85. *Euler L.* Dècouverte d'un nouveau principe de Mécanique. - Histoire de l'Ac.Royale des sc. et belles lettres. - Berlin, 1750, 1752. - **6**. - P. 185-217.

86. *Euler L.* Recherches sur la connaissance mécanique des corps // Ibid. - 1758, 1765. - **14**. - P. 131-153.

87. *Euler L.* Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // Ibid., P.154-193.

88. *Euler L.* Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne aut. d'un axe mobile // Ibid.,**16**, 1760, 1767. - P. 176-227.

89. *Kharlamov M.P., Kharlamov P.V.* To solve a problem of rigid body dynamics. What does it mean? // Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics. Academia of Sciences of Turin. (June 7-11, 1982). Atti della emia delle scienze di Torino.- Vol. 117 (1983). - P.535-562.

90. *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des cops // J.math pures et appl. - 1851. - **1**, No 16. - P.289-336.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк — Получено 15.09.99

УДК 531.38

©2000. **А.М. Ковалев, А.Я. Савченко**

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА: ПРОШЛОЕ, НАСТОЯЩЕЕ, БУДУЩЕЕ

Статья написана по материалам Круглого стола "Динамика твердого тела: прошлое, настоящее, будущее", состоявшегося на международной конференции "Устойчивость, управление и динамика твердого тела" 8 сентября 1999 г. в г.Донецке. Приведены выступления участников дискуссии, дан анализ результатов и развития динамики твердого тела в 20 столетии и предложены приоритетные направления ее будущего развития.

Задача интегрирования уравнений Эйлера-Пуассона [55] занимает важное место в современной науке. Она относится к тем задачам, решение которых было и остается делом чести самых выдающихся ученых своего времени. Надежду и энтузиазм исследователей поддерживает решение время от времени какой-либо из этих знаменитых задач. Таким выдающимся событием последнего времени является доказательство теоремы Ферма [62]. Отметим, что немаловажным фактором этого успеха были упорство и массовость исследователей, организовавших даже собственное общество. Оценивая успехи, достигнутые в динамике твердого тела и применяемых в ней математических дисциплинах, можно утверждать, что близка к своему решению и задача Эйлера-Пуассона. Безусловно, для этого нужны соединение и координация усилий всех работающих в этой области специалистов. Эту цель и ставила перед собой Донецкая школа механики, организуя конференцию и Круглый стол. Этой же цели служит и данная статья.

Прежде, чем переходить к основному содержанию, приведем предмет нашего исследования - уравнения Эйлера-Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Укажем также случаи интегрируемости этих уравнений, принадлежащие Л. Эйлеру [55], Ж. Лагранжу [26] и С.В. Ковалевской [20]. Полученные классиками науки эти решения остаются образцом для всех последующих исследователей.

1. **Предварительная подготовка.** Традиционно на конференциях в Донецке основное внимание уделяется проблемам динамики систем твердых тел. Успешной работе

конференций способствуют авторитет организаторов и сложившийся коллектив участников, представляющих ведущие научные центры Советского Союза. Особенностью седьмой конференции были юбилейные мотивы: основателю и руководителю Донецкой школы механики члену-корреспонденту Национальной Академии Наук Украины Павлу Васильевичу Харламову исполнилось 75 лет. Конечно, его ученики не могли это не отметить, уделив основное внимание проблемам динамики твердого тела, выдающийся вклад в развитие которой внес П.В.Харламов. С учетом этого приглашались участники, была разработана программа, центральным местом которой был Круглый стол "Динамика твердого тела: прошлое, настоящее, будущее".

Целью Круглого стола было обсуждение и оценка наиболее значительных результатов по динамике твердого тела, полученных в 20 столетии, а также формулировка проблем, представляющих наибольший интерес и способствующих завершению решения задачи. Отдавая себе отчет в объемности и сложности поставленной задачи, организаторы решили увеличить время дискуссии за счет предварительной подготовки и последующей корректировки участниками как своих выступлений, так и настоящей статьи в целом, для чего вариант статьи рассылался всем участвующим в ней авторам. К началу конференции был опубликован доклад П.В.Харламова [44], отразивший его взгляд на динамику твердого тела в целом и содержащий возможные направления дальнейших исследований. Участникам конференции был предложен список вопросов, которые хотелось бы обсудить в дискуссии:

Круглый стол
"Динамика твердого тела: прошлое, настоящее, будущее"

1. **Исторический обзор**

а) Динамика твердого тела от Эйлера до наших дней.

б) Решение задачи о движении тела вокруг неподвижной точки: эволюция понятия за последние 240 лет.

2. **Интегрируемые системы**

а) Первые интегралы и инвариантные соотношения. Методы построения точных решений.

б) Гамильтонов формализм, скобки Пуассона, вполне интегрируемые системы в динамике твердого тела.

в) Алгебро-геометрические методы в динамике. Уравнения Лакса и явное интегрирование в θ-функциях Римана.

3. **Качественные методы**

а) Геометрическое описание движений. Методы визуализации.

б) Топология и механика. Топологическое описание вполне интегрируемых гамильтоновых систем в динамике твердого тела.

в) Теория устойчивости движений.

4. **Неинтегрируемость уравнений Эйлера-Пуассона**

а) Качественные эффекты, характеризующие неинтегрируемость.

б) Результаты компьютерного моделирования.

5. **Обобщенные уравнения Эйлера-Пуассона**

а) Гиростат, тело с жидкостью, физически различные силовые поля, уравнения Кирхгофа, уравнения Д. Гриоли и М.П. Харламова.

б) Обратные задачи.

6. **Динамика систем связанных твердых тел.**

7. **Приоритетные направления в динамике твердого тела.**

С целью выяснения пожеланий участников по проведению дискуссии была организована предварительная встреча, на которой помимо указанных выше вопросов обсуждалось и предложение Оргкомитета о возможности составления списка 10 лучших результатов, полученных в динамике твердого тела в 20 столетии, и их рейтинга участниками конференции. В результате обсуждения было решено проводить дискуссию в соответствии с составленным списком выступающих в пределах 10 минут на отдельное выступление. Открыть Круглый стол было предложено члену-корреспонденту НАН Украины П.В. Харламову и члену-корреспонденту РАН В.В. Белецкому, время выступления которых жестко не ограничивалось. Вел Круглый стол председатель Оргкомитета профессор А.М. Ковалев. Научному комитету было предложено отразить ход дискуссии и обобщить ее результаты в итоговой статье в Трудах конференции.

2. **Дискуссия.** Открыл Круглый стол П.В. Харламов, он остановился на достижениях и перспективах развития динамики твердого тела. Тексты остальных участников приведены в порядке их выступлений в дискуссии.

П.В. Харламов. Основной раздел теоретической механики - динамика твердого тела (ДТТ) почти целиком сформирован Эйлером. Он ввел все кинематические и динамические характеристики тела. Ему принадлежат не только динамические уравнения, но и обе формы кинематических (хотя одну из них называют уравнениями Пуассона). В их последующих обобщениях (Н.Е. Жуковский, Г.Р. Кирхгоф, В.А. Стеклов) - это система шести дифференциальных уравнений

$$R_1^\bullet = R_2\omega_3 - R_3\omega_2 \quad (123), \quad P_1^\bullet = (P_2+\lambda_2)\omega_3 - (P_3+\lambda_3)\omega_2 + (v_2-\mu_2)R_3 - (v_3-\mu_3)R_2,$$

$$\text{где}\ \ \omega_i = \partial T/\partial P_i, \quad v_i = \partial T/\partial R_i, \quad T = \frac{1}{2}(a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j) + c_{ij}P_iR_j$$

($a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \lambda_i, \mu_i$ – параметры, P_i, R_i – искомые функции времени). Известны три интеграла: $T - \mu_i R_i = h$, $(P_i + \lambda_i)R_i = k$, $R_iR_i = R^2$. Эти уравнения Кирхгофа-Стеклова и частные их случаи с момента появления неизменно оставались объектом математических исследований, направленных на построение точных решений. В дополнение к случаям интегрируемости с четвертым общим интегралом (случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова) получен набор решений с инвариантными соотношениями. И здесь необходимо выделить замечательные результаты С.А. Чаплыгина [48, с.110-311]. Он фактически впервые применял метод инвариантных соотношений. *Определение* понятия инвариантного соотношения позже дал А. Пуанкаре, а *метод*, как описание последовательности операций построения таких соотношений, был сформирован лишь в 1974 г. [42]. Продолжавшийся непрерывно со времен Эйлера поиск точных решений значительно увеличил их количество. Последние обзоры с достаточной полнотой информируют о современном состоянии этого раздела ДТТ [29,46] (см. также монографии [11,47,43]).

