2}{1+\nu}\dfrac{B_2B_3}{B_2+B_3}$, ранее найденное для изотропных стержней.

Таким образом, задача о деформации криволинейного упругого стержня описывается уравнениями (39), совпадающими по форме с уравнениями (13), (14) движения тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку. Но если для последнего ограничения для главных значений тензора инерции представляют "условие треугольника" $A_1 < A_2 + A_3,\ A_2 < A_3 + A_1,\ A_3 < A_1 + A_2$, то для стержня - это неравенство (40), и поэтому не все результаты одной задачи могут быть перенесены на другую.

В аналитической динамике сложился путь формирования математической модели системы связанных твердых тел, выбор которого в значительной мере обусловлен сложностью такой модели. В большинстве задач ограничиваются изучением стационарных режимов, нахождение которых зачастую может быть выполнено и без обращения к общим уравнениям движения. Затем, ограничиваясь приближенным учетом возмущающих факторов, формируют в таком приближении математическую модель, предполагая ее достаточно приемлемой для исследования окрестности изучаемого стационарного движения. Традиционным здесь является применение лагранжева или гамильтонова формализма.

Уже к началу нынешнего века стали ставить задачи более полного изучения движения систем связанных тел, и, естественно, в первую очередь рассматривали системы, представляющие практический интерес. Такова задача о движении гироскопа в кардановом подвесе с учетом инерционных характеристик колец. Полагая конструкцию гироскопа совершенной, Э.Раус [79, с.53-55] методом Лагранжа получил уравнения движения его вокруг центра масс, неподвижного относительно Земли с учетом ее вращения. Он приводит и имеющиеся в задаче общие интегралы (циклический и интеграл энергии) и отмечает случай, когда имеет место интеграл моментов. Однако, движение этой системы Э.Раус не исследует. Обстоятельный анализ этой задачи без учета вращения Земли выполнил Е.Л.Николаи [70, с.405-496]. Позже были получены более общие результаты. Не останавливаемся здесь на них, отсылая к обстоятельному обзору [68]. Существенный вклад в задачу о гироскопе в кардановом подвесе внесли донецкие ученые, учтя многие конструктивные несовершенства этого прибора. В такой постановке эта задача оказывается частным случаем системы тел, названной составным пространственным маятником.

В [130, 131] рассмотрено множество гиростатов, сочлененных сферическими или цилиндрическими шарнирами в произвольном порядке. Его всегда можно представить совокупностью подсистем - цепей последовательно соединенных гиростатов. Поэтому и формирование математической модели выполнено для такой цепи. Рассмотрена совокупность гиростатов, корпуса которых последовательно сочленены сферическими или цилиндрическими шарнирами. Уравнения записаны в наиболее естественных для задач динамики твердого тела переменных. Это компоненты угловой скорости каждого из тел в неизменно связанных с этим телом осях и компоненты в тех же осях направляющих векторов фиксированного в пространстве базиса. В одной из совокупностей выделен специальный случай - система n тел, имеющих по распределению масс структуру гироскопов Лагранжа и последовательно сочлененных идеальными сферическими шарнирами, принадлежащими осям динамической симметрии тел. Уравнения, определяющие зависимость от времени собственных вращений, отделены, и полученная система $2n$ уравнений определяет в зависимости от времени углы нутации и прецессии каждого из n тел. В другой из них - все шарниры цилиндрические, но параллельность осей этих шарниров не предполагается, что дало основание назвать такую систему пространственным маятником. Простой пример такого маятника - гироскоп в кардановом подвесе: твердое тело (внешнее кольцо) сочленено цилиндрическим шарниром с гиростатом (внутреннее кольцо, несущее ротор). Это двойной пространственный маятник [131].

Многие гироскопические приборы можно рассматривать как систему определенным образом связанных гиростатов. Так, например, чувствительный элемент гирокомпаса состоит из двух идентичных гиростатов, корпуса которых могут поворачиваться относительно параллельных осей на углы $\varphi_2 = -\varphi_1$. Кроме того, корпуса соединены упругим звеном. Более общие конструкции, рассмотренные в [113], включают различные гиросистемы с возможными конструктивными несовершенствами без предположения об их малости. Система состоит из гиростатов S^k $(k = 1, 2, ..., n)$, корпуса которых закреплены на осях l^k в корпусе гиростата S^0 . Приведем здесь одну из полученных математических моделей:

$$G^\bullet = M, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi^\bullet}\right)^\bullet - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad G = J \cdot \omega + \varphi^\bullet \sum_{k=1}^{n} j_k C^k + H, \quad H = \sum_{k=1}^{n} H^k,$$

$$2T = \omega \cdot \mathbf{J} \cdot \omega + 2\varphi^\bullet \omega \cdot \sum_{k=1}^{n} j_k C^k + \varphi^{\bullet 2} \sum_{k=1}^{n} j_k^2 э^k \cdot J^k \cdot э^k \ ,$$

$$J \cdot \omega = J^0 \cdot \omega + \sum_{k=1}^{n} \left\{ J^k \cdot \omega + m^k \left[s^k \times (\omega \times s^k) + s^k \times (\omega \times c^k) + c^k \times (\omega \times s^k) \right] \right\},$$

$$C^k = J^k \cdot э^k + m^k s^k \times (э^k \times c^k).$$

Эти уравнения определяют $\omega(t)$ и $\varphi(t)$. Из сопоставленной углу φ обобщенной силы выделена составляющая, определяемая потенциальной энергией $\Pi(\varphi)$ упругих элементов, связывающих корпуса гиростатов (такие элементы имеются в гироскопических приборах).

III. Точные решения задач динамики твердого тела. Обсуждавшиеся в предыдущем разделе постановки задач появились в результате длительных поисков многих ученых. Модели создавали для достижения основной цели механики - изучение движения реальных тел. Поэтому формируемая математическая модель должна служить этой цели - доставлять необходимую информацию в виде решений систем уравнений, представляющих эту математическую модель. И хотя сама модель получена при известных идеализациях и поэтому по отношению к реальному явлению является приближенной, тем не менее большую ценность представляют те исключительные случаи, когда удается найти точные решения уравнений в замкнутом виде - они не вносят дополнительных погрешностей, неизбежных при использовании приближенных методов интегрирования. Математическая модель должна поэтому удовлетворять критерию простоты с сохранением ее правильности [15, 141; 142, с.241-242]. Искусство механика оценивается его способностью так поставить задачу, чтобы предлагаемая им математическая модель удовлетворяла этим (вообще говоря, противоречивым) требованиям. По поводу этого этапа исследований Р.Л.Халфман заключает: "В динамике наибольшие трудности вызывает процесс перехода от механических явлений к математическим соотношениям, адекватным сущности данных явлений. Слишком большие упрощения могут привести к искажению физики явления, учет несущественных сторон явления приведет к тому, что наши вычислительные машины будут работать дни и ночи" [102, с.68]. Хотя системы уравнений в описанных моделях нелинейны и имеют высокий порядок, особенности их структуры (наличие параметров, имеющиеся интегралы, известный интегрирующий множитель) открывали возможность при некоторых ограничениях на значения параметров находить решения, имеющие подчас достаточно высокую общность.

Следуя Р.Граммелю [24], П.В.Харламов предложил [120] ввести понятие общности каждого такого решения, определяя ее числом сохраненных в решении независимых параметров. При этом параметры, характеризующие распределение масс системы, не отделяются от параметров, характеризующих начальное положение и начальное распределение скоростей, так как все они оказываются тесно связанными: гиростатический момент, например, зависит как от распределения масс, так и от начальных условий, а при представлении момента количества движения гиростата в виде $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}$, как показано в работе [130], структура тензора $\boldsymbol{A}$ существенно зависит от того, каким путем был сформирован гиростатический момент. Тем самым на величины компонент этого тензора оказывает влияние не только распределение масс в системе, но и начальные данные. При оценке роли этих параметров иногда высказывается утверждение, что решения, полученные при произвольных начальных условиях и ограничениях, накладываемых на распределение масс, более ценны, чем решения, полученные при стесненных начальных значениях и менее жестких ограничениях, накладываемых на распределение масс [16, с.278; 24, с.217]. Предполагается, по-видимому, что реализация условий, стесняющих начальные данные, более сложная, чем реализация ограничений, накладываемых на распределение масс. Но и те и другие условия могут быть на практике реализованы лишь приближенно, а оценка влияний соответствующих возмущений показывает, что они равноценны.

Перечислим все найденные к настоящему времени решения уравнений движения тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку.

1. *Решение Н.Е.Жуковского.* Если центр масс гиростата совпадает с неподвижной точкой, коэффициенты $e_1\Gamma, e_2\Gamma, e_3\Gamma$ в уравнениях (8) выпадают, и число независимых параметров уменьшается до 12. Уравнения (8) не содержат в этом случае переменных ν_1, ν_2, ν_3 , и вытекающих из общих теорем динамики интегралов

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2E, \quad (Ap + \lambda_1)^2 + (Bq + \lambda_1)^2 + (Cr + \lambda_3)^2 = n^2 \tag{41}$$

достаточно для полного решения задачи.

Впервые это решение (движение гиростата по инерции) рассмотрел Н.Е.Жуковский [34]. Основываясь на интегралах (41), он провел геометрическое исследование движения тела. Позже этой задаче посвятил серию работ, сведенных затем в одну большую статью [188], В.Вольтерра. Он, в частности, привел эту задачу к квадратурам, показав, что зависимость основных переменных от времени устанавливается посредством эллиптических функций. Отметим, что при обращении в нуль гиростатического момента, из решения Н.Е.Жуковского следует известный случай интегрируемости, указанный еще Л.Эйлером. В решении Л.Эйлера независимы девять параметров, и так же, как и в решении Н.Е.Жуковского, шесть из них характеризуют начальные данные. Результаты, относящиеся к случаю Эйлера, приводятся почти во всех курсах механики. Наиболее полное изложение можно найти в работе П.В.Воронца [7].

2. *Первое решение П.В.Харламова* (равномерные вращения гиростата). В дальнейшем предполагаем, что центр масс не совпадает с точкой опоры. Трех конечных соотношений (9) еще не достаточно для решения задачи, и во всех найденных к настоящему времени решениях получены дополнительные соотношения. Все они - алгебраические функции переменных $p, q, r, \nu_1, \nu_2, \nu_3$. Удобно классифицировать решения по степени этих дополнительных алгебраических соотношений. В каждом из решений выделяется соотношение, имеющее наинизшую степень по совокупности указанных переменных. Естественно выделить вначале те решения, в которых среди дополнительных соотношений имеются линейные. Простейшее из них - решение с тремя линейными соотношениями, указанное П.В.Харламовым [126]. Движение тела в этом случае оказывается равномерным вращением вокруг неподвижной в пространстве оси. Осью вращения может служить лишь вертикаль. Направление оси в теле-носителе не произвольно. Если обозначить

$$S(\xi) = (B - C)e_1\xi_2\xi_3 + (C - A)e_2\xi_3\xi_1 + (A - B)e_3\xi_1\xi_2,$$

$$\Lambda(\xi) = (B - C)\lambda_1\xi_2\xi_3 + (C - A)\lambda_2\xi_3\xi_1 + (A - B)\lambda_3\xi_1\xi_2,$$

$$\Pi(\xi) = (\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)\xi_1 + (\lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)\xi_2 + (\lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)\xi_3,$$

то в решении П.В.Харламова $p = \omega\nu_1$, $q = \omega\nu_2$, $r = \omega\nu_3$, где $\omega = \Pi(\nu)/S(\nu)$. Возможные оси равномерного вращения - образующие конуса $K(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, где

$$K(\xi) = S^2(\xi)\Gamma + \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\ \Pi(\xi)\Lambda(\xi).$$

В этом решении независимы 11 параметров. На распределение масс не накладываются ограничения, из шести параметров, которые мы отнесли к начальным данным, независимы лишь два: один из них определяет положение оси вращения на конусе Харламова, а другой - величину угловой скорости вращения вокруг этой оси. Конус Харламова изучался в работах [1,38].