Но уже в период между публикациями Лагранжа и Ковалевской другое направление исследований указал Л. Пуансо [59]. Имея в виду результаты Даламбера, Эйлера и Лагранжа, он заметил, что во всех этих исследованиях нет ничего кроме вычислений. В лучшем случае, в результате более или менее длинных выкладок приходят к определению положения тела в указанный момент времени, но совсем не видят, каким образом тело приходит к этому положению. И образцом *визуализации* (представлением исследуемого процесса в форме, удобной для зрительного восприятия) математического решения задачи о движении тела по инерции явился результат Пуансо. Он показал, что в таком движении неизменно связанный с телом эллипсоид, закрепленный в центре, катится без скольжения по неподвижной плоскости. Тем самым Пуансо четко противопоставил чисто математический результат - найденное решение дифференциальных уравнений исследованию механика, который изучает объективно протекающее явление - движение тела и рассматривает математическое решение лишь как промежуточный этап такого исследования.

Построение *полного* решение задачи ДТТ визуализацией движения тела стало возможным и в общем случае лишь после того, как в 1964 г., в дополнение к уравнениям подвижного аксоида $\omega_i = \omega_i(t)$, были получены уравнения аксоида неподвижного: $\omega_\zeta = \omega_i \nu_i$, $\omega_\rho^2 = \omega_i \omega_i - \omega_\zeta^2$, $\omega_\rho^2 d\alpha = \nu_i^\bullet d\omega_i$. Позже были найдены уравнения аксоидов и в общем пространственном движении тела, созданы алгоритмы визуализации и программное обеспечение ее средствами компьютерной графики. С достаточной полнотой эти результаты описаны в монографии [43, с. 244-272]. Так был создан конструктивный метод построения полных решений задач ДТТ, придавший им исчерпывающую наглядность.

Появился новый критерий оценки математических решений и их представлений. Предпочтительной оказывалась форма, наиболее приспособленная для построения аксоидов, визуализации движения на мониторе. Уравнения подвижного и неподвижного аксоидов определяют в пространстве две линейчатые поверхности, соприкасающиеся по их общей образующей, которая в рассматриваемом положении является мгновенной винтовой осью движущегося тела. И для каждого момента времени по созданному алгоритму выводится на экран положение подвижного аксоида на неподвижном. Последовательными их изображениями воспроизводится движение тела. В требуемый момент времени этот показ может быть сопровожден появляющейся на экране информацией о числовых значениях величин, характеризующих изучаемое движение тела.

Сформулируем возможные направления дальнейших исследований:

1. Каждая задача ДТТ должна получить полное решение - визуализацию движения тела средствами компьютерной графики.

2. Математическое решение задачи (точное или приближенное) служит предварительным вспомогательным этапом для построения полного решения. Строго говоря, этот математический этап в прикладных разработках может оказаться и необязательным, так как необходимые для полного решения величины (компоненты угловой скорости тела и направляющие косинусы, устанавливающие взаимную ориентацию базисов) могут быть получены измерениями на движущемся объекте.

3. Большую теоретическую ценность представляет набор точных математических решений в различных классических задачах аналитической ДТТ. Критический анализ всех таких решений должен быть проведен с целью отбора тех из них, которые могут быть использованы для построения полных решений.

4. Обладающие большой памятью и быстродействием компьютеры последних поколений предоставили обширные возможности изучения движений в их наглядном пред-

ставлении. Они служат и строгим контролером теоретических выкладок. Многие погрешности в последних немедленно проявляются в наблюдаемой картине движения в виде невязок, несоответствий элементов аксоидов. С этих позиций очевидна необходимость критического анализа тех полных решений, построение которых основывалось лишь на качественных методах, и реализации их современными средствами компьютерной графики.

5. Следует продолжить и аналитические исследования по построению математических решений. Даже в классической задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой, где, казалось бы, поиски математических решений столкнулись с необходимостью анализа переопределенных систем условий, практически уже невыполнимых обычными средствами, появилась надежда (по крайней мере в рекламе компьютерных средств) выполнения такого анализа в будущем. В других задачах еще далеко не исчерпаны возможности использования конструктивного метода инвариантных соотношений [42].

6. Необходимо продолжить критический анализ публикаций, сообщавших об открытии новых точных решений классических задач ДТТ. Уже выявлено немало случаев, когда предлагавшиеся результаты оказывались либо не новыми, либо ошибочными. Следует преодолевать иногда возникавший психологический барьер негативного восприятия критики в науке, без которой она не может нормально развиваться.

Доклад П.В. Харламова сопровождали фильмы. Они созданы А.П. Харламовым на основе принадлежащих ему программ по алгоритму М.П. Харламова, реализующих визуализацию движения тела на экране монитора качением подвижного аксоида по неподвижному. Были показаны движения тела в случаях Бобылева - Стеклова, Докшевича, Стеклова и др. Показано движение гирошара Жуковского, движение по инерции тела, центр масс которого находится в центре неголономного сферического шарнира на неподвижном основании.

В.В. Белецкий. К классическим задачам динамики твердого тела относится задача о лунно-солнечной прецессии земной оси и задача о либрации Луны. Первая из них восходит к Эйлеру, вторая - к Дж.Д. Кассини. Задача о либрации Луны поставлена наблюдениями Дж.Д. Кассини, он сформулировал в 1693 году три эмпирических закона вращательного движения Луны. Эти законы долгое время не были обоснованы теоретически как следствие уравнений движения.

Эпоха космических полетов дала всплеск исследованиям вращательных движений небесных тел - применительно к искусственным небесным телам, но и с неизбежным развитием теории вращательных движений естественных небесных тел. В частности, была построена эволюционная теория вращательного движения небесного тела в сложных гравитационных полях (с применением к задаче лунно-солнечной прецессии Земли) и нелинейная теория [53,5] обобщенных законов Кассини как законов двоякорезонансного вращения небесного тела. В этих исследованиях использовались современные методы нелинейной механики: асимптотические методы, теория устойчивости по Ляпунову и орбитальной устойчивости, КАМ-теория, метод нормальных форм и др. В основе этих методов лежит регуляризация и (или) локализация объектов исследования.

Между тем появилось понимание глобального устройства фазового пространства динамических систем. Это устройство впервые понял, по-видимому, гениальный Анри Пуанкаре. Суть такова: фазовое пространство, вообще говоря, заполнено хаотическими фазовыми траекториями (так называемый "детерминированный хаос" [54]), а "регулярные" траектории взвешены "островами" в хаотическом море. Интегрируемые задачи динамики дают фазовое пространство, заполненное только регулярными траекториями, что, вообще говоря, не типично. Регулярности исследуются методами теории возмущений. Размеры областей регулярности зависят от параметров (в том числе малых параметров) нелинейно. Это иногда может вызвать "чудо малого параметра" [6], когда методы теории возмущений дают хорошие результаты и при не очень малых значениях "малого параметра".

Перспективы дальнейших исследований в динамике твердого тела видятся в изучении глобального устройства фазового пространства.

Изучение вращательного движения небесных тел обычно проводится в рамках "ограниченной постановки задачи", когда траектория центра масс тела не зависит от его вращательного движения. В этой постановке, например, "гантель" малой массы длины l, центр масс которой движется по неизменной круговой орбите радиуса R, может быть устойчиво расположена вдоль радиуса-вектора ("гравитационная система стабилизации") независимо от значений параметров l и R. В общей постановке задачи это не так. Необходимым и достаточным условием устойчивости является неравенство

$$\frac{l}{2R} < \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

При нарушении этого неравенства описанное стационарное движение - неустойчиво.