Частным случаем решения П.В.Харламова являются равномерные вращения твердого тела при отсутствии гиростатического момента, изучавшиеся еще в 1894 г. О.Штауде [186], а затем и другими авторами [83, 121, 187]. В решении Штауде сохранено восемь независимых параметров.

3. *Второе решение П.В.Харламова.* При условиях $e_2 = 0$, $(2B-C)\lambda_1 e_3 = (2B-A)\lambda_3 e_1$ П.В.Харламовым указано решение с двумя линейными соотношениями $p = \kappa e_1$, $r = \kappa e_3$, в которых постоянная κ определяется равенством $\lambda_1^2(2B-A)^{-2} + \lambda_3^2(2C-A)^{-2} = \kappa^2$. Вторая компонента угловой скорости является эллиптической функцией времени. Эта зависимость устанавливается в результате обращения интеграла $t = -B\int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq}{R(q)}$, где $R(q) = \sqrt{\Gamma^2 - \left[\frac{B}{2}q^2 + H\right]^2 - [\lambda_2 - Bq]^2\kappa^2}$. Зависимость остальных переменных от времени получим, подставив найденное значение $q(t)$ в выражения $\nu_1\Gamma = \left(\frac{B}{2}q^2 + H\right)e_1 - e_3R(q)$, $\nu_2\Gamma = (\lambda_2 - Bq)\kappa$, $\nu_3\Gamma = \left(\frac{B}{2}q^2 + H\right)e_3 + e_1R(q)$. В таком виде это решение было опубликовано в работе [122] (вначале оно было опубликовано при дополнительном ограничении [119]). В главе 5 монографии [124] показано, что других решений с двумя линейными соотношениями рассматриваемая задача не допускает. В решении сохранено десять независимых параметров, из них четыре могут быть отнесены к начальным данным. Частными случаями решения П.В.Харламова является решение Бобылева - Стеклова [4, 95] и решение задачи о движении физического маятника.

4.*Решение Ж.-Л.Лагранжа.* При условиях $B = C$, $e_2 = e_3 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ уравнения (8) имеют интеграл $p = p_0$, и задача сводится к квадратурам. Этот случай интегрируемости указан еще Ж.Л.Лагранжем [56]. Его исследованию посвящена обширнейшая литература. С той или иной полнотой решение Лагранжа излагается почти в каждом курсе механики. По-видимому, наиболее полно это решение изучено в монографиях А.С.Домогарова [31] и Ф.Клейна, А.Зоммерфельда [182]. Следует отметить еще работы Г.Дарбу [176, 177]. Решение Лагранжа содержит десять независимых параметров, шесть из них могут быть отнесены к начальным данным.

5. *Первое решение Л.Н.Сретенского.* В работах [89, 90] Л.Н.Сретенский указал два новых решения, одно из которых характеризуется наличием линейного соотношения. Он получил эти решения, изучая систему (8). Подчинив коэффициенты уравнений (8) условиям $e_2 = 0$, $\sqrt{A(B-C)}e_1 = \sqrt{C(A-B)}e_3$, он показал, что система допускает соотношение

$$\big[(A-B)p + \lambda_1\big]e_3 - \big[(C-B)r + \lambda_3\big]e_1 = 0. \tag{42}$$

В решении сохранено 11 независимых параметров, из которых пять следует отнести к начальным данным (начальные значения p_0, r_0 должны удовлетворять соотношению (42)). При дополнительных ограничениях $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ из решения Л.Н.Сретенского следует случай интегрируемости В.Гесса [180], содержащий девять независимых параметров. В обзорах [97, 98] этих исследований приведена достаточно полная библиография.

6. *Решение Д.Гриоли - Е.И.Харламовой.* В работе [154] показано, что в дополнение к перечисленным выше решениям с линейным инвариантным соотношением интегродифференциальное уравнение допускает еще два и только два таких решения. Одно из них обобщило решение, найденное ранее Д.Гриоли [179], изучавшим условия существования регулярных прецессий вокруг наклонных осей. Это решение изучалось затем и другими авторами [25, 157]. В дополнение к параметрам, имеющимся в решении Гриоли, сохранен еще один параметр, так что общее число независимых параметров в решении равно семи, два из них относятся к начальным условиям.

7.*Первое решение Е.И.Харламовой.* Последнее решение с линейным инвариантным соотношением найдено Е.И.Харламовой [154] в специальных осях из интегродифференциального уравнения. Оно содержит восемь независимых параметров: компоненты гирационного тензора a, a_1, a_2, b , компоненты гиростатического момента λ, λ_1 и начальные значения x_0, a_0 переменных x, a . В этом решении переменные y, z, ν, ν_1, ν_2 и t зависят от x следующим образом

$$y = mx + m_0, \quad z^2 = h_2x^2 + h_1x + h_0, \quad t = -\frac{1}{n}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-c)z(x)} ,$$

$$\nu = sx^2 + s_1x + s_0, \quad \nu_1 = s'x^2 + s_1'x + s_0, \quad \nu_2 = (gx + g_0)z(x).$$

Коэффициенты в этих соотношениях - известные функции указанных выше независимых параметров. При обращении в нуль гиростатического момента из этого решения следует решение, полученное Е.И.Харламовой в 1959 г. [148, 149].

Отметим, что интенсивно изучавшийся в последние годы вопрос об условиях существования регулярных прецессий является частным случаем задачи о линейных инвариантных соотношениях. Действительно, в случае регулярных прецессий подвижный годограф - плоская кривая (окружность) и, следовательно, соответствующее решение должно иметь линейное соотношение. Таким образом, задача об условиях существования регулярных прецессий у гиростатов, центр масс которых находится в одной из главных плоскостей, решена полностью донецкими учеными.

О квадратичном соотношении. До последнего времени не существовало общего метода построения решений с алгебраическими соотношениями. В различных работах предлагались приемы построения таких решений, основанные на тех или иных частных свойствах уравнений (8). Так были получены решения В.А.Стеклова [96], Д.Н.Горячева [23], С.А.Чаплыгина [171], Н.Ковалевского [183]. Основываясь на уравнении (18), Е.И.Харламова указала достаточно общие условия существования решений такого вида [158]. При анализе этих условий она получила не только решения, найденные ранее, но и несколько новых решений. Она показала, в частности, что существует восемь решений с квадратичным соотношением. Отметим, что вопрос о существовании последних обсуждался ранее [42, 125], но при более жестких ограничениях на компоненты гиростатического момента: предполагалось, что вектор гиростатического момента принадлежит прямой, проходящей через неподвижную точку и центр масс гиростата. Обзор этих результатов приведен в работе [51]. Охарактеризуем решения с квадратичным соотношением.

8. *Первое решение А.И.Докшевича.* В случае, когда луч, проведенный из неподвижной точки через центр масс гиростата, перпендикулярен круговому сечению гирационного эллипсоида, существуют два решения с квадратичным соотношением. Первое из них найдено А.И.Докшевичем [30]. В его решении семь независимых параметров $a, a_1, \lambda, \lambda_1, \Gamma, x_0, a_0$ (последние два характеризуют начальные условия), и оно имеет вид

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2, \quad z^2 = m_0 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + m_4x^4, \quad t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{z(x)},$$

$$\nu = s_0 + s_1x + s_2x^2, \quad \nu_1 = s_0' + s_1'x + s_2'x^2 + s_3'x^3, \quad \nu_2 = (g_0 + g_1x)z(x).$$

Коэффициенты в этих выражениях - известные функции сохраненных в решении параметров. Это решение обсуждается в работе [155].

9. *Второе решение Е.И.Харламовой.* Введя вместо x вспомогательную переменную ξ , Е.И.Харламова нашла следующее решение [151, 156]:

$$x = \xi + \frac{a_1}{b}\lambda_1, \quad y = \frac{c_0}{b\xi} + \frac{c_1}{b} + \frac{a_1}{b}\Big(\lambda - \frac{a-a_1}{b}\lambda_1\Big) + \frac{1}{b}\Big(c_2 - \frac{a-a_1}{2}\Big)\xi,$$

$$b^2z^2 = -\frac{c_0^2}{\xi^2} + \frac{m_1}{\xi} + m_2 + m_3\xi + m_4\xi^2, \quad t = -\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{b\xi\; z(\xi)},$$

$$\nu\Gamma = s_0 + s_1\xi + s_2\xi^2, \quad \nu_1\Gamma = \frac{c_0c_1}{b\xi} + s_0' + s_1'\xi + s_2'\xi^2, \quad \nu_2\Gamma = (c_1 + 2c_2\xi)\; z(\xi).$$

Величины s_i, m_i - известные функции параметров $a, a_1, b, \lambda, \lambda_1, \Gamma$, оставшихся в этом решении свободными. Кроме этих шести параметров независимы начальные значения ξ_0, a_0, и, таким образом, второе решение Е.И.Харламовой содержит восемь независимых параметров.

В том же году, когда появилась работа [151], А.И.Докшевич опубликовал [27] краткое сообщение о найденном им решении, которое является частным случаем указанного решения и вытекает из него при условиях $\lambda = \lambda_1 = 0$. Позже А.И.Докшевич дал развернутое изложение своего результата в статье [28]. Второе решение Е.И.Харламовой является последним из найденных решений, в которых центр масс гиростата не принадлежит главной оси.

При изучении условий существования алгебраических соотношений оказалось целесообразным преобразовать уравнение (18) к новой переменной [169], появившейся впервые в работе [148]. При исследовании преобразованного уравнения установлено, что одним из необходимых условий существования решений с алгебраическими соотношениями является совпадение специальных и главных осей координат [151].

Отметим сначала те четыре решения, которые были получены без обращения к интегродифференциальному уравнению.

10. *Решение Д.Н.Горячева.* В работе [125] показано, что существуют три решения, в которых $p, q, r, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ и t могут быть представлены зависимостями

$$\begin{gathered}
\frac{C-B}{A}Bq^2 = (2c_2 + A - C)p^2 + 2(c_1 + \lambda)p + 2c_0, \\
\frac{B-C}{A}Cr^2 = 2b_4p^4 + 2b_3p^3 + (2b_2 + A - B)p^2 + 2(b_1 + \lambda)p + 2b_0, \\
\nu_1\Gamma = \frac{A}{B-C}\left[b_4p^4 + b_3p^3 + (b_2 - c_2)p^2 + (b_1 - c_1)p\right] + H, \\
\nu_2\Gamma = q(4b_4p^3 + 3b_3p^2 + 2b_2p + b_1), \quad \nu_3\Gamma = r(2c_2p + c_1)\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A}q(p)r(p).
\end{gathered} \tag{43}$$

В каждом из решений величины b_i, c_i, H определенным образом зависят от параметров A, B, C, λ, Γ. Первое из них найдено Д.Н.Горячевым [23] при условиях: $H = -\Gamma,\ \lambda = 0,\ b_3 = 0,\ b_1 = 0,\ c_1 = 0,$ $A = 16C(B-C)(9B-8C)^{-1}$. Это решение полностью изучено; в нем пять независимых параметров B, C, Γ, p_0, a_0 (последние два характеризуют начальные данные).