Г.В. Горр. Сегодня высказываются различные мнения по поводу наиболее крупных результатов, полученных в ДТТ в последние десятилетия. На мой взгляд, таким результатом является метод инвариантных соотношений построения точных решений уравнений динамики, который развил П.В. Харламов. Предложенные ранее А. Пуанкаре и Т. Леви-Чивита методы исследования инвариантных соотношений у системы

$$\dot{x}_j = X_j(x_1, x_2, ..., x_n), \;\; j = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

относились к тому случаю, когда инвариантное соотношение (или система инвариантных соотношений)

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{4}$$

обладало тем свойством, что все решения (3) удовлетворяют (4) не только в начальный момент времени, но и при всех значениях t. История развития ДТТ показывает, что для построения решений уравнений этой задачи подхода А. Пуанкаре и Т. Леви-Чивита недостаточно. Обратив на это внимание, П.В. Харламов наряду с (4) рассматривает последовательность производных

$$\varphi^{(i)}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} X_j(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi^{(i-1)}(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{5}$$

По определению П.В. Харламова [42], если многообразие

$$\sigma : \quad \varphi^{(i)}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \;\; i = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

не пусто, то оно называется инвариантным многообразием системы (3), а соотношение (4) - инвариантным соотношением (в (6) $\varphi^{(0)}(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$). Поскольку в методе А.Пуанкаре - Т.Леви-Чивита $i = 1$ (то есть первая производная от (4) в силу (3) равна нулю на (4)), то очевидно, что метод П.В. Харламова относится к более общему (и, конечно, важному) случаю, когда необходимо вычислять не только первую производную. Метод П.В. Харламова позволяет строить инвариантные соотношения различной аналитической природы. Свойства инвариантных соотношений определены П.В. Харламовым через понятие "слоя инвариантных соотношений": инвариантное соотношение (6) называют $l-1$-слойным (или $(l-1)$-го слоя), если последовательность (6) содержит l функционально независимых членов. К сожалению, многие авторы в своих исследованиях не придерживаются этого понятия, а иногда и совсем не оговаривают свойств инвариантного соотношения (4), что показывает несомненную сложность в применении метода инвариантных соотношений.

В связи со сказанным выше перспективы исследований в ДТТ, на мой взгляд, связаны с методом инвариантных соотношений. То, что этот метод представляется сложным, показывает пример. Пусть для системы

$$\dot{x} = x,\ \dot{y} = x^2 + z^2 - a^2,\ \dot{z} = -\frac{1}{z}(2x^2 + z^2 - a^2), \tag{7}$$

где a - параметр, ставится задача об исследовании условий существования инвариантного соотношения

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_0 = 0. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что (8) является инвариантным соотношением по отношению к (7), например, при $a_{11} = 0,\ a_{22} = 0,\ a_0 = 0$. При этом последовательность (6) такова:

$$\sigma:\ \varphi(x,y,z) = xy = 0,\ \varphi^{(1)}(x,y,z) = x(y + x^2 + z^2 - a^2) = 0,\ \varphi^{(2)}(x,y,z) = xy = 0... \tag{9}$$

Таким образом, инвариантное соотношение (8) порождает два инвариантных соотношения: $x = 0$ (нулевого слоя), $y = 0$ (первого слоя). Это значит, что слой инвариантного соотношения зависит не только от его параметров, но и от начальных данных. Поэтому перспектива более глубокого изучения и развития метода инвариантных соотношений очевидна.

Поскольку метод инвариантных соотношений тесно связан с качественной теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, перспективным является также более полное применение качественных методов указанной теории.

Многие задачи ДТТ на основе имеющихся первых интегралов уравнений движения могут быть описаны системой третьего порядка. Перспективным является исследование особых точек таких систем, изучение и классификация интегральных кривых в окрестности особых точек.

Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений с успехом могут применяться и в исследовании интегральных многообразий, которые отвечают окрестностям известных частных решений. Эффективным методом здесь, без сомнения, является первый метод А.М.Ляпунова.

Д.Д. Лещенко. Отмечу основные, на мой взгляд, достижения в исследовании возмущенных движений твердого тела относительно неподвижной точки под действием моментов сил различной физической природы. При исследовании эволюции возмущенного движения хорошие результаты дает применение метода усреднения [31].

Впервые методика усреднения была применена к исследованию возмущенных движений искусственного спутника Земли относительно центра масс в работах В.В.Белецкого [4] и Ф.Л. Черноусько [49]. В [4] рассматривался осесимметричный спутник, а в статье [49] построена процедура усреднения для спутника с произвольным трехосным эллипсоидом инерции, то есть по общему случаю Эйлера–Пуансо. Кроме того, в [49] проведено усреднение для трехосного спутника с близкими моментами инерции. В этих случаях движение спутника складывается из движения Эйлера–Пуансо вокруг кинетического момента и движения самого вектора кинетического момента.

Задачи динамики тел с полостями, содержащими жидкость, относятся к числу классических задач механики. Большой интерес к задачам о движении твердых тел с полостями, содержащими жидкость, снова возник в наше время в связи с развитием ракетной и космической техники. Подробное изложение результатов по динамике и устойчивости движения тела с полостями, содержащими жидкость, дано в книге Н.Н. Моисеева, В.В. Румянцева [32].

Задачи динамики твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, представляют значительно большие трудности, чем в случае идеальной жидкости. Важный вклад в решение задач внесла монография Ф.Л. Черноусько [50]. В ней показано, что решение задач динамики тела с вязкой жидкостью при некоторых предположениях разбивается на две части: гидродинамическую и динамическую, что позволяет существенно упростить исходную задачу.

Большое число статей отечественных и зарубежных авторов посвящено исследованию движения твердого тела с подвижными внутренними массами, с упругими и диссипативными элементами. В работах Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.С. Шамаева и др. рассмотрены некоторые случаи движения твердого тела, содержащего подвижные внутренние массы. Исследована общая задача динамики твердого тела, имеющего внутренние степени свободы, линейные упругие и диссипативные элементы. Изучено движение твердого тела, содержащего массу сплошной вязкоупругой среды. Рассмотрена асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами.

Важные результаты, связанные с применением методов гамильтоновой механики в динамике твердого тела, принадлежат В.Г. Демину и его ученикам. Эти методы позволяют записать в канонических переменных дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде, удобном для дальнейших исследований с помощью методов теории возмущений, подробно разработанных в небесной механике.

Проблема эволюции вращений твердого тела относительно неподвижной точки продолжает привлекать внимание исследователей. В прикладном аспекте анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач движения спутника с пассивной системой ориентации, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии и др.

В теоретическом аспекте эти задачи привлекают внимание специалистов в области теоретической механики. Они могут быть достаточно строго сформулированы в рамках динамических моделей твердого тела в случае Лагранжа, который является опорным. Уточнение исследуемых моделей проводится путем учета возмущающих факторов различной физической природы как внутренних, так и внешних, а также соответствующих предположений относительно порождающего решения. При этом хорошие результаты дает метод усреднения [31]. Краткий обзор работ, посвященных исследованию эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, приведен в [30]. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, изучались в работах Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько, А.С. Шамаева и др. Приведены условия возможности усреднений уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрено движение тела в среде с линейной диссипацией. Рассматриваются возмущенные быстрые вращения твердого тела, поэтому порождающим решением является не траектория движения в случае Лагранжа, а некоторое более простое решение. Вследствие этого с помощью метода усреднения удается получить явные аналитические решения. Уравнения возмущенного движения рассматриваются при различных наборах и предположениях относительно порядков малости величин возмущающих моментов. Получены и исследуются усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях.

А.М. Ковалев. Хочу привлечь внимание участников дискуссии к вопросу оценки наиболее значительных достижений в ДТТ в 20 столетии и отметить в этой связи три результата.

- Создание П.В. Харламовым метода годографов кинематического истолкования движения твердого тела [41], решающую роль в котором сыграли уравнения неподвижного годографа, а исходным моментом была геометрическая интерпретация Пуансо. Этот метод дал математический аппарат для исчерпывающего анализа движения тела, привел к новым постановкам и существенно оживил интерес к проблеме в целом. В настоящее время кинематическое истолкование является обязательным элементом исследования движения твердого тела.

- Решение Д. Гриоли [56]. Рассматривая историю задачи в целом, можно в качестве выдающихся результатов выделить в 18 веке: постановку задачи и решение Л. Эйлера, в 19 веке - решение С.В. Ковалевской. Но уже в конце прошлого века и начале этого была поставлена задача и достигнут значительный прогресс в отыскании частных решений, из которых можно выделить решения Гесса и Горячева-Чаплыгина. Однако к середине века деятельность в этом направлении замерла. Новый импульс был дан Д. Гриоли. Обнаруженное им решение обладает простотой и рядом замечательных свойств, в числе которых - явление прецессии вокруг наклонной оси.

- Решение задачи об устойчивости равномерных вращений. Равномерные вращения твердого тела, соответствующие особым точкам дифференциальных уравнений Эйлера-Пуассона, играют важную роль в анализе общего случая движения тела. Детальное их исследование выполнено О. Штауде [61]. Важную информацию дает изучение окрестности равномерных вращений, первым этапом которого является изучение их устойчивости. Благодаря усилиям многих ученых и применению самых современных методов, включая КАМ-теорию и метод функций Ляпунова, эту задачу можно считать завершенной. Значительный вклад в ее решение внес В.В. Румянцев, среди его многочисленных работ на эту тему отметим одну из первых его работ [35].

А.А. Илюхин. За последнее столетие в теоретической механике было несколько периодов, в течение которых отдавалось предпочтение различным проблемам механики. Однако проблема кинематического описания движения механической системы всегда оставалась одной из основных. В связи с этим возникло несколько способов определения ориентации системы и соответственно появлялись различные наборы параметров ориентации. Исследования движения искусственных спутников Земли породили определенные требования к уравнениям, определяющим параметры ориентации. Среди этих требований на одном из первых мест стояло требование о быстродействии алгоритмов. Как это нередко бывает, наибольший успех в кинематическом описании движения был достигнут не в решении практических задач. Была решена проблема, имеющая более чем вековую историю существования, суть которой состояла в реализации теоремы Пуансо о представлении движения твердого тела качением подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному. Трудность в реализации теоремы Пуансо состояла в том, что определение компонент вектора угловой скорости относительно неподвижного базиса было задачей, сопоставимой по трудности с исходной задачей интегрирования уравнений Эйлера-Пуассона. Совершенно блестящий результат П.В. Харламова - в 1964 году он вывел уравнения для неподвижного годографа [40], содержащие конечные соотношения и квадратуру. О таком решении проблемы кинематического описания движения, по-видимому, никто и не мечтал. С помощью этих уравнений было дано кинематическое истолкование движения для многих случаев интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона и их обобщений. То, что П.В. Харламов решил старую проблему, относящуюся к общему случаю углового движения тела, получил достаточно простые уравнения для компонент вектора угловой скорости, дает основание считать результат П.В. Харламова наиболее значительным и эффектным в текущем столетии.

Как уже отмечалось, этот результат был использован несколько односторонне лишь для наглядного представления движения. Хотя и были получены М.П. Харламовым [37] формулы для направляющих косинусов между подвижной и неподвижной системами координат, к сожалению, при решении практических задач ориентации эти результаты еще не нашли применения. Также следует сожалеть и о том, что в многочисленных учебниках по теоретической механике, вышедших после опубликования П.В. Харламовым уравнений неподвижного годографа, эти уравнения нигде не были приведены. В то же время считается необходимым приводить кинематические уравнения Эйлера и ряд других, которые практически невозможно использовать как в теоретических, так и прикладных исследованиях. Такое игнорирование уравнений П.В. Харламова остается непонятным. Но и одностороннее использование этих уравнений только для кинематического истолкования движения тела не добавило им популярности. Вот возможные направления применения уравнений П.В. Харламова. Во-первых, уже отмечались полученные М.П. Харламовым формулы для направляющих косинусов. Построение исследований задач ориентации, основанных на этих формулах, может оказаться задачей перспективной. Во-вторых, найденные классы движений в рамках кинематического истолкования движения могут стать базовыми в задачах стабилизации управления, а также при классификации движений в целом. Собственно, регулярная прецессия Гриоли и возникла из кинематического истолкования решения, носящего имя Гриоли.

И.Н. Гашененко. С изобретением телескопа наука достигла значительных успехов в изучении объектов космического пространства. Полученные здесь знания существенно опередили сегодняшние потребности. Но в практически важных задачах динамики твердого тела аналог телескопа создан лишь недавно: мощный арсенал средств компьютерного моделирования позволил исследователям заглянуть в многомерное фазовое пространство известных задач механики.

Теория интегрируемых гамильтоновых систем получила в последние годы существенное развитие: переосмыслены многие классические положения и создана удобная для приложений конкретизация гамильтоновой теории (С.П. Новиков [34] и др.), мощные методы топологического анализа применены к задачам механики в работах С. Смейла, Я.В. Татаринова, М.П. Харламова и др.[38] , "молекулярная" теория гамильтоновых систем и аналог теории Морса разработаны в работах А.Т. Фоменко и его учеников [7].

Многие интересные открытия еще ожидают нас на этом пути, если не ограничиваться изучением лишь классических случаев, а попытаться так же подробно описать структуру фазового пространства в окрестности интегрируемых случаев и изучить фазовую топологию всех тех случаев, которые на компьютерном дисплее выглядят как вполне интегрируемые.

Любое аналитическое изучение движения не может считаться достаточным, если оно не сопровождается качественным или геометрическим описанием. Я считаю, что метод годографов [41] перспективен в задачах динамики. Имея информацию об изменении одного лишь вектора угловой скорости в двух разных базисах (подвижном и неподвижном), можно методом годографов воссоздать геометрически полную и наглядную картину движения тела. Систематическое применение компьютерного моделирования и визуализации движений с последующим теоретическим обоснованием результатов позволит, по моему мнению, уже в ближайшие годы выявить ряд нетривиальных динамических эффектов, приведет к появлению новых физически важных постановок и приблизит нас к пониманию глобальных характеристик такой простой, но нерешаемой задачи о движении тела вокруг неподвижной точки.

Д.В. Лебедев. Область моих научных интересов и научных интересов моих коллег - навигация и управление подвижными объектами. При исследовании управляемых движений объектов, которые допускают схематизацию моделью твердого тела, эффективными в ряде случаев оказываются известные аналитические решения, отвечающие частным движениям твердого тела относительно неподвижной точки. Решения такого рода весьма удобны при исследовании точности численных алгоритмов определения параметров движения объектов управления, снабженных такой перспективной информационной системой, какой является бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС). Широкое распространение для этих целей получило коническое движение твердого тела - частный случай регулярной прецессии.

Весьма плодотворным оказалось привлечение параметров Родрига-Гамильтона для описания кинематики движения твердого тела вокруг центра масс. Если рассматривать эти параметры как компоненты кватерниона, то с единых позиций удается не только решать нелинейные задачи анализа и синтеза, возникающие при управлении ориентацией подвижных объектов, но и синтезировать высокоточные алгоритмы вычисления параметров их ориентации [8,27]. В задачах определения ориентации в БИНС разработаны специальные численные методы интегрирования кинематических уравнений, существенно превосходящие по эффективности стандартные методы (в том числе и методы Рунге-Кутта, десятый порядок которых занесен в Книгу рекордов Гиннеса). Здесь же следует обратить внимание на введение новых векторных параметров ориентации.

Использование формализма бикватернионов и аппарата винтового исчисления позволило объединить в единую структуру алгоритмы вычислений в БИНС всей совокупности "быстрых" переменных (параметров ориентации и кажущейся составляющей линейной скорости), перенеся в процедуру синтеза приемы, свойственные синтезу алгоритмов определения параметров ориентации [28].

Можно утверждать, что проблема алгоритмического обеспечения БИНС усилиями в основном киевских и московских ученых практически решена.

В связи с усложнением задач, решение которых возлагается на подвижные объекты с существенной нелинейностью моделей последних, несомненный теоретический интерес и важное практическое значение приобретают исследования, связанные с разработкой конструктивных критериев глобальной наблюдаемости и управляемости динамических объектов, с разработкой рекуррентных алгоритмов динамической фильтрации, обладающих "робастностью" и улучшенными свойствами сходимости.