11. *Третье решение П.В.Харламова.* При условиях $b_4 = 0,\ A = 18C(B-C)(10B-9C)^{-1}$ П.В.Харламов указал зависимость величин $b_2, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0, H, \Gamma$ от B, C, λ, b_3 , при которой соотношения (43) являются решением задачи. Указанные четыре параметра вместе с параметрами p_0, λ_0, характеризующими начальные данные, остаются в этом решении независимыми. При дополнительном условии из решения П.В.Харламова следует случай интегрируемости Н.Ковалевского [183].

12. *Четвертое решение П.В.Харламова.* При условиях $b_4 = b_3 = 0$ в работах [102, 150] указано симметричное решение задачи, содержащее семь независимых параметров $A, B, C, \lambda, \Gamma, p_0, a_0$. При дополнительном условии $\lambda = 0$ оно сводится к решению В.А.Стеклова [96].

13. *Решение С.А.Чаплыгина.* При условиях $9(2B-A)(2C-A) = 4BC,\ \lambda = 0$ С.А.Чаплыгин указал решение [171], близкое по форме к (43). В обозначениях главы 9 книги [124] это решение записывается так:

$$\begin{gathered}
(2B-A)(B-C)q^2 = (C-A)Ap^2 - \frac{1}{6}\kappa A(2C-3A)p^{2/3}, \\
(2C-A)(C-B)r^2 = (B-A)Ap^2 - \frac{1}{6}\kappa A(2B-3A)p^{2/3}, \\
(2B-A)(2C-A)\nu_1\Gamma = A(B-A)(C-A)p^2 - \frac{\kappa}{12}A(3A^2 - 4BC)p^{2/3}, \\
(2C-A)\nu_1\Gamma = q\left[(B-A)(C-A)p + \frac{\kappa}{18}C(2B-3A)p^{-1/3}\right], \\
(2B-A)\nu_3\Gamma = \left[r(B-A)(C-A)p + \frac{\kappa}{12}B(2C-3A)p^{-1/3}\right],
\end{gathered}$$

где

$$\kappa^3 = \frac{-2592(2B-A)^2(2C-A)^2\Gamma^2}{A^3(2B+2C-3A)(2B-3A)(2C-3A)}.$$

14.*Пятое решение П.В.Харламова.* При анализе общих условий существования решений с алгебраическими соотношениями, указанных в работах [150, 159], П.В.Харламов установил, что получающиеся два решения, представленные в тригонометрической и экспоненциальной формах, могут быть объединены в одно решение. В работе [129] оно записано в обозначениях, принятых для специальных осей координат, и получено при условиях $a = a_1/2 = a_2,\ \lambda = \lambda_2 = 0$. Решение таково:

$$
\begin{gathered}
(x-c_0)^2 + l(y-\lambda_1)^2 = \frac{(1-l)^2\, l\Gamma^2}{a_2(c_0^2+4\lambda_1^2)}, \\
z^2 + \left(x - \frac{c_0}{1-l}\right)^2 = \frac{l}{1-l}\left(4\lambda_1 y + \frac{c_0^2}{1-l}\right),\ \nu\frac{\Gamma}{a} = -\frac{(x-c_0)^2}{l} + \frac{(x-c_0)c_0 + 2(y-\lambda_1)\lambda_1}{1-l}, \qquad (44) \\
\nu_1\frac{\Gamma}{a} = \frac{2\lambda_1 x - c_0 y - c_0\lambda_1}{1-l}, \quad \nu_2\frac{\Gamma}{a} = -\frac{x-c_0}{l}\, z.
\end{gathered}
$$

Решение содержит семь независимых параметров $a, \Gamma, \lambda_1, c_0, l, x_0, \lambda_0$ (к начальным данным следует отнести последние четыре). Частный случай решения (44), характеризуемый тем, что постоянная l может иметь лишь положительные значения, был получен в статье [167]. При обращении в нуль гиростатического момента λ_1 решение (44) приводится к содержащему шесть произвольных параметров частному случаю решения С.В.Ковалевской, отмеченному Г.Г.Аппельротом [2].

15. *Решение П.В.Харламова - Е.И.Харламовой.* Еще одно (и, как показано в работе [151], последнее) решение уравнения (18) с квадратичным соотношением опубликовано в работе [166]. Оно получено при условиях $A = 18C(B-C)(10B-9C)^{-1},\ e_2 = e_3 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Основные переменные выражены в зависимости от вспомогательной переменной σ:

$$
\begin{gathered}
p = p_0 + p_1\cos\sigma, \quad q = q_0 + q_1\sin\sigma, \\
r^2 = r_0 + r_1\cos\sigma + r_1'\sin\sigma + r_2\cos 2\sigma + r_3\cos 3\sigma + r_3'\sin 3\sigma, \\
\nu_1 = \kappa_0 + \kappa_1\cos\sigma + \kappa_1'\sin\sigma + \kappa_2\cos 2\sigma + \kappa_3\cos 3\sigma + \kappa_3'\sin 3\sigma, \\
\nu_2 = \chi_0 + \chi_1\cos\sigma + \chi_1'\sin\sigma + \chi_2'\sin 2\sigma + \chi_3\cos 3\sigma + \chi_3'\sin 3\sigma, \\
\nu_3 = (h_0 + h\cos\sigma)r(\sigma), \qquad t = n\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{r(\sigma)}.
\end{gathered}
$$

Величины $p_i, q_i, r_i, \kappa_i, \chi_i, h_i, n$ являются известными функциями параметров B, C, Γ, λ_i , которые вместе с начальными данными σ_0, λ_0 остаются в этом решении произвольными. Частный случай этого решения опубликован в работе [143].

16. *Решение С.В.Ковалевской.* Все перечисленные решения характеризуются наличием алгебраического соотношения, линейного или квадратичного. Из условий существования алгебраических соотношений следует, что решения задачи с такими соотношениями степени выше второй, если и существуют, то оказываются, вообще говоря, весьма бедными по количеству независимых параметров. Однако имеются два исключения. Ими оказались знаменитое решение С.В.Ковалевской [44] и второе решение Л.Н.Сретенского [89, 90]. При условиях $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ e_2 = e_3 = 0,\ A = B = 2C$ С.В.Ковалевская в дополнение к трем интегралам (9) указала четвертый интеграл, не зависящий явно от времени и содержащий произвольную постоянную $\left[C(p^2-q^2) + \Gamma\nu_1\right]^2 + (2Cpq - \Gamma\nu_2)^2 = n$, и свела задачу к квадратурам. В решении сохранено восемь независимых параметров: $C, \Gamma, p_0, q_0, r_0, \nu_2^0, \nu_3^0, a_0$, из них шесть относятся к начальным данным. Алгебраическое соотношение, получаемое исключением из интегралов переменных ν_1, ν_2, ν_3 , имеет двенадцатую степень по совокупности переменных p, q, r [92, 93, 100]. Мы не останавливаемся далее на этом решении - ему посвящена обширнейшая литература (см., например, [2,16, 77, 101, 184]).

17. *Второе решение Л.Н.Сретенского.* При условиях $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ e_1 = e_2 = 0,\ A = B = 4C,\ k = 0$ Л.Н.Сретенский указал [89, 90] решение системы (8), в котором основные переменные $p, q, r, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ выражены алгебраическими функциями вспомогательных переменных u, v, а зависимость последних от времени находится квадратурами в виде гиперэллиптических функций. В этом решении независимы восемь параметров: C, Γ, λ_3 и пять из шести начальных данных $p_0, q_0, r_0, \nu_1^0, \nu_2^0, a_0$, связанных соотношением

$$
4(p_0\nu_1^0 + q_0\nu_2^0) + \left(r_0 + \frac{\lambda_3}{C}\right)\sqrt{1 - \nu_1^{02} - \nu_2^{02}} = 0.
$$

Алгебраическое соотношение имеет восьмую степень по совокупности переменных p, q, r [8, 90]. Из решения Л.Н.Сретенского при $\lambda_3 = 0$ следует известный случай интегрируемости Д.Н.Горячева - С.А.Чаплыгина [170].

18. *Второе решение А.И.Докшевича.* Полагая, что главные значения тензора инерции находятся в отношениях

$$A : B : C = (72\sqrt{37} - 264) : (29\sqrt{37} - 71) : (33\sqrt{37} + 21),$$

гиростатический момент отсутствует ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$) и центр масс тела находится на первой координатной оси ($e_2 = e_3 = 0$) , А.И.Докшевич [29] указал частное решение задачи:

$$\begin{array}{ll} p^2 = a_0 + a_1\sigma^2 + a_2\sigma^4, & \nu_1\Gamma = \pi_0 + \pi_1\sigma^2 + \pi_2\sigma^4 + \pi_3\sigma^6, \\ q = (b_0 + b_1\sigma^2)\sigma, & \nu_2\Gamma = (\kappa_0 + \kappa_1\sigma^2)p\sigma, \\ r^2 = c_0 + c_1\sigma^2 + c_2\sigma^4, & \nu_3\Gamma = (\rho_0 + \rho_1\sigma^2)pr, \end{array}$$

коэффициенты $a_i, b_i, c_i, \pi_i, \kappa_i, \rho_i$ – известные функции параметров A, Γ, которые в этом решении сохранены независимыми вместе с начальными данными σ_0, a_0 .

19. *Решение Г.В.Мозалевской.* Свое решение Г.В.Мозалевская записала в специальных осях координат [60]. Это решение таково:

$$x^2 = \kappa^2\Big(2\sigma^3 - \frac{213}{19}\sigma + \frac{122}{19}\Big), \quad y^2 = \kappa^2\Big(-2\sigma^3 + 8\sigma^2 + \frac{205}{19}\sigma - \frac{966}{19}\Big), \quad z = \kappa\Big(\sigma^2 - \frac{37}{4}\Big),$$

$$\nu_1\Gamma = \frac{\kappa^2 a_2}{2}\left(\sigma^4 - 2\sigma^3 - \frac{15}{2}\sigma^2 + \frac{202}{19}\sigma + \frac{967}{361}\right), \quad \nu_2\Gamma = -\frac{\kappa^2 a_2}{4}(\sigma + 4)\sqrt{f(\sigma)},$$

$$\nu_3\Gamma = \kappa^2 a_2\left(-\sigma^2 + \sigma + \frac{137}{19}\right)\sqrt{2\sigma^3 - \frac{213}{19}\sigma + \frac{122}{19}}, \quad \kappa^2 = \frac{2\cdot 19^2\Gamma}{3^7 a_2},$$

$$t = -\frac{8}{a_2\kappa}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{f(\sigma)}}, \quad f(\sigma) = \Big(2\sigma^3 - \frac{213}{19}\sigma + \frac{122}{19}\Big)\Big(-2\sigma^3 + 8\sigma^2 + \frac{205}{19}\sigma - \frac{966}{19}\Big).$$

Оно получено при условиях $a = \frac{3}{8}a_2$, $a_1 = \frac{11}{8}a_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, независимые параметры $a_2, \Gamma, \sigma_0, a_0$.

Как было отмечено, хронологически первые решения авторы строили каждый своим путем, так как общего подхода к построению решений не было. Использование метода инвариантных соотношений в применении к уравнениям (13), (14), (18) дало единообразный подход в построении решений в классе алгебраических функций, хотя зачастую требовало большого объема выкладок.

Интегродифференциальное уравнение (18), хотя и предложено при условии, что центр масс и гиростатический момент принадлежат главной плоскости, могло служить для рассмотрения всех предшествующих решений (за исключением равномерных вращений), так как все они этому условию удовлетворяли. Но в отличие от всех предшествующих подходов к построению решений, уравнение (18) обладает тем преимуществом, что оно требует нахождения лишь одной удовлетворяющей ему зависимости . Все остальные переменные задачи после этого будут найдены. Структура уравнения подсказывает и форму инвариантного соотношения: это либо тригонометрические, либо экспоненциальные многочлены. Монография [164] и содержит такой единообразный подход к построению решений. На этом пути в ней получены результаты предшественников, и в дополнение к ним найдены три новых случая интегрируемости.

20. *Первое решение Е.И.Харламовой - Г.В.Мозалевской.* Оно получено при таком ограничении на моменты инерции: $B = 4A(2C - A)/(17C - 8A)$ и имеет вид [164, с.227-233]

$$x = 2c\cos 2\sigma + 2c_1\cos\sigma + c_0, \quad y = -\frac{1}{\kappa s(2u-1)}\left(c\sin 2\sigma + \frac{c_1}{2}\sin\sigma\right),$$

$$z^2 = \frac{1}{8a_2^3\kappa^2(2u-1)^2}\Big[(\mu_4 + \mu_{-4} - h_4)\cos 4\sigma + (\mu_3 + \mu_{-3} - h_3)\cos 3\sigma +$$

$$+(\mu_2 + \mu_{-2} - h_2)\cos 2\sigma + (\mu_1 + \mu_{-1} - h_1)\cos\sigma + \mu_0 - \frac{h_0}{2}\Big], \quad t = -\frac{s}{a_2}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{z(\sigma)},$$

$$
\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{16a_2^2\kappa^2\Gamma(2u-1)^2}\bigl[(\mu_4+\mu_{-4})\cos 4\sigma + (\mu_3+\mu_{-3})\cos 3\sigma + \\
&\quad +(\mu_2+\mu_{-2})\cos 2\sigma + (\mu_1+\mu_{-1})\cos\sigma + \mu_0\bigr], \\
\nu_1 &= \frac{1}{16a_2^2\kappa^2\Gamma(2u-1)^2}\bigl[(\mu_4-\mu_{-4})\sin 4\sigma + (\mu_3+\mu_{-3})\sin 3\sigma + \\
&\quad +(\mu_2-\mu_{-2})\sin 2\sigma + (\mu_1-\mu_{-1})\sin\sigma\bigr], \\
\nu_2 &= \frac{z}{2a_2\kappa\Gamma(2u-1)}(g_2\cos 2\sigma + g_1\cos\sigma + g_0/2).
\end{aligned} \tag{45}
$$

Параметры a_2, c в этом решении, вообще говоря, являются несущественными: их можно устранить при переходе к безразмерным величинам, и единственным свободным параметром остается отношение моментов инерции $u = C/A$. Все коэффициенты в (45) найдены как рациональные функции этого параметра. Частным случаем этого решения является случай интегрируемости, указанный ранее в [47] Б.И.Коносевичем и Е.В.Поздняковичем. В [164, с.233-235] их решение дополнено явной зависимостью коэффициентов от u .

21. *Второе решение Е.И.Харламовой - Г.В.Мозалевской.* Это решение получено при условии, что параметр u есть корень уравнения (7.85) [164, с.221], принадлежащий интервалу $(u_*;1)$, а u_* - корень уравнения $101u^4 - 295u^3 + 282u^2 - 112u + 16 = 0$ в интервале (0; 1). И поскольку в этом решении так же, как и в предыдущем, все коэффициенты - рациональные функции u, оно не имеет свободных безразмерных параметров. Это решение представлено в [164, с.237-238].

22. *Третье решение Е.И.Харламовой - Г.В.Мозалевской.* Оно представлено посредством гиперболических функций [164, с.286-289]

$$
x = 2c\,\mathrm{ch}2\sigma + 2c_1\mathrm{ch}\sigma + c_0, \quad y = \frac{2a_2}{(a_1-a_2)s}(2c\ \mathrm{sh}2\sigma + c_1\mathrm{ch}\sigma),
$$

$$
z^2 = \frac{2}{a_2(a_1-a_2)^2}\bigl[(2\mu_4'-h_4)\mathrm{ch}4\sigma + (2\mu_3'-h_3)\mathrm{sh}3\sigma + (2\mu_2'-h_2)\mathrm{ch}2\sigma + (2\mu_1'-h_1)\mathrm{sh}\sigma + \mu_0 - h_0/2\bigr];
$$

$$
t = -\frac{s}{a_2}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{z(\sigma)}; \ \nu = \frac{2}{(a_1-a_2)^2\Gamma}(\mu_4'\mathrm{ch}4\sigma + \mu_3'\mathrm{sh}3\sigma + \mu_2'\mathrm{ch}2\sigma + \mu_1'\mathrm{sh}\sigma + \mu_0/2),
$$

$$
\nu_1 = \frac{2}{(a_1-a_2)^2\Gamma}(\mu_4''\mathrm{sh}4\sigma + \mu_3''\mathrm{ch}3\sigma + \mu_2''\mathrm{sh}2\sigma + \mu_1''\mathrm{ch}\sigma +), \ \nu_2 = \frac{2z}{(a_1-a_2)\Gamma}(g_2\mathrm{ch}2\sigma + g_1\mathrm{sh}\sigma + g_0/2).
$$

Это решение получено при условии $B = 4A(2C-A)\times(17C-8A)^{-1}$, и в безразмерных величинах имеет единственный принадлежащий некоторому интервалу свободный параметр $u = C/A$, в зависимости от которого представлены все коэффициенты в решении.

Таким образом, в классической задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой имеются 22 точных решения, и в каждом из них инвариантные соотношения - алгебраические. Видно из перечисления, что донецким механикам принадлежат 16 решений.

Как было отмечено в пункте I, задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой получила естественное обобщение в задаче о движении тела в жидкости с учетом циркуляционных движений жидкости в отверстиях и полостях. Такое обобщение становится совершенно очевидным после преобразования на основе математической аналогии уравнений (22) к виду (25).

Случаи интегрируемости с четвертым интегралом рассматриваемой задачи были получены при исследовании системы (22). Вследствие отмеченной аналогии они элементарно представляются как случаи интегрируемости системы (25). Отметим сразу же, такое представление не дает новых решений задачи, это всего лишь замена переменных в решениях, найденных ранее. Но поскольку в последние годы систему (25) стали рассматривать как независимую, игнорируя результаты, полученные для системы (22), то обычно установленные даже с меньшей общностью решения системы (25) истолковываются как новые. Это привело к необходимости разъяснять наличие полной аналогии задач, что и было выполнено в работах [71, 72, 75, 165], где классические случаи интегрируемости представлены по отношению к уравнениям (25).

Случаи интегрируемости системы (22) с четвертым интегралом существуют при условиях

$$
a_{23} = 0, \quad b_{23} = 0, \quad c_{23} = c_{32} = 0 \quad (123), \tag{46}
$$

т.е. когда все три тензора a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} в записи кинетической энергии (21) соосны. При этом, как следует из (25), соосны и тензоры J_{ij}, N_{ij}, E_{ij} :

$$N_{23} = 0, \qquad E_{23} = 0 \quad (123), \tag{47}$$

и уравнения (25) упрощаются:

$$\begin{gathered} J_1\omega_1^\bullet = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + E_3\nu_3\omega_2 - \\ -E_2\nu_2\omega_3 + (N_2 - N_3)\nu_2\nu_3 + (e_2\nu_3 - e_3\nu_2)\Gamma \quad (123). \end{gathered} \tag{48}$$

Классические интегралы уравнений (25), (48) - квадратичные функции основных переменных:

$$J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 + N_1\nu_1^2 + N_2\nu_2^2 + N_3\nu_3^2 - 2(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3)\Gamma = 2h, \tag{49}$$

$$\sum_{(123)} (J_1\omega_1 - \frac{1}{2}E_1\nu_1 + \lambda_1)\ \nu_1 = l, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = l. \tag{50}$$

В общем случае решение системы (22) получил П.В.Харламов [118, с.22], это решение в работе [72] перенесено на систему (25). В дополнение к (47) должны быть удовлетворены условия $\lambda_2 =$ $= \lambda_3 = 0,\ e_2 = e_3 = 0,\ J_2 = J_3,\ N_2 = N_3,\ E_2 = E_3 = E$, обеспечивающие существование линейного интеграла П.В.Харламова

$$J_1\omega_1 + E\nu_1 = \text{const}. \tag{51}$$

Найденный А.Клебшем случай интегрируемости [175] изучал С.А.Чаплыгин [172]. Дополнительные к (24), (47) условия, характеризующие этот случай, С.А.Чаплыгин записал в виде $E_1 = 0$, $N_1 = N + \beta J_1$ (123), так что $(J_2 - J_3)N_1 + (J_3 - J_1)N_2 + (J_1 - J_2)N_3 = 0$. Интеграл Клебша квадратичен:

$$J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2 - \beta(J_2J_3\nu_1^2 + J_3J_1\nu_2^2 + J_1J_2\nu_3^2) = k.$$

Относящиеся к нему работы обсуждены в [160].

Квадратичные интегралы В.А.Стеклова и А.М.Ляпунова, полученные ими при условиях (24), (46), были обобщены на систему (22) П.В.Харламовым и В.Н.Рубановским. Интегралы перенесены и на систему (25). При условиях (47) и дополнительных ограничениях $e_1\Gamma = s\lambda_1,\ E_1 = s(J_2 + J_3 - J_1) -$ $-2\kappa J_2J_3,\ N_1 = N - s^2J_1 + 2\kappa s(J_2 + J_3)J_1$ (123) (s, κ, N – независимые параметры) четвертый интеграл таков:

$$\sum_{(123)} \Big\{ \big[J_1\omega_1 + \lambda_1 + \langle sJ_1 + \kappa(J_2J_3 - J_3J_1 - J_1J_2)\rangle\nu_1\big]^2 +$$

$$+ \big[\langle (J_2 - J_3)^2J_1^2 - J_2^2J_3^2\rangle\ \kappa\nu_1 - 2J_2J_3\lambda_1\big]^2 \big[(J_2 - J_3)^2J_1^2 - J_2^2J_3^2\big]^{-1} \Big\} = \text{const}.$$

При условиях (47) и

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad J_1 = J_2 = J_3 = J, \quad N_1 = N - E_2E_3/J \quad (123) \tag{52}$$

четвертый интеграл [73] : $\displaystyle\sum_{(123)} (E_2 + E_3)\Big(\omega_1 - \frac{E_1}{J}\nu_1 + \frac{e_1\Gamma}{E_2 + E_3}\Big)^2 = \text{const}$.