Р.Г. Мухарлямов. Традиционно исследования по ДТТ с неподвижной точкой шли по трем основным направлениям:

1. Поиск интегралов уравнений движения.
2. Попытки найти общее решение уравнений движения.
3. Геометрическая интерпретация движений твердого тела.

Исследования по ДТТ постоянно стимулировали развитие математики, способствовали возникновению математических методов и направлений исследований. Об этом свидетельствует вся история классической математики и механики: работы по алгебре и анализу (специальные функции, кватернионы, качественная теория дифференциальных уравнений, топологические методы) и современные методы исследований: КАМ-теория, динамика хаотических систем, динамика неголономных систем.

Интегралы уравнений движения (первые интегралы и частные интегралы) представляют собой инвариантные соотношения. Существенным в этом направлении исследований является определение условий устойчивости интегральных многообразий, соответствующих частным интегралам или инвариантным соотношениям. Установление условий устойчивости позволило бы выделить области в фазовом пространстве с различными семействами траекторий и провести качественный анализ движений твердого тела. К сожалению, установление условий устойчивости далеко не всегда очевидно даже в известных классических случаях, как, например, в случаях Горячева-Чаплыгина и Гесса-Аппельрота. С другой стороны, знание даже всех первых интегралов системы уравнений движения не дает еще решение в явном виде. Определение закона движения сводится опять к составлению дифференциальных уравнений, необходимых в общем случае для построения приближенных, чаще всего разностных, схем, решения уравнений. Исходя из этого, наиболее интересными представляются поиски методов, направленных на установление связи между инвариантными соотношениями и геометрическими методами и решение обратных задач динамики - установление силовых полей, допускающих задаваемые инвариантными соотношениями свойства движения [43,41,9,33].

Попытки найти общее решение уравнений движения в общем случае безуспешны. Здесь можно было бы ограничиться перечислением случаев разрешимости этой задачи. Однако, и здесь трудно утверждать, на каком этапе следует полученное решение считать исчерпывающим. Если по аналитическим выражениям удается установить все свойства движения при различных значениях начальных условий, решение можно считать окончательным. Но большая размерность задачи ($n = 6$) эту проблему тоже позволяет решить только в отдельных случаях.

Численные методы решения не позволяют охватить всех возможных решений, поэтому не могут гарантировать достижения полной картины движений.

Геометрические методы привлекают наглядностью. Значение этих методов существенно возрастает в связи с невиданным темпом внедрения в практику научно-исследовательских работ вычислительной техники и соответствующих методов. Построение компьютерных моделей, отражающих свойства движений хотя бы определенных классов уравнений движения, соответствующих набору динамических показателей, представляется интересным для классификации движений [41].

Наиболее привлекательным было бы получить полную картину, представляющую свойства движения твердого тела по всем трем указанным направлениям. С этой точки зрения кажется целесообразным проведение классификации задач по возможным результатам:

1. Выделение тех случаев, когда решение задачи возможно по всем трем направлениям и указание всех известных полных решений.

2. Определение критериев, указывающих перспективные направления исследований (инвариантные соотношения, общее решение, геометрические методы).

3. Установление взаимосвязи между этими тремя направлениями и возможностей перехода от результатов, полученных в одном направлении, к суждению об остальных свойствах.

В.С. Сергеев. Достаточно подробно уже говорилось о результатах П.В. Харламова и его школы по методу отыскания инвариантных соотношений в динамике твердого тела, методу подвижного и неподвижного годографов и анализу найденных в последние годы новых случаях интегрируемости. Эти важные результаты внесли существенный вклад в современное состояние задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой.

Наряду со сказанным хотелось бы отметить также большое значение работ Ю.А. Архангельского по данной проблеме, относящихся к отысканию семейств периодических решений уравнений Эйлера-Пуассона быстро вращающегося тяжелого твердого тела методом малого параметра Пуанкаре. Эти периодические решения существуют для твердого тела с произвольным распределением масс и порождены медленной регулярной прецессией случая Лагранжа [2]. Данные результаты стимулировали дальнейшие исследования по определению других классов периодических решений. Анализ свойств отдельных движений (в частности, устойчивости), границ областей разных типов движений позволил прояснить до некоторой степени картину движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Однако становится все более ясно, что найденные уже общие и частные случаи интегрируемости, а также классы периодических и иных замечательных (но простейших) движений не более, чем исключительные островки в море общих "хаотических" движений твердого тела. В связи с этим вновь возник интерес к бурно развивавшейся в начале века проблеме несуществования полиномиальных, алгебраических и аналитических первых интегралов задачи, отличных от классических. На этом пути следует отметить результат по несуществованию нового алгебраического интеграла в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в ньютоновском поле сил [3].

Существенное продвижение в вопросе о несуществовании нового аналитического (по специальным каноническим переменным и переменным Эйлера-Пуассона) интеграла в классической задаче о вращении тяжелого твердого тела принадлежит В.В.Козлову [21] . Развив идеи А. Пуанкаре, реализованные им в задаче трех тел, В.В.Козлов доказал важную теорему о несуществовании нового аналитического первого интеграла для несимметричного твердого тела. В ходе доказательства общая задача была представлена как возмущение случая Эйлера-Пуансо в специальных канонических переменных (Андуайе-Деприя); были проанализированы основные препятствия к интегрируемости в возмущенной задаче: расщепление сепаратрис, разрушение инвариантных торов и рождение изолированных периодических решений из семейств таких решений на торах, ветвление решений на комплексной плоскости времени, топологические препятствия общего характера к интегрируемости гамильтоновых систем, связанные с родом поверхности, являющейся конфигурационным пространством системы. В.В. Козловым, С.Л. Зиглиным и др. рассмотрены также препятствия к интегрируемости в частных случаях движения твердого тела таких, как, например, быстрое вращение тела, случаи динамической симметрии, что дополняет основное исследование.

Последние результаты по топологии и интегрируемости гамильтоновых систем и уравнений вращения твердого тела нашли отражение в монографиях [11,43,41,38,3,21,1, 23,36]. Отметим, что анализ гамильтоновой структуры уравнений задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле притяжения нескольких гравитирующих центров позволил О.И. Богоявленскому установить интегрируемость уравнений в случае Бруна и осуществить их интегрирование в θ-функциях от двух аргументов. Применение методов групп Ли позволило ему также доказать интегрируемость в серии случаев для гравитационного потенциала задачи в виде степенного ряда и представить уравнения в форме Лиувилля.

Общая картина движения твердого тела с неподвижной точкой, как установил еще А.Пуанкаре, является весьма сложной, что связано с "хаотическим" перемешиванием траекторий, и требует проведения глобального анализа. Дальнейшее продвижение здесь существенно зависит от общего прогресса в теории гамильтоновых систем и прежде всего систем с двумя степенями свободы.

И.И. Косенко. Должен согласиться с большинством тезисов выступавших до меня участников Круглого стола. Из этого набора можно выделить стратифицированную систему проблем. На одном ее полюсе расположены специфические для ДТТ задачи, а на другом - общие методы исследования динамических систем. Все дело в уровне абстрагирования, на котором работает исследователь.

Из достижений последнего времени хотелось бы выделить методику кодирования структуры фазового пространства интегрируемых гамильтоновых систем при помощи неориентированных графов ("молекул"), развитую проф. А.Т. Фоменко и его учениками [7]. Вспомним, однако, что типичным является неинтегрируемый случай. Известно, что при этом фазовое пространство фрагментируется на области регулярности, "окруженные" областями хаотического поведения (детерминированный хаос) динамической системы.

Согласен с мнением проф. В.В. Белецкого об актуальности задачи исследования детерминированного хаоса. Известно, что огромную роль здесь играет вычислительный эксперимент. Не исключено, что со временем появятся методики (аналитические и численные) эффективного исследования динамических систем, как в интегрируемых, так и неинтегрируемых случаях.