Последний из найденных случаев, который С.А.Чаплыгин [172, с.149] назвал предельным случаем особого рода, получен при условиях (52) и $E_1 = E_2 = E_3 = 0,\ \Gamma = 0$. В работе [75] указан четвертый интеграл

$$k = (N_1\omega_1^2 + N_2\omega_2^2 + N_3\omega_3^2)J - (N_2N_3\nu_1^2 + N_3N_1\nu_2^2 + N_1N_2\nu_3^2).$$

Этот случай интегрируемости можно соотнести со случаем А.Клебша (это сделано в параграфе 37 монографии В.А.Стеклова [94]) так же, как Г.В.Колосов [46] соотносит случай интегрируемости А.М.Ляпунова со случаем В.А.Стеклова.

Интеграл (51) в исследовании П.В.Харламова [118] последовал из более общего результата – из найденного им линейного инвариантного соотношения уравнений (22). Этот результат в работе [118] также перенесен на систему (25), и линейное инвариантное соотношение представлено в виде

$$\Big(\omega_1 - n_1\nu_1 - n_{13}\nu_3 + \frac{\lambda_1}{J_1 - J_2}\Big)\sqrt{(J_1 - J_2)J_1} - \Big(\omega_3 - n_3\nu_3 -$$

$$-n_{31}\nu_1 + \frac{\lambda_3}{J_2 - J_3}\Big)\sqrt{(J_1 - J_2)J_1} = k\sqrt{(J_1 - J_3)\frac{J_2}{J_1 J_3}}\,(J_1 + J_2)(J_2 + J_3)\nu_2.$$

Уравнения задач динамики твердого тела существенно нелинейны, и обычно в каждой из них рассматривают простейшие решения, когда основные переменные сохраняют начальные значения. В задаче о движении тела в жидкости такие решения относятся к установившимся винтовым движениям тела. При условиях (24) их изучал В.А.Стеклов [94, гл.III], а в общем случае - П.В.Харламов [127, 128]. Аналогом этих движений в задаче о теле с неподвижной точкой являются равномерные вращения тела вокруг оси, направление которой в пространстве фиксировано (их еще называют перманентными вращениями). При этом изучают множество тех прямых в теле, которые могут служить осями равномерных вращений. В наиболее общем случае системы (25) это множество найдено в [72], где отмечена и связь его с обсуждавшимися ранее частными случаями.

Нахождение этих стационарных движений для каждой системы уравнений - задача сравнительно простая. Несколько сложнее находить классы движений тела, характеризуемые наличием трех линейных инвариантных соотношений. При условиях (24) обстоятельный анализ таких решений выполнил С.А.Чаплыгин [173], а все такие решения получены в работах П.В.Харламова [123] и В.Н.Рубановского [80-82]. Эти результаты непосредственно переносятся на систему (25) и, следовательно, в задаче о движении тела с закрепленной точкой имеются аналогичные решения с тремя линейными инвариантными соотношениями. Один пример построения такого решения с использованием аналогии [71, 72] дан в работе [73].

Решения с линейными инвариантными соотношениями в случае (24) были полностью изучены С.А.Чаплыгиным [173]. При наличии циркуляций (для уравнений (22)) большая часть результатов С.А.Чаплыгина обобщена П.В.Харламовым [118, 123] и дополнена В.Н.Рубановским [80-82].

Как уже отмечалось, по отношению к уравнениям М.П.Харламова (33), содержащим три неконкретизированных функции Π, F, f , ставились обратные и полуобратные задачи, в которых по задаваемой полностью или частично структуре предполагаемых решений устанавливаются некоторые ограничения на структуру функций Π, F, f .

В работе [66] изучены безнутационные решения, там получено необходимое и достаточное условие существования решений уравнений (33) с постоянным значением угла нутации (угла между осями, одна из которых фиксирована в теле, а другая - в неподвижном пространстве). Это условие заключает все ранее найденные (начиная с работ Г.Г.Аппельрота и Д.Гриоли) случаи существования безнутационных движений в конкретных задачах динамики твердого тела.

Предлагались и другие подходы к построению решений с одним инвариантным соотношением. Так, в работе [74] с учетом интеграла (35) инвариантное соотношение задавалось в виде линейного $k = \tau_0(\nu_1,\nu_2)+\sum\limits_{i=1}^{3}\tau_i(\nu_1,\nu_2)A_i\omega_i$ или квадратичного $k = \sum\limits_{i=1}^{3}\left[\tau_{ii}(\nu_1,\nu_2)A_i^2\omega_i^2+2\tau_i(\nu_1,\nu_2)A_i\omega_i\right]+2\tau_0(\nu_1,\nu_2)$ по компонентам угловой скорости при условии, что их производные в силу уравнений вместе с интегралами образуют функционально зависимую систему соотношений.

Завершая обзор точных решений, полученных в классических задачах о движении одного твердого тела, отметим в связи с ними и результаты А.А.Илюхина по точным решениям в математически аналогичной задаче об упругих стержнях.

Если ось в недеформированном состоянии стержня имеет форму прямой или винтовой линии, то формально можно было бы перенести большинство решений первой задачи на вторую. Но, как отмечалось выше, ограничения, накладываемые на параметры, в этих задачах различны, поэтому лишь некоторые из случаев интегрируемости первой задачи имеют физический смысл во второй. А.А.Илюхин отмечает пять таких случаев [18, с.242-268; 35, с.35-36]. Ниже будет показано, что различия таких результатов проявляются при их визуализации.

Переход от задачи о движении одного тела к задаче о движении системы взаимодействующих тел настолько усложняет математическую модель, что получение нетривиальных точных решений представляется почти невозможным. Однако донецкими учеными такие результаты все же были получены.

Выделим из них особо важную в приложениях задачу о гироскопе в кардановом подвесе, в которой наиболее общие точные решения с учетом конструктивных несовершенств этого прибора получены П.В.Харламовым [131] и М.П.Харламовым [108]. Из этих решений следуют как частные случаи все найденные ранее точные решения этой задачи (см. обзор [68]).

Одно из наиболее общих точных решений для системы n тел (при любом n), получено П.В.Харламовым в [139]. В этом решении тела имеют по распределению масс структуру гироскопов Лагранжа (но в соответствии с [140] они могут быть и гиростатами Л.Н.Сретенского), линии узлов всех тел остаются параллельными, а углы - равными. Изучены возможные конфигурации системы. Дальнейшее продвижение в этой задаче получено Д.А. Чебановым в работе [174], где утверждается возможность сохранения вертикального направления осей некоторых тел. С такой же общностью М.П. Харламов нашел точное решение задачи о гирокусте при любом количестве носимых тел [113].

Более обстоятельная информация о точных решениях задач о движении систем связанных твердых тел дана в обзоре [161].

IV. Компьютерная визуализация точных решений. Анализ математической модели и, если оказывается возможным, построение точного решения системы уравнений - важный этап изучения движения, но основной целью в механике остается получение достаточно полной информации обо всех особенностях этого движения. В некоторых случаях полученные решения позволяют в результате вычислений установить, где тело находится в требуемый момент времени, как оно ориентировано в пространстве. Но, как заметил еще Л.Пуансо, механик желает видеть весь процесс движения, проследить, как пришло тело к этому положению и как оно продолжит движение. Принципиальную возможность достичь полного решения задачи доставляет известная теорема кинематики, на основании которой движение тела воспроизводится качением неизменно связанной с телом линейчатой поверхности (подвижного аксоида) по неподвижной в пространстве линейчатой поверхности (неподвижному аксоиду).

В задаче о движении тела с неподвижной точкой эти линейчатые поверхности — конусы. Долгое время эта теорема не могла быть применена, так как не было конструктивного метода построения неподвижного аксоида. Поэтому желаемого результата пытались достичь другими путями, используя специфику каждого найденного решения. Успешным был результат Л.Пуансо: он представил движение тела по инерции качением без скольжения неизменно связанного с телом эллипсоида по неподвижной плоскости. Но уже истолкование К.Г.Якоби и Ж.Г.Дарбу движения гироскопа Лагранжа и исследование Н.Е.Жуковского движения тела в случае Ковалевской не были прямыми, они использовали вспомогательные промежуточные системы координат, представляя движение тела суммой двух движений, что существенно снижало наглядность полученных представлений.

В задаче о движении тела, имеющего неподвижную точку, последняя является вершиной аксоидов, и для построения конусов достаточно знать направляющие линии. Таковыми естественно принять годографы угловой скорости тела в неизменно связанной с ним системе координат и в неподвижном пространстве. Пара соприкасающихся пространственных кривых — такой же легко воспринимаемый геометрический образ, как траектория точки. И если годографы угловой скорости найдены, результат исследования движения тела приобретает необходимую наглядность. Положение тела в пространстве полностью определено положением в пространстве подвижного годографа, неизменно связанного с этим телом. А последнее определено, как только указано на обоих годографах положение их общей в этот момент точки (на каждом годографе ее устанавливают значением соответствующей дуговой координаты). Такой способ задания положения тела в пространстве может быть назван естественным (подобно соответствующему способу в динамике точки). Изучив все особенности годографов и воспроизведя затем движение тела качением подвижного годографа по неподвижному, получим полное представление и обо всех особенностях движения тела, что и дало основание назвать результат полным решением задачи [181].

Обычно при решении задач динамики твердого тела компоненты угловой скорости тела в неизменно связанных с ним осях

$$\omega_i = \omega_i(\sigma) \quad (123), \tag{53}$$

и компоненты $\nu_i = \nu_i(\sigma)$ единичного вектора, неизменного в пространстве, определяются в зависимости от некоторой вспомогательной переменной σ , а связь σ со временем находят из соотношения вида $\sigma^{\bullet} = f(\sigma)$. Уравнениями (53) задан подвижный годограф угловой скорости. Неподвижный годограф определен в цилиндрической системе координат уравнениями [124]

$$\omega_\zeta = \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3\nu_3, \quad \omega_\rho^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_\zeta^2,$$
$$\omega_\rho^2 d\alpha = (\omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3)d\omega_1 + (\omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1)d\omega_2 + (\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)d\omega_3. \tag{54}$$

Эти уравнения содержат лишь кинематические характеристики изучаемого движения. Основанное на них исследование движения может столкнуться с особенностями лишь в том случае, когда они присущи самому движению. В этом состоит отличие кинематических уравнений (54) от известных кинематических уравнений, использующих углы Эйлера. Последние определяют ориентацию подвижных осей координат по отношению к неподвижным, но при этом могут появиться особенности, обусловленные способом введения углов. Так, обращение в нуль угла нутации приводит к неопределенности линии узлов и связанной с ней неопределенности отсчета остальных углов Эйлера; последствия этого в прикладных задачах хорошо известны.

Конструктивность метода годографов подтверждена в применении к ряду точных решений, представленных в пункте III. Приведем полученные в этой области результаты.

В решении Н.Е.Жуковского при произвольных значениях входящих в него параметров визуализация в полном объеме еще не выполнена. Упомянутую выше интерпретацию Л.Пуансо П.В.Харламов дополнил уравнениями подвижного горографа и представил движение качением принадлежащего эллипсоиду подвижного годографа по неподвижному, находящемуся в плоскости, ортогональной неизменному в пространстве моменту количества движения [124, с.129-142]. Учет гиростатического момента существенно осложняет задачу, и построение полного решения выполнено лишь для случая, когда гиростатический момент принадлежит одной из главных осей [50].