С другой стороны упомянутой шкалы современные вычислительные средства позволяют эффективно визуализировать геометрическое представление твердотельного движения (качение аксоидов и аналогичные геометрические модели). На самом деле, подобные иллюстрации уже были "в голове" у Пуансо. Современные технические средства лишь позволяют показать эти образы "широким массам". По-видимому, актуальной задачей является поиск более изощренных методов визуализации динамики и кинематики твердого тела. Не исключено, что в основе этих методов должны лежать геометрические свойства конфигурационного пространства твердого тела - группы $SO(3) \cong \mathbb{R}\,\mathbb{P}^3$, как неориентируемого многообразия, вложенного в ориентируемое трехмерное пространство в виде поворотов $\mathbb{R}^3$ [15].

3. Анализ. Основываясь на выступлениях участников дискуссии, попытаемся сформулировать и прокомментировать проблемы, которые интересуют исследователей динамики твердого тела.

Интегрируемость. Начиная с момента опубликования Л.Эйлером уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, основное внимание было привлечено к проблеме получения общего решения этих уравнений. Достаточно быстро эта задача была сведена к вопросу отыскания одного интеграла, независимого с известными интегралами: энергии, момента и геометрического. Л.Эйлером и Ж.Л.Лагранжем такие интегралы получены для частных случаев. Далее прогресс в этом направлении замедлился, а внимание привлекла задача отыскания интегралов и решений определенной структуры. Выдающимся и достаточно быстрым успехом в этой задаче был результат С.В.Ковалевской. Однако дальнейшие, довольно продолжительные и обширные исследования привели к формированию тематики о неинтегрируемости гамильтоновых систем и уравнений Эйлера-Пуассона, в частности. В настоящее время преобладающим является мнение, что в общем случае уравнения Эйлера-Пуассона неинтегрируемы. За деталями постановок и доказательств этих весьма сложных задач и результатов обычно отправляют к работам В.В.Козлова и его последователей. Этот результат, безусловно, является этапным в истории ДТТ. Его принятие должно было бы существенно изменить тематику исследований, например, усилив интерес к хаотическим движениям, чего, однако, пока не наблюдается. Спокойствие, с которым он воспринимается специалистами, указывает на то, что процесс его осмысления и введения в практику динамики твердого тела все еще продолжается.

Одновременно с изучением вопросов неинтегрируемости большое внимание привлекали задачи качественного исследования интегрируемых гамильтоновых систем. Одной из основных качественных характеристик таких систем является структура ее лиувиллева слоения (т.е. структура разбиения фазового пространства системы на торы Лиувилля и критические интегральные поверхности). В 1985 г. А.Т. Фоменко предложил новый метод изучения этих структур, позволяющий получать топологические инварианты и классифицировать слоения на трехмерных изоэнергетических уровнях. Структура слоения описывается специальными объектами, названными молекулами. В работах А.Т.Фоменко и его школы с помощью молекул детально исследованы интегрируемые случаи ДТТ, в том числе и случай С.В.Ковалевской. Метод "молекулярной" классификации завоевывает все более широкое признание среди специалистов и в будущем может стать неотъемлемым элементом качественного анализа механических систем и движения систем твердых тел, в частности.

Частные решения. Успех С.В.Ковалевской вдохновил многих ученых на поиски новых случаев интегрируемости. Эти исследования, хотя и не достигли цели, привели к построению частных решений и созданию нового направления, связанного с исследованием инвариантных многообразий в ДТТ. Первым и, как оказалось, наиболее интересным было решение Гесса [57]. Затем в течение последнего десятилетия прошлого века и первого десятилетия нашего века была получена основная масса частных решений, после чего наступил перерыв до появления решения Д. Гриоли [56]. С этого момента интерес к построению частных решений не ослабевает до настоящего времени. Возможности построения решений существенно расширились благодаря созданному П.В.Харламовым методу инвариантных соотношений [42]. Задавая частное решение в форме некоторого соотношения между основными переменными, П.В. Харламов показывает, что для его инвариантности необходимо рассматривать еще и цепочку его производных в силу уравнений движения, причем только первые независимые соотношения этой цепочки. Привлечение известных интегралов движения и полуобратного метода привело к созданию конструктивного метода построения частных решений. Последовательное применение этого метода позволило П.В.Харламову и его ученикам значительно увеличить число точных решений и решить задачи о существовании решений определенной структуры. Важное значение для этих исследований имела введенная П.В.Харламовым специальная система координат и связанные с ней новые формы уравнений движения [41], а также полученное Е.И.Харламовой интегро - дифференциальное уравнение [47] ДТТ.

Отметим, что метод инвариантных соотношений нашел применение в задачах управления и привел к созданию метода ориентированных многообразий [58] решения задач управляемости и стабилизируемости нелинейных динамических систем. К последним разработкам этого метода относится получение уравнений инвариантных и ориентируемых многообразий в форме одного линейного уравнения в частных производных высокого порядка [18], что позволило установить связь между подходами Пуанкаре - Харламова и Леви-Чевита.

Геометрическая интерпретация движения. В 1964 г. П.В.Харламов опубликовал уравнения неподвижного годографа [40], которые содержали два конечных соотношения и одну квадратуру. Поразительная простота этих уравнений подчеркивает выдающееся значение этого результата для ДТТ, получить который ученые-механики пытались более ста лет, а встречаемые при этом трудности были сопоставимы с исходной задачей интегрирования уравнений Эйлера-Пуассона. Начало этим исследованиям положила прекрасная интерпретация Пуансо [59] движения твердого тела в случае Эйлера. В полной мере повторить этот результат удалось лишь Е.И.Харламовой [45] в задаче о движении тела в ньютоновском поле сил. Близок к цели был Н.Е.Жуковский [13], однако в его интерпретации качение осуществляется с проскальзываением. Но главным недостатком этих исследований было отсутствие общего подхода к интерпретации движения. П.В. Харламов, взяв за основу основную теорему кинематики твердого тела и получив уравнения неподвижного годографа, создал конструктивный метод кинематического истолкования движения твердого тела. Этот метод был с успехом применен к исследованию многих случаев интегрируемости, в том числе и таких сложных, как решения В. Гесса [16] и С.В. Ковалевской [12,10], привел к понятию полного решения [43], получил компьютерную реализацию, став центральным звеном в методе визуализации движения твердого тела [37], и, наконец, получил дальнейшее развитие в задачах пространственного движения тела [39].

Необходимо отметить еще одну сторону обсуждаемого результата. Поскольку знание неподвижного годографа дает возможность в каждый момент времени установить положение тела в неподвижном пространстве, введенные П.В.Харламовым величины $\omega_\rho, \omega_\zeta, \alpha$ можно считать новыми кинематическими параметрами.

Равномерные вращения и их устойчивость. В ДТТ полное исследование равномерных вращений выполнено О.Штауде [61]. Замечательная работа О. Штауде практически закрыла эту проблему, оказав ей тем самым плохую услугу, поскольку у специалистов по ДТТ интерес к дальнейшему изучению равномерных вращений пропал на многие годы. Однако эта задача привлекла внимание специалистов по теории устойчивости стационарных движений механических систем и сыграла важную роль в ее развитии. Задачи об устойчивости стационарных движений механических систем и об устойчивости равномерных вращений твердого тела тесно связаны, их взаимовлияние во многом определило их совместное развитие. Формирование этих задач связано с теоремой Рауса [60] и критерием Майевского [51]. Их систематическое исследование началось с появлением метода Четаева [52] и работы В.В. Румянцева [35], давших удобный математический аппарат и определивших направление исследований. В дальнейшем существенное влияние на эти задачи оказала КАМ-теория, которая привела к более широкому использованию методов гамильтоновой механики и усилению значения необходимых условий [19]. Использование идеи А.Н. Колмогорова [24] позволяет характеризовать области устойчивости в фазовом пространстве и пространстве параметров как области выполнения необходимых условий устойчивости, из которых могут быть исключены лишь некоторые подобласти меньшей размерности. На этом основании можно говорить о практическом завершении задач, для которых выполнено исследование необходимых условий устойчивости, что, действительно, сделано для многих задач ДТТ и ее обобщений. Современный этап характеризуется перемещением интереса из теории устойчивости в теорию аттракторов, хаос и другие современные направления теории динамических систем применительно к динамике твердого тела.

КАМ-теория. Влияние, которое оказала КАМ-теория на развитие науки в целом, позволяет утверждать, что она относится к выдающимся достижениям 20-го столетия. Конечно, она оставила заметный след и в ДТТ. Во-первых, это сказалось в существенном расширении применяемого математического арсенала, начиная с методов гамильтоновой механики и кончая самыми современными топологическими методами. Во-вторых, существенно расширился круг задач. Из решенных задач выделим задачу о быстрых вращениях твердого тела, сохранение интегралов движения, уже упомянутую задачу об устойчивости равномерных вращений... И вот тут-то при попытке перечисления всех результатов замечаем, что практически во всех современных исследованиях по ДТТ методы КАМ-теории в той или иной форме присутствуют. Они не только дают аппарат для решения задач, но и формируют новые подходы и постановки.

Использование компьютеров. С момента своего появления электронная вычислительная техника стала применяться в ДТТ для целей визуализации движения. Основываясь на уравнениях неподвижного годографа, ученые разработали алгоритмы и программы кинематического истолкования, которые были успешно применены к исследованию точных решений. Еще до появления персональных компьютеров были созданы фильмы, в наглядной форме демонстрировавшие движение тела в случаях В.А. Стеклова, С.А. Чаплыгина, С.В. Ковалевской. Для их создания авторам пришлось выполнить огромную техническую работу, связанную с построением рисунков. Ситуация существенно упростилась с появлением персональных компьютеров и мощного программного обеспечения. Существующие программы позволяют практически в режиме реального времени представлять на мониторе движение тела как для любого случая интегрируемости, так и по информации об угловой скорости и векторе вертикали, полученной численно или экспериментально.

В настоящее время широко используются графические возможности компьютеров и средства автоматизации аналитических вычислений для изучения вопросов интегрируемости, топологического анализа и классификации движений. Вместе с тем все более широкое распространение получают постановки задач, связанных с изучением свойств хаотичности движения. Именно на основании этих исследований сложилось понимание типичного глобального устройства фазового пространства динамических систем, как пространства, заполненного хаотическими фазовыми траекториями (так называемый "детерминированный хаос"), а регулярные траектории взвешены "островами в хаотическом море". Основные сложности этих задач вызваны тем, что движение многомерной системы необходимо каким-то образом отобразить на плоскость. Для этого используются интегралы движения, различные преобразования переменных, вводятся аналоги функций последования и др. Несмотря на значительные трудности, накапливаются соответствующие математические средства и результаты, которые могут сыграть ключевую роль в анализе общего случая движения твердого тела.

Приложения и смежные задачи. Среди многочисленных приложений ДТТ выделим теорию гироскопических систем и задачи управления системами твердых тел. Проблематика гироскопических систем достаточно полно отражена в обобщающей монографии А.Ю. Ишлинского [14] , в которой составляются и изучаются уравнения геометрических и кинематических задач ориентации подвижных объектов. Излагаются теоретические основы инерциальной навигации на земной сфере. Исследуется поведение сопутствующих устройств. Рассматриваются вопросы теории гироскопов и гироскопических приборов: свободных гироскопов, гиромаятников, гиростабилизаторов, гирорам, гирокомпасов, гироскопических ньютонометров и др. Исследования по управлению вращательным движением твердого тела в основном выполняются в интересах космической техники, которая является постоянным источником новых интересных постановок. Начав с управления с помощью реактивных двигателей, затем перешли к управлению с помощью гироскопов, и в настоящее время для целей управления используют также и гравитационное, электро-магнитное и другие силовые поля и различные физические эффекты. Благодаря этим работам, в круг аналитической механики вошли гиростат, двустепенной гироскоп (гиродин), системы твердых тел и другие объекты. Особо стоит отметить важное значение параметров Родрига-Гамильтона для алгоритмов управления. Однако широкого применения в теоретических исследованиях по ДТТ они пока не нашли, хотя уже получены различные формы динамических уравнений твердого тела [22,25] и гиростата [17] в параметрах Родрига-Гамильтона.

Продолжается исследование вращательного движения небесных тел. Замечательным по своей красоте и полноте является созданная В.В. Белецким нелинейная теория обобщенных законов Кассини вращательного движения Луны. В этих исследованиях использовались современные методы нелинейной механики: асимптотические методы, теория устойчивости по Ляпунову и орбитальной устойчивости, КАМ-теория, метод нормальных форм и др.

Приведенные выступления участников дискуссии и анализ дают достаточно полное представление о содержании и роли исследований, выполняемых в ДТТ.

4. Итоговые предложения. Дискуссия и обработка ее материалов привели к выводу, что выдвижение абсолютно лучшего результата по динамике твердого тела в 20 столетии и расположение остальных лучших результатов по местам - задача невыполнимая. Причиной этого является многоплановость исследований и отсутствие явно лидирующего результата. Поэтому приведем список наиболее значительных результатов, сыгравших ведущую роль в развитии ДТТ в 20 столетии.

Значительные достижения.

- Метод П.В.Харламова кинематического истолкования движения;
- Неинтегрируемость уравнений Эйлера-Пуассона;
- КАМ-теория: сохранение интегралов, быстрые вращения;
- Решение задачи об устойчивости равномерных вращений твердого тела;
- Топологическая классификация движений гамильтоновых систем на примере ДТТ;

- Теория В.В.Белецкого обобщенных законов Кассини;
- Решение Д.Гриоли.

Приоритетные направления. Практически единодушным является мнение, что основным направлением дальнейших исследований в ДТТ является глобальный анализ фазового пространства. Исходя из сложившейся структуры исследований, этот анализ целесообразно проводить по следующим трем направлениям:
- исследование свойств хаотичности движений;
- исследование свойств интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона;
- разработка аналитических и геометрических компьютерных методов анализа.

Доклад В.В.Белецкого "Прикладные задачи динамических биллиардов" убедительно показал эффектность исследований по хаотической динамике и продемонстрировал, что ее методы успешно применяются в небесной механике и космодинамике. Они позволяют не только в наглядной форме характеризовать глобальное поведение системы, но и изучать различные свойства отдельных траекторий, такие, как устойчивость периодических траекторий, эволюция хаотических траекторий; дают возможность получать новые интересные эффекты. Так оказывается, что при определенных условиях энергетически оптимальным способом перемещения двуногого аппарата по поверхности спутника планеты является не ходьба, а прыжки. Эти исследования носят систематический характер, основываются на уже разработанных постановках, приемах и технике, при широком применении компьютеров. В ДТТ решенных задач такого рода пока нет, хотя уже имеются компьютерные расчеты, демонстрирующие появление областей хаотичности и регулярности движения, что убедительно указывает на необходимость привлечения постановок и методов хаотической динамики. Весьма полезно было бы при этом использовать опыт, накопленный в небесной механике и космодинамике, как это уже было ранее при освоении в ДТТ методов КАМ-теории. Здесь важны как решение частных задач, так и разработка постановок общего характера, решение которых даст возможность получить представление о глобальном строении и свойствах фазового пространства для общего случая твердого тела.

В последние годы результаты, связанные с несуществованием четвертого дополнительного интеграла, привели к формированию мнения о неинтегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона и, как следствие, уменьшению работ по вопросам интегрируемости. Однако, эти результаты можно интерпретировать и как указывающие на то, что четвертый интеграл имеет сложную структуру, несмотря на простоту исходных дифференциальных уравнений. Такой взгляд не противоречит основным положениям теории дифференциальных уравнений. Ведь даже линейные системы с постоянными коэффициентами имеют неалгебраические и неаналитические (во всем пространстве) интегралы. Кроме того, и это часто отмечают авторы работ по неинтегрируемости, в окрестности обыкновенной точки всегда существует полный набор независимых интегралов. Из естественной постановки о продолжаемости интеграла из окрестности обыкновенной точки возникает вопрос о существовании и поведении интеграла в окрестности особой точки. Происходящие в окрестности множества особых точек перестройки, видимо, и являются причиной усложнения структуры фазового пространства. Особым точкам уравнений Эйлера-Пуассона соответствуют равномерные вращения. Возможно, в исследовании окрестности равномерных вращений и лежит ключ как к интегрированию уравнений, так и к пониманию глобальной структуры фазового пространства. Существенную помощь в этом анализе могут оказать известные частные решения, структура и геометрия которых уже достаточно хорошо известны. Несомненно, что изучение свойств четвертого дополнительного интеграла, получение частных решений и выяснение их роли относятся к наиболее приоритетным направлениям дальнейших исследований.