Полное решение в случае интегрируемости с двумя линейными инвариантными соотношениями вначале было построено при условии, что одна из компонент гиростатического момента отсутствует [124, с.72-94; 134]. В работе [137] это ограничение снято — полное решение построено для общего случая.

Наглядному представлению движения гиростата Лагранжа посвящены работы [32, 33, 138, 168].

Первое решение Л.Н.Сретенского и его частный случай — решение Гесса приводит к интегрированию уравнения Риккати, которое, вообще говоря, не может быть сведено к квадратурам. Поэтому при исследовании годографов А.М.Ковалеву пришлось использовать качественные методы [39-41].

Обобщив решение Д.Гриоли на случай гиростата, Е.И.Харламова при анализе полного решения обнаружила в движении этого тела существенно новые эффекты. Один из них — возможность регулярной прецессии вокруг любой оси, в отличие от случая Д.Гриоли, где такая прецессия возможна лишь для единственной наклонной оси [157].

Своему решению с линейным инвариантным соотношением наглядное представление методом годографов Е.И.Харламова дала в [149].

Представление решения методом годографов в первом решении А.И.Докшевича [29] дал Е.К.Сергеев в [84, 86, 87].

Обстоятельному исследованию подвижного и неподвижного годографов для второго решения Е.И.Харламовой посвящены работы [5, 6, 76, 147].

В книге П.В.Харламова [124] качественно исследованы годографы в случаях интегрируемости Д.Н.Горячева [124, с.110-125] и С.А.Чаплыгина [124, с.143-154].

Третий случай интегрируемости П.В.Харламова (обобщение случая Н.Ковалевского) исследован в работе [19]. Достаточно полно изучено методом годографов четвертое решение П.В.Харламова в цикле работ [59, 63, 115, 145], а его пятому случаю интегрируемости полное решение при отсутствии гиростатического момента дано в [64].

В случае интегрируемости П.В.Харламова - Е.И.Харламовой годографы исследовала Л.М.Ковалева в [43].

В решении С.В.Ковалевской сохранены независимыми все начальные условия, а четвертый интеграл имеет высокую степень, и поэтому исчерпывающего геометрического представления движение тела еще не получило. Оно полностью изучено в случаях Г.Г.Аппельрота [146], Б.Н.Делоне [45, 144], Б.К.Млодзевского [133]. Отметим также исследования И.Н.Гашененко [12-14].

Второму решению Л. Н.Сретенского в его частном случае Д.Н.Горячева - С.А.Чаплыгина посвящен цикл работ, в которых изучались годографы в различных случаях [8-11, 17, 20, 110, 112].

В работе [106] дано полное решение для второго случая интегрируемости А.И.Докшевича.

Свое решение методом годографов исследовала Г.В.Мозалевская в работах [61, 62].

И, наконец, первый случай интегрируемости Е.И.Харламовой - Г.В.Мозалевской методом годографов изучен при ограничениях, установленных ранее Б.И.Коносевичем и Е.В.Поздняковичем в их работе [48].

Этим исчерпаны работы по построению решений задачи о движении гиростата с неподвижной точкой.

В аналогичной задаче о кручении и изгибе тонкого стержня М.П.Харламов предложил алгоритм наглядного представления средствами компьютерной графики формы изогнутого и закрученного тонкого стержня и реализовал его при визуализации изгиба и закручивания стержня в решении Д.Н.Горячева [109]. Е.К.Сергеев таким же образом исследовал форму стержня в случае интегрируемости А.И.Докшевича [85, 88].

В общей задаче движения свободного тела известен единственный случай представления движения тела качением без скольжения неизменно связанной с телом поверхности по неподвижной поверхности — это представление С.А.Чаплыгина движения тела в жидкости в случае Клебша [175, с.149-150]. В общей же постановке задачу представления движения тела посредством аксоидов обсуждал Г.К.Суслов. Он отметил необходимые соотношения между характеристиками этих линейчатых поверхностей [101, с.110].

Уравнения аксоидов для общего случая пространственного движения тела получены М.П.Харламовым в [107]. В качестве направляющей линии аксоида взята его горловая линия, для которой предложены различные формы уравнений. Одна из них имеет вид

$$
\begin{gathered}
(dr)^2 = \left\{[(\cos\kappa)ds + d\sigma]\, e_\rho - pe_\nu e_\rho d\alpha\right\}^2 + (e_\nu de_\rho - e_\rho de_\nu)^2 p^2, \\
\mathrm{tg}\beta = \frac{e_\nu de_\rho - e_\rho de_\nu}{[(\cos\kappa)ds + d\sigma]e_\rho - pe_\nu e_\rho d\alpha} p, \quad d\zeta_\nu = [(\cos\kappa)ds + d\sigma]e_\nu + pe_\rho^2 d\alpha,
\end{gathered} \tag{55}
$$

где κ - угол между образующей и горловой линией подвижного аксоида; ds – элемент дуги этой линии; dr – элемент дуги проекции горловой линии неподвижного аксоида на плоскость, ортогональную вектору $\boldsymbol{\nu}$; $d\sigma$ – элементарное проскальзывание подвижного аксоида вдоль образующей; p – общий у аксоидов параметр распределения; β – угол между проекциями на указанную плоскость направлений угловой скорости и касательной к горловой линии неподвижного аксоида, $e_\nu = \omega_\nu/\omega$, $e_\rho = \omega_\rho/\omega$, $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$.

Если подвижный аксоид дан, то правые части уравнений (55) известны, и для нахождения горловой линии потребуются лишь две квадратуры.

Положение принципиально изменилось при появлении средств компьютерной графики, обеспечивающих возможность получить исчерпывающую информацию о движении тела в наглядной форме на мониторе, воспроизводя движение тела движением неизменно связанного с ним подвижного аксоида по неподвижному. Основные результаты по компьютерной визуализации движения тела получил А.П.Харламов [105]. Из имеющихся возможностей изображения аксоидов в виде прозрачных или непрозрачных поверхностей выбрана вторая. Это потребовало решения задачи об удалении в изображении становящихся при проектировании невидимыми частей линейчатых поверхностей. Созданные алгоритмы и программы были применены к визуализации аксоидами движения тела в различных случаях [103, 104].

Заключение. В этом обзоре ограничились важнейшими результатами, полученными донецкими учеными в динамике твердого тела. За его пределами остались другие направления, разрабатывавшиеся в Донецкой школе механики. Это и работы, относящиеся к динамике деформируемых тел (термоупругие волны, критические динамические нагрузки в стержнях, и распространение метода инвариантных соотношений в теорию ориентируемых многообразий с применением к задачам нелинейной теории управления и наблюдаемости динамических систем, и исследования устойчивости движения систем связанных твердых тел, и выполнявшийся в последние десятилетия фундаментальный анализ оснований механики. По некоторым из этих направлений уже имеются обзоры, а другие — еще ждут своих исследователей.

1. *Анчев А.А.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1967. - **31**, N 1.- С.49-58.
2. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. - М.; Л.: Изд-во АН СССР. - 1940.- С.61-155.
3. *Билимович А.Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Изв. Киев. ун-та.- 1912.- **52**, N 9.- С. 1-51.
4. *Бобылев Д.Н.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр.Отд. физ. наук. об-ва любит. естеств.- 1896.- **8**, N 2 - С. 21-25.
5. *Бурлака П.М.* Кинематическое истолкование движения гиростата в одном решении Е.И.Харламовой // Механика твердого тела.- 1982.- Вып. 14.- С. 9-20.
6. *Бурлака П.М., Горр Г.В.* Движение твердого тела в одном частном случае интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона // Там же. -1974.- Вып. 7. - С. 3-9.
7. *Воронец П.В.* Геометрическое исследование Эйлерова случая вращения твердого тела около неподвижной точки // Изв. Киевск. ун-та. - 1898.- **32**, N 4.- С. 1-52; N 5.- С. 53-113.
8. *Гашененко И.Н.* Исследование одного класса движения гироскопа Чаплыгина // Механика твердого тела.- 1985.- Вып. 17. - С. 6-9.
9. *Гашененко И.Н.* Подвижный годограф вектора угловой скорости в решении Горячева-Чаплыгина // Там же.- 1986.- Вып. 18. - С. 3-9.
10. *Гашененко И.Н.* О неподвижном годографе угловой скорости в решении Горячева-Чаплыгина // Там же.- 1988.- Вып. 20. - С. 29-34.
11. *Гашененко И.Н.* Характерные свойства годографов угловой скорости в решении Горячева-Чаплыгина // Там же.- 1989.- Вып. 21.- С. 9-18.
12. *Гашененко И.Н.* Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской // Там же.- 1990.- Вып. 22. - С. 3-10.
13. *Гашененко И.Н.* Один случай интегрируемости уравнений движения гиростата // Там же.- 1992.- Вып.24.- С. 1-4.
14. *Гашененко И.Н.* Движение гироскопа Ковалевской при нулевой постоянной интеграла площадей // Там же.- 1993.- Вып. 25.- С. 7-16.

15. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи.- М.: Изд-во АН СССР, 1950. - 387 с.
16. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.- М.: Гостехиздат, 1953.- 287 с.
17. *Горр Г.В.* Подвижный годограф вектора угловой скорости в решении Д.Н.Горячева // Механика твердого тела.- 1970.- Вып. 3.- С. 95-101.
18. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем.- Киев: Наук. думка, 1995.- 409 с.
19. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Козьменко В.К.* О решении Н.Ковалевского уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика.- 1968.- Вып. 5.- С. 46-53.
20. *Горр Г.В., Левицкая Г.Д.* Об одном периодическом движении гироскопа Горячева-Чаплыгина // Механика твердого тела.- 1971.- Вып. 3.- С. 101-106.
21. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* К постановке задачи о решении уравнений Д.Гриоли - М.П.Харламова в специальной форме // Там же.- 1997. - Вып. 29.- С.133-139.
22. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* Изоконические движения в одной задаче динамики твердого тела // Там же.- С.139-143.
23. *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Мат. сборник. - 1900.- 21, N 3.- С. 431-438.
24. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение: В 2 т.- М.; Л.: Изд-во иностр. лит., 1951.- Т. 1.- 351 с.
25. *Гуляев М.П.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Вестн. Моск. ун-та, Математика, механика.- 1955. - N 3. - С. 15-21.
26. *Демин В.Г., Степанова Л.А.* О построении и исследовании точных решений уравнений динамики твердого тела // Прикл. механика.- 1976. - **12**, N 9.- С. 3-17.
27. *Докшевич А.И.* Об одном частном решении задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Докл. АН СССР.- 1966.- N 6.- С. 1251-1252.
28. *Докшевич А.И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикл. механика.- 1968.- **4**, N 11.- С.95-100.
29. *Докшевич А.И.* Новое частное решение задачи о движении тяжелого гиростата // Механика твердого тела.- 1970.- Вып. 2.- С. 8-12.
30. *Докшевич А.И.* Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1970.- Вып. 2.- С. 12-15.
31. *Домогаров А.С.* О свободном движении гироскопа.- С-Пб; 1893. - 175 с.
32. *Елфимов В.С.* Исследование подвижного годографа гироскопа Лагранжа // Механика твердого тела.- 1978. - Вып.10. - С. 16-24.
33. *Елфимов В.С.* О геометрическом исследовании гироскопа Лагранжа // Там же.- 1979.- Вып. 11.- С. 22-32.
34. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.: В 8 т.- М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949.- Т.2.- С. 152-310.
35. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней.- Киев: Наук. думка, 1969. - 216 с.
36. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Кн.2. Механика упругих и абсолютно твердых тел. - М.: Наука, 1986.- 416 с.
37. *Кирхгоф Г.* Механика.- М.: Изд-во АН СССР, 1962.- 402 с.
38. *Ковалев А.М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. -1968.- Вып. 5.- С. 87-102.
39. *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела.- 1969.- Вып. 1.- С. 12-27.
40. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Л.Н.Сретенского задачи о движении гиростата // Там же.- 1970.- Вып. 2. - С. 37-45.
41. *Ковалев А.М.* Кинематическое истолкование движения тела в случае Л.Н.Сретенского // Там же. - С. 45-50.
42. *Ковалев А.М., Ковалев Ю.М.* О квадратичном интеграле уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1967.- **31**, N 3.- С. 530-532.
43. *Ковалева Л.М.* Геометрическое исследование одного движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. - 1971.- Вып. 3.- С. 79-86.

44. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. - М.: Изд-во АН СССР, 1940.- С. 11-49.

45. *Коваль В.И., Харламов П.В.* О годографах угловой скорости гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Механика твердого тела. - 1979. - Вып. 11.- С. 3-17.

46. *Колосов Г.В.* Заметки о движении твердого тела в несжимаемой жидкости в случаях В.А.Стеклова и А.М.Ляпунова // Изв. Рос. Акад. Наук. Сер. 4.- 1919.- **13**, N 12-15.- С. 711-715.

47. *Коносевич Б.И., Позняковин Е.В.* Два частных решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика.- 1968.- **32**, N 3.- С. 544-548.

48. *Коносевич Б.И., Позднякович Е.В.* Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в двух частных случаях интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона // Механика твердого тела.-1970. - Вып. 2. - С. 77-80.

49. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, ч. I.- М.; Л.: Гостехиздат, 1948.- 536 с.

50. *Кравчук Д.Н.* Геометрическое истолкование одного класса движений гиростата по инерции // Механика твердого тела.- 1986.- Вып. 18. - С. 15-22.

51. *Кудряшова Л.В., Мозалевская Г.В.* Об одном классе решений задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика.- 1968. - Вып. 5.- С. 139-150.

52. *Кудряшова Л.В., Мозалевская Г.В.* Об одном классе решений задачи движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // История и методология естественных наук.- М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1970.- Вып.9. - С. 44-58.

53. *Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Донецкая школа динамики твердого тела // Исследования по истории физики и механики. - М.: Наука, 1987.- С. 45-64.

54. *Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* О точных решениях уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // История и методология естественных наук.- М.: Изд-во Моск. ун-та.- 1973.- Вып.14.- С. 225-241.

55. *Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Геометрические методы в динамике твердого тела // Там же.- 1974.- Вып.16.- С. 224-235.

56. *Лагранж Ж.Л.* Аналитическая механика.- М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950.- Т. **II**.- 440 с.

57. *Ламб Г.* Гидродинамика.- М.; Л.: Гостехиздат, 1947.- 928 с.

58. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики.- М.: Изд-во иностр. лит., 1951.- Т.**II**, ч.2.- 555 с.

59. *Мозалевская Г.В.* Исследование подвижного годографа в одном решении задачи о движении гиростата // Механика твердого тела. - 1969. - Вып. 1.- С. 34-35.

60. *Мозалевская Г.В.* Частные решения задачи о движении тяжелого гиростата // Там же.- С. 23-26.

61. *Мозалевская Г.В.* Исследование одного частного решения задачи о движении тяжелого гиростата // Там же.- 1970.- Вып. 2.- С. 73-76.

62. *Мозалевская Г.В.* Исследование одного решения задачи о движении тяжелого гиростата // Там же.- 1971.-Вып. 3.-С.87-90.

63. *Мозалевская Г.В.* Неподвижный годограф угловой скорости в одном решении задачи о движении гиростата // Там же.- 1971.- Вып. 3. - С. 75-79.

64. *Мозалевская Г.В.* Об асимптотически равномерных вращениях тяжелого гиростата // Там же.- 1981.- Вып. 13.- С. 23-27.

65. *Мозалевская Г.В.* Об одной системе уравнений движения твердого тела // Там же.- 1988.- Вып. 20.- С. 41-46.

66. *Мозалевская Г.В., Орешкина Л.Н.* Безнутационные движения твердого тела // Там же. - 1991.- Вып. 23.- С. 1-5.

67. *Мозалевская Г.В., Харламова Е.И.* Понижение порядка уравнений обобщенной задачи динамики твердого тела // Тр. Междунар. конф. "Математика в индустрии".- Таганрог, 1998.- С. 229-231.

68. *Мозалевская Г.В., Хохлов А.И.* Современное состояние задачи построения точных решений уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе // Исследования по истории механики. - М.: Наука, 1983.- С.90-100.

69. *Николаи Е.Л.* К задаче об упругой линии двоякой кривизны / Николаи Е.Л. Труды по механике.- М.: Гостехиздат, 1955.- С.45-277.

70. *Николаи Е.Л.* О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. - С. 455-496.

71. *Орешкина Л.Н.* Математические аналогии некоторых задач динамики твердого тела // Механика твердого тела.- 1986.- Вып. 18. - С. 103-110.
72. *Орешкина Л.Н.* Объединение двух задач динамики твердого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.- 1986. - N 5.- С.36-43.
73. *Орешкина Л.Н.* О двух задачах динамики твердого тела // Механика твердого тела. - 1987.- Вып. 19. - С. 20-30.
74. *Орешкина Л.Н.* Случаи интегрируемости уравнений М.П.Харламова // Там же.- 1989. - Вып. 21.- С. 1-9.
75. *Орешкина Л.Н.* О необходимых и достаточных условиях существования четвертого квадратичного интеграла в некоторых задачах динамики твердого тела // Там же.- 1988.- Вып. 20.- С. 18-29.
76. *Орешкина Л.Н., Харламов А.П.* Движение гироскопа Е.И.Харламовой в случае А.И.Докшевича // Там же.- 1983. - Вып. 15. - С. 57-61.
77. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Движение твердого тела около неподвижной точки.-М.: Изд-во АН СССР, 1940.- С. 157-186.
78. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики / Изб. тр.: В 3 т. М.: Наука, 1971.- Т.1.- 771 с.
79. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел: В 2 т.- М.: Наука, 1983.- Т. II.- 544 с.
80. *Рубановский В.Н.* Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого тела в жидкости // Докл. АН СССР.- 1968. - 180, N 3.- С. 556-559.
81. *Рубановский В.Н.* Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех.-1968.- N 2.- С. 99-106.
82. *Рубановский В.Н.* О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости // Прикл. математика и механика. - 1968. - **32**, N 4.- С. 763-768.
83. *Румянцев В.В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Там же. - 1956. - **20**, N 1.- С. 51-66.
84. *Сергеев Е.К.* О движении гиростата в случае А.И.Докшевича // Механика твердого тела.- 1983.- Вып.15.- С. 39-47.
85. *Сергеев Е.К.* Исследование форм равновесия тонкого стержня в случае А.И.Докшевича // Там же.-1984.-Вып.16.-С. 92-97.
86. *Сергеев Е.К.* Об асимптотических к покою движениях гиростата в случае А.И.Докшевича // Там же.-1985.-Вып.17.- С.3-6.
87. *Сергеев Е.К.* Об одном периодическом движении гиростата Докшевича // Там же. - 1986. - Вып. 18. - С. 10-12.
88. *Сергеев Е.К.* О построении пространственных форм равновесия тонкого стержня // Там же.- 1988. - Вып. 20.- С. 95-99.
89. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. - 1963.- **149**, N 2.- С. 292-294.
90. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения твердого тела с гироскопом // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. - 1963.- N 3. - С. 60-71.
91. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1977.- 355 с.
92. *Старжинский В.М.* Об одном приведении уравнений движения волчка Ковалевской / Избранные вопросы механики твердого и деформируемого тела. - М.: Наука, 1985.- С. 22-27.
93. *Старжинский В.М.* Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае Ковалевской // Механика твердого тела.- 1990. - Вып. 22.- С. 11-22.
94. *Стеклов В.А.* О движении тела в жидкости.- Харьков, 1893. - 234 с.
95. *Стеклов В.А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд. физ. наук. об-ва любит. естеств.- 1896.- **8**, N 2.- С. 19-21.
96. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1899.- **10**, N 1.- С. 1-3.
97. *Степанова Л.А.* К истории решения В.Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела.- 1970. - Вып.2.- С.51-59.
98. *Степанова Л.А.* О некоторых обобщениях инвариантного соотношения Гесса // Там же.- С. 59-66.
99. *Степанова Л.А.* Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой: Библиогр. указ. лит. 1749-1979. - Донецк: Политехн. ин-т, 1980.- 132 с.

100. *Степанова Л.А.* Замечание об интегралах С.В.Ковалевской и Л.Н.Сретенского // Механика твердого тела.- 1991.- Вып. 23.- С. 22-26.
101. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика.- М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946.- 655 с.
102. *Халфман Р.Л.* Динамика.- М.: Наука, 1978. - 508 с.
103. *Харламов А.П.* Гирошар на поверхности вращения // Механика твердого тела.- 1989.- Вып. 21.- С. 30-46.
104. *Харламов А.П.* Построение полного решения для периодического движения гирошара // Там же .-1992.-Вып. 24.- С. 62-68.
105. *Харламов А.П.* Об удалении невидимых линий при построении плоских проекций сложных трехмерных объектов // Там же.- 1993.- Вып. 25.- С. 70- 75.
106. *Харламов А.П., Кравчук Д.Н.* Движение гироскопа А.И.Докшевича // Там же.- 1983.- Вып. 15.- С. 35-39.
107. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Там же.- 1980.- Вып. 12.- С. 3-8.
108. *Харламов М.П.* Фазовая топология одной задачи о движении гироскопа // Там же.- 1981.- Вып. 13.- С.14-23.
109. *Харламов М.П.* Новый метод решения пространственных задач нелинейной теории упругих стержней // Там же.- 1982.- Вып. 14.- С.116-123.
110. *Харламов М.П.* Об одном классе движений гиростата // Там же.- 1983.- Вып. 15.- С. 47-56.
111. *Харламов М.П.* Симметрия в системах с гироскопическими силами // Там же.- 1983.- Вып. 15.- С. 87-93.
112. *Харламов М.П.* Об одном асимптотическом движении тяжелого гиростата // Там же.- 1986.- Вып. 18.- С.12-15.
113. *Харламов М.П.* Гиросистемы // Там же.- 1987.- Вып. 19. - С. 42-54.
114. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела.- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.- 200 с.
115. *Харламов М.П., Сергеев Е.К.* Построение полного решения одной задачи динамики твердого тела // Механика твердого тела. - 1982. - Вып.14. - С. 33-38.
116. *Харламов П.В.* Поступательные движения тяжелого твердого тела в жидкости // Прикл. математика и механика.- 1956.- **20**, N 1.- С. 124-129.
117. *Харламов П.В.* О линейных интегралах уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Докл. АН СССР. - 1962. - **143**, N 4. - С.805-807.
118. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. - 1963.- N 4.- С. 17-29.
119. *Харламов П.В.* Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего полости, заполненные жидкостью // Докл. АН СССР.- 1963.- **150**, N 4.- С. 759-760.
120. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения гиростата // Тр. межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости и аналит. механике (Казань, 1962). - Казань, 1964. - С.57-63.
121. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1964.- **28**, N 3.- С. 502-507.
122. *Харламов П.В.* Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Там же.-1964.- **28**, N 1.- С. 158-159.
123. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // Там же.- 1965.- **29**, N 3.- С. 567-572.
124. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965.- 221 с.
125. *Харламов П.В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1965.- **29**, N 1.- С. 26-34.
126. *Харламов П.В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1965.- **29**, N 2.- С. 373-375.
127. *Харламов П.В.* Конгруэнция осей винтового движения // Докл. АН УССР. Сер. А.- 1967.- N 7.- С. 616-619.
128. *Харламов П.В.* О винтовых движениях тела в жидкости // Мат. физика.- 1968.- Вып. 5.- С. 188-193.