Большинство современных исследований по ДТТ существенно опираются на использование компьютеров. При этом успех в решении задачи во многом определяется тем, насколько удачно она была поставлена и насколько полно были использованы возможности компьютеров. Практически неограниченные вычислительные возможности компьютера, разнообразие и мощь его программного математического обеспечения существенно повысили требования к профессиональному уровню пользователей компьютеров при разработке компьютерных методов анализа, превратив ее в самостоятельную задачу. Вместе с тем разработанные методы должны обладать достаточной простотой, чтобы обеспечить возможность их широкого применения и привлечение новых исследователей к задачам ДТТ.

В последнее время все более усиливающееся значение приобретает еще один фактор: объединение усилий ученых с помощью системы Internet для оперативного решения задач. В этой связи делается следующее предложение:

Для координации исследований создать Internet группу по ДТТ на базе ИПММ НАН Украины. Начальным этапом является выставление данной статьи и материалов конференции ICSCD'99 на странице института в Internet и приглашение ученых к участию и формированию программы исследований. В дальнейшем, по мере выработки форм и методов работы, предполагается перейти к плановым исследованиям с регулярной информацией участников о результатах работы. Итак, приглашаем на страницу Института в Internet по адресу:

http://www.iamm.ac.donetsk.ua

Авторы благодарят всех участников дискуссии Круглого стола и, особенно, докладчиков, представивших тексты своих выступлений и высказавших свои замечания по статье.

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления.- Т.3. - М.: ВИНИТИ, 1985. - 304 с.
2. *Архангельский Ю.А.* Динамика быстровращающегося твердого тела. - М.: Наука, 1985. - 192 с.
3. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. - 328 с.
4. *Белецкий В.В.* Эволюция вращений динамически симметричного спутника // Космические исследования. - 1963. - **1**, N 3. - С.339-385.
5. *Белецкий В.В.* Движение спутника около центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд-во МГУ, 1975. - 308 с.
6. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. - М.: Наука, 1990. - 360 с.
7. *Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи мат. наук. - 1990. - **45**, вып.2. - С.49-77.
8. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. - М.: Наука, 1973. - 320 с.
9. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. - М.: Наука, 1986.- 224 с.
10. *Гашененко И.Н.* Подвижный годограф угловой скорости в решении С.В.Ковалевской // Механика твердого тела. - 1994. - Вып.26(I). - С.1-9.
11. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. - Киев: Наук. думка, 1978. - 296 с.

12. *Горр Г.В., Савченко А.Я.* Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В. Ковалевской // Механика твердого тела. - 1970. - Вып. 2. - С.66-73.
13. *Жуковский Н.Е.* Локсодромический маятник Гесса // Тр. отд-ния физ.наук о-ва любителей естествознания. - 1893. - **5**, вып.2. - С.37-45.
14. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. - М.: Наука, 1976. - 672 с.
15. *Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.* Математические аспекты кинематики твердого тела. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. - 249 с.
16. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1968. - **32**, вып.6. - С.1111-1118.
17. *Ковалев А.М.* Получение уравнений Гамильтона движения механических систем со связями на основе принципа максимума Понтрягина // Механика твердого тела. - 1986. - Вып.18. - С.67-73.
18. *Ковалев А.М.* Уравнения инвариантных и ориентированных многообразий динамических систем. // Докл. НАНУ. - 1998. - N 9. - С. 21-25
19. *Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикл. математика и механика. - 1975. - **39**, вып.4. - С.650-660.
20. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. - В кн.: Ковалевская С.В. Научные работы. - М.: Изд-во АН СССР, 1948. - С.153-220 (Классики науки).
21. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. - М.: Изд-во МГУ, 1980. - 230 с.
22. *Козлов В.В.* Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теорет. и прикл. механика. - 1982. - **8**. - С.59-65
23. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. - Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. - 429 с.
24. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. - 1954. - **98**, N 4. - С.527-530.
25. *Кошляков В.Н.* Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига-Гамильтона // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1983. - N 4. - С.16-25.
26. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. - М.; Л.: Гостехиздат, 1950. - Т.II. - 440 с.
27. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты. - Киев: Наук. думка, 1991 - 203 с.
28. *Лебедев Д.В.* К задаче вычисления параметров твердого тела. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1984. - N 1. - С. 170-172.
29. *Лесина М.Е., Кудряшова Л.В.* Новые постановки и решения задач динамики твердого тела. - Донецк: ДонГТУ, 1999. - 268 с.
30. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперименты. - 1998. - Вып. 2(6), с.32-37.
31. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. - Киев: Наук.думка, 1971.- 440 с.
32. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. - М.: Наука. 1965. - 439 с.
33. *Мухарлямов Р.Г.* Численное моделирование в задачах механики // Вестник РУДН. Прикл. математика и информ.- 1995. - N 1. - С. 13-28.
34. *Новиков С.П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. - 1982. - **37**, вып.5. - С.3-49.
35. *Румянцев В.В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикл. математика и механика. - 1956. - **20**, вып. 1. - С.51-66.
36. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. - М.: Факториал; Горки: Просперус, 1995. - 447 с.
37. *Харламов М.П.* О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. - 1981. - Вып.13. - С.10-14.
38. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. - 200 с.

39. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. - 1980. - Вып.12. - С.3-8.
40. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1964. - **28**, вып.3. - С.502-507.
41. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела // Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. - 221 с.
42. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. - 1974. - Вып.6. - С.15-24.
43. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки. - Киев: Наук. думка, 1995. - 407 с.
44. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Докл. на заседании Круглого стола VII Междунар. конф. "Устойчивость, управление и динамика твердого тела". - Донецк, 1999. - 13 с. / См. наст. сб. С.1-13.
45. *Харламова Е.И.* О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил // Изв. Сиб. отд. АН СССР. - 1959. - N 6. - С.7-17.
46. *Харламова Е.И.* Обзор точных решений задач о движении систем связанных твердых тел. - В кн.: Лесина М.Е. Задача о движении системы твердых тел. - Донецк: ДонГТУ, 1998. - 156 с.
47. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. - Киев: Наук.думка, 1986. - 292 с.
48. *Чаплыгин С.А.* Собр. соч.: В 4-х т. Т.1. Теоретическая механика. Математика.- М. - Л.: Гостехтеориздат, 1948. - 484 с.
49. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. - 1963. - **27**, вып. 3. - С.474-483.
50. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. - М.: ВЦ АН СССР, 1968. - 230 с.
51. *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // Прикл. математика и механика. - 1954. - **18**, вып.1. - С.123-124.
52. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. - М.: Гостехиздат, 1954. - 207 с.
53. *Beletskii V.V.* Resonance rotation of celestial bodies and Cassini's laws // Celestial Mechanics. - 1972. - **6**, No 3.
54. *Beletsky V.V., Pivovarov M.L., Starostin E.L.* Regular and Chaotic Motion in Applied Dynamics of a Rigid Body // - "Chaos". - 1996. - **6**, No 2. - P. 155-166.
55. *Euler L.* Dècouverte d'un nouveau principe de Mécanique // Histoire de l'Ac. Royale des sc. et belles lettres. - Berlin, 1750, 1752. - **6**. - P.185-217.
56. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimetrico // Ann. mat. pura ed appl. - 1947. - S.4, 26, F.3-4. - P.271-281.
57. *Hess W.* Über die Euleschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikülare Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. - 1890. - **37**, H.2. - S.153-181.
58. *Kharlamov P.V., Kovalev A.M.* Invariant relations method in multibody dynamics. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. - 1997. - **30**, No 6. - P. 3817-3828.
59. *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des cops // J.math pures et appl. - 1851. - **1**, N 16. - P. 289-336.
60. *Routh E.J.* A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. The advanced part. - London: Macmillan and Co., 1884. - 343 p.
61. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung einer schweren Korpers um einen festen Punkt // J. reine und agew . Math. - 1894. - **113**, H.4. - S.318-334.
62. *Wiles A.* Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem // Ann. Math.- 1995. - **141**. - P. 443-551.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 21.12.99