129. *Харламов П.В.* Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела.- 1971. - Вып.3. - С. 57-64.

130. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Там же.- 1972.- Вып. 4.- С. 52-73.

131. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Там же.- С. 73-82.

132. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Там же.- 1974.- Вып. 6.- С. 15-24.

133. *Харламов П.В.* Движение гироскопа С.В.Ковалевской в случае Б.К.Млодзеевского // Там же.- 1974.- Вып. 7.- С. 9-17.

134. *Харламов П.В.* Исследование решения с двумя линейными инвариантными соотношениями задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1974.- Вып. 7.- С. 37-56.

135. *Харламов П.В.* Новые методы исследования задач динамики твердого тела // Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления.- М .: Наука, 1975.- С. 317-326.

136. *Харламов П.В.* Решения с инвариантными соотношениями некоторых задач динамики твердого тела // История механики гироскопических систем.- М.: Наука, 1975.- С. 5-19.

137. *Харламов П.В.* Исследование решения с двумя линейными инвариантными соотношениями задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку (специальные случаи) // Механика твердого тела.- 1976.- Вып. 8. - С. 37-56.

138. *Харламов П.В.* О годографах угловой скорости гироскопа Лагранжа // Там же.- 1978. - Вып. 10.- С.10-15.

139. *Харламов П.В.* Некоторые классы точных решений задачи о движении системы гироскопов Лагранжа // Мат. физика.- 1982.- Вып. 32.- С. 63- 76.

140. *Харламов П.В.* Гиростаты // Докл. АН УССР. Сер.А.- 1988. - N 9.- С. 38-41.

141. *Харламов П.В.* Почему спорят механики об основаниях своей науки? // Исследования по истории физики и механики.- М.: Наука, 1989.- С. 186-204.

142. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки.- Киев: Наук. думка, 1995. - 407 с.

143. *Харламов П.В., Ковалева Л.М.* Об одном новом решении задачи о движении тяжелого гиростата // Механика твердого тела. - 1970. - Вып. 2. - С. 3-8.

144. *Харламов П.В., Коваль В.И.* Движение гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Там же. - 1982. - Вып.14.- С. 38-54.

145. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В.* Исследование подвижного годографа угловой скорости в симметричном решении задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1972.- Вып. 4.- С. 8-24.

146. *Харламов П.В, Мозалевская Г.В.* Геометрическое истолкование некоторых движений гироскопа С.В.Ковалевской // Там же.- 1973.- Вып. 5.- С. 5- 24.

147. *Харламов П.В., Харламова Е.И.* Годографы угловой скорости в одном решении задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1977. - Вып. 9. - С.24-33.

148. *Харламова Е.И.* Один частный случай интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона // Докл. АН СССР.- 1959. -**125**, N 5. - С. 996-997.

149. *Харламова Е.И.* Об одном частном решении уравнений Эйлера- Пуассона // Там же. - 1959.-**23**, N 4.- С. 681-690.

150. *Харламова Е.И.* Два частных решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Докл. АН СССР. - 1964.- **154**, N 2.- С. 287- 289.

151. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тяжелого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи // Прикл. математика и механика.- 1966.- **30**, N 4.- С. 784-788.

152. *Харламова Е.И.* Кинематическое истолкование одного движения тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1968. - **32**, N 2.- С. 258-305.

153. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению // Механика твердого тела.- 1969.- Вып. 1.- С. 107-116.

154. *Харламова Е.И.* О линейном инвариантном соотношении уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - С. 5-12.

155. *Харламова Е.И.* О полиномиальных решениях интегродифференциального уравнения задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1971. - Вып. 3. - С. 16-24.

156. *Харламова Е.И.* Об алгебраическом инвариантном соотношении интегродифференциального уравнения задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, при условиях Гесса // Там же.- С. 28-32.
157. *Харламова Е.И.* Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1970.- Вып. 2.- С.35-37.
158. *Харламова Е.И.* Об условиях существования алгебраических инвариантных соотношений уравнений движения твердого тела // Там же.- 1971.- Вып.3.- С. 38-57.
159. *Харламова Е.И.* Об экспоненциальных решениях интегродифференциального уравнения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - С.90-95.
160. *Харламова Е.И.* Об интеграле Клебша // Там же.- 1988. - Вып. 20. - С. 34-40.
161. *Харламова Е.И.* Обзор точных решений задач о движении систем связанных твердых тел / Лесина М.Е. Задача о движении системы твердых тел.- Донецк: Изд-во ДонГТУ, 1998.- С. 107-119.
162. *Харламова Е.И., Кудряшова Л.В., Мозалевская Г.В.* К истории формирования уравнений динамики твердого тела // Механика твердого тела.- 1974.- Вып. 7.- С. 59-82.
163. *Харламова Е.И., Лесина М.Е.* К вопросу о решениях обобщенных уравнений динамики твердого тела // Там же.- 1997. - Вып. 29. -С. 114-133.
164. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела.- Киев: Наук. думка, 1986.- 296 с.
165. *Харламова Е.И., Степанова Л.А.* Об изоморфизме некоторых классических задач динамики твердого тела и попытках построения новых решений путем замены переменных // Механика твердого тела.- 1988.- Вып. 20.- С. 1-13.
166. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* Новый случай интегрируемости уравнений движения тяжелого тела, имеющего неподвижную точку // Докл. АН СССР.- 1969.- **188**, N 4.- С.770-771.
167. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* Новое решение дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, при условиях С.В.Ковалевской // Докл. АН СССР.- 1969.- **189**, N 5.- С. 967-968.
168. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* О решении Лагранжа дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела.- 1969.- Вып. 1.- С. 28-34.
169. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* О преобразовании интегродифференциального уравнения задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1971.- Вып. 3.- С. 12-16.
170. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Собр. соч.: В 4 т.- М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.- Т.1.- С. 118-124.
171. *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Собр. соч.: В 4 т.- М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.- Т.1.- С. 125-132.
172. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья первая) // Там же.- С.136-193.
173. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья вторая) // Там же.- С.194-311.
174. *Чебанов Д.А.* Об одном обобщении задачи о подобных движениях системы гироскопов Лагранжа // Механика твердого тела.- 1995.- Вып. 27.- С.57- 63.
175. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // Math. Ann.- 1871.- 3.- S.238-262.
176. *Darboux G.* Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixe par un point de son axe // J.de Math. pures et appl.-1885.- Ser.4, N 1.- P. 403- 430.
177. *Darboux G.* Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixe par un point de son axe / Cours de mecanique par M.Despreyrons.- Parie, 1886.- 2, note XIX.- 615 p.
178. *Gray A.* A treatise on Gyrostatics and rotational motion. Theory and applications.- London: Macmillan, 1918.- 530 p.
179. *Grioli D.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante assimetrico // Ann. di Mathem. pura ed applic.- 1947.- Ser. 4.- **26**, N 3-4.- P. 271-281.
180. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann.- 1890.- **37**, H.2.- S.153-181.

181. *Kharlamov M.P., Kharlamov P.V.* To solve a problem of rigid body dynamics. What does it mean? // Proccedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics. Academia of Scienses of Turin. (June 7-11, 1982). Atti della Accademia delle scienze di Torino.- Vol. 117 (1983).- P.535-562.

182. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die theorie des Kreiselds. - New York, Stuttgart; Johnson reprint corporation, 1965. - 966 p. (Nachdruck der Erstauflagen von 1897 / 1898 / 1903 / 1910).

183. *Kowalewski N.* Eine neue partikulere Lösung der Differenzialgle- ichungen der Bewegung eines schweren starren Korpes um einen festen Punkt // Math. Ann.- 1908.- **65**, N 4.- S.528-537.

184. *Leimanis E.* The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point.- N.Y.: Springer - Verlag, 1965.- 337 p.

185. *Levi-Civita T.* Sur la recherche des solutions particulieres des systemes differentiels et sur les mouvements stationnaires // Prace mat- fiz.- Warszawa, 1906.- **XXII**.- S.1-40.

186. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. für die reine und angew. Math.- 1894.- **113**, H.4.- S. 318-334.

187. *Van der Woude W.* Über die Standeschen Kreiselbewegungen // Math.- Z.- 1923.- **16**.- S. 170-172.

188. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Math.- 1899.-**22**.- P. 201-356.

Донецкий гос. техн. ун-т,
Московский гос. ун-т

Получено 8.09.98

УДК 517.93, 518:512.3

©2000. **Р.Г. Мухарлямов**

ОБ УРАВНЕНИЯХ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ НЕСВОБОДНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данной работе[1] предлагается метод построения уравнений кинематики и механических систем, приспособленных для численной реализации. Построены соответствующие разностные уравнения, гарантирующие вычисления с заданной точностью. Определяются уравнения программных связей и уравнения возмущений связей. Устойчивость программного многообразия при численном решении уравнений динамики достигается соответствующим построением уравнений возмущений программных связей. Уравнения динамики систем с программными связями составляются в форме уравнений Лагранжа в обобщенных координатах. Рассматриваются некоторые обратные задачи динамики твердого тела.

Введение. Как известно, при использовании известных уравнений динамики, содержащих множители Лагранжа, не удается обеспечить асимптотическую устойчивость интегрального многообразия, соответствующего уравнениям связей [7, 15, 20, 21, 23]. При математическом моделировании уравнения связей, наложенных на систему, рассматриваются как сервосвязи [1,2,16,18,19], а реакции связей – как соответствующие управляющие воздействия. Известные классические методы вычисления реакций связей основаны на определении множителей Лагранжа из условия равенства нулю производных уравнений связей. При этом уравнения связей оказываются первыми интегралами уравнений динамики механической системы, при численном решении которых отклонения от уравнений связей возрастают.

Для стабилизации связей приходится учитывать отклонения от уравнений связей вместе с их производными [20,21,23]. Зависимость между ними определяется через принуждения [18] или уравнения возмущений связей [13]. Стабилизация связей возможна только в том случае, когда уравнения возмущений связей имеют асимптотически устой-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, шифр 99-01-0164 и МОПО РФ.