

## ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

PACS numbers: 02.70.Dh, 46.50.+a, 62.20.D-, 62.20.mm, 81.40.Jj, 81.40.Np

### Исследование влияния фактора анизотропии на закономерность изменения объёма в элементах микроструктуры

В. Ю. Марина, В. И. Марина\*

*Министерство просвещения Республики Молдова,  
пл. Великого Национального Собрания, 1,  
MD-2033 Кишинёв, Молдова*  
*\*Технический университет Молдовы,  
бульв. Штефан чел Маре, 168,  
MD-2004 Кишинёв, Молдова*

Исследованы закономерности флуктуаций шаровых тензоров напряжений в кристаллах с кубической решёткой в зависимости от их ориентации в однофазных поликристаллических материалах. Показано, что взаимодействия между кристаллами в конгломерате поликристалла приводят к возникновению локальных объёмных напряжений/деформаций даже при чистом макроскопическом сдвиге. Интервал изменения шаровых тензоров напряжений/деформаций сопоставим с макроскопическим модулем девиатора тензора напряжений/деформаций и зависит от коэффициента анизотропии кристаллов. На основе установленных закономерностей можно объяснить ряд экспериментально обнаруженных термомеханических эффектов, например, рассеяние энергии, которое связывают с понятием внутреннего трения. В рамках этой модели можно описать с единых позиций условия разрушения поликристаллических материалов при общего вида нагружении, используя на локальном уровне простейшие критерии прочности — наибольшее нормальное напряжение/деформацию.

---

Corresponding author: Vasiliu Iurievichi Marina  
E-mail: vasilmarina21@yahoo.com

*Ministry of Education of the Republic of Moldova,  
1 Velikogo Natsional' nogo Sobraniya Sqr., MD-2033 Kishinev, Moldova*  
*\*Technical University of Moldova,  
168 Shtefan chel Mare Blvd., MD-2004 Kishinev, Moldova*

Please cite this article as: V. Yu. Marina and V. I. Marina, Investigation of Influence of the Factor of Anisotropy on Regularity of Change of Volume in Microstructure Elements, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **39**, No. 3: 387–399 (2017) (in Russian), DOI: 10.15407/mfint.39.03.0387.

**Ключевые слова:** структура, тензор напряжений, деформация, анизотропия, монокристалл, поликристалл.

Досліджено закономірності флюктуацій кульових тензорів напружень у кристалах з кубічною ґратницею в залежності від їх орієнтації в однофазних полікристалічних матеріалах. Показано, що взаємодії між кристалами в конгломераті полікристалу приводять до виникнення локальних об'ємних напружень/деформацій навіть при чистому макроскопічному зсуві. Інтервал зміни кульових тензорів напружень/деформацій є співставним із макроскопічним модулем девіатора тензора напружень/деформацій і залежить від коефіцієнта анизотропії кристалів. На основі встановлених закономірностей можна пояснити ряд експериментально виявлених термомеханічних ефектів, наприклад, розсіяння енергії, яке пов'язується з поняттям внутрішнього тертя. В рамках цього моделю можна описати з єдиних позицій умови руйнування полікристалічних матеріалів при загальному вигляду навантаженні, використовуючи на локальному рівні найпростіші критерії міцності — найбільші нормальне напруження/деформацію.

**Ключові слова:** структура, тензор напружень, деформація, анизотропія, монокристал, полікристал.

The regularities of fluctuations of spherical stress tensors in cubic-lattice crystals are investigated depending on their orientation in polycrystalline single-phase materials. As shown, the interactions between the crystals in conglomerate of polycrystals lead to local bulk stresses/strains appearance even at pure macroscopic shear. The interval of changing spherical stress/strain tensors is comparable with macroscopic module of deviator of stresses/strains tensor and depends on anisotropy coefficient of crystals. Based on established laws, it is possible to explain some experimental thermomechanical effects, for example, energy dissipation, which is connected with concept of internal friction. According to this model, the conditions of destructions of polycrystalline materials can be described for general load using, at local level, simple strength criteria—maximal normal stress/strain.

**Key words:** structure, stress tensor, deformation, anisotropy, single crystal, polycrystals.

*(Получено 31 августа 2016 г.)*

## 1. ВСТУПЛЕНИЕ

Для выявления важных термомеханических эффектов, происходящих при деформировании поликристаллических материалов, необходимо учитывать неоднородный характер нагружения на уровне отдельных микроскопических элементов структуры. В опытах по деформированию тонкостенных трубчатых образцов обнаружена способность материала рассеивать механическую энергию даже при нагружении в упругой области. В литературе по исследо-

ванию механических свойств материалов предполагают, что это явление происходит в результате внутреннего трения. В данной работе покажем, что одной из причин появления подобных эффектов является хаотичное поле температур, возникающее вследствие флуктуаций изменения объёмных деформаций внутри макроскопически однородного элемента тела.

## 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

В многоэлементных моделях сплошных сред макроскопически однородный и изотропный элемент тела, который в начальный момент времени  $t$  находится в естественном ненапряжённом состоянии, а впоследствии подвергается действию внешних сил, представляется в виде конечного или бесконечного числа подэлементов, наделённых простейшими свойствами: упругостью, вязкопластичностью, упрочнением и разупрочнением. Несмотря на то, что подэлемент обладает только элементарными свойствами, в силу взаимодействия между ними их совокупность даёт возможность описать свойства запаздывания скалярных и тензорных свойств при сложном нагружении, дискретную механическую память при циклическом неизотермическом нагружении по прямолинейным траекториям, эффекты запаздывания, текучести и др.

Закономерности флуктуаций изменения объёма внутри макроскопически однородного элемента тела не описываются не только в рамках феноменологических теорий определяющих уравнений, но и в теориях, основанных на концепции непрерывного перехода материала из упругого состояния в неупругое. Элемент тела в этих теориях представляется в виде конечного или бесконечного числа подэлементов, имеющих различные термомеханические свойства и связанных между собой по определённой кинематической схеме. Как правило, кинематическая схема задаётся в предположении однородности деформаций [1] или напряжений [2]. И в одном и другом случае отсутствуют флуктуации шаровых компонент тензоров напряжения и деформации. Этот эффект не описывается и в рамках моделей учитывающих неоднородность деформирования и нагружения элементов структур [3, 4]. Так, Крёнер при рассмотрении влияния осреднённого взаимодействия между группами кристаллов основывался на решении Эшелби задачи о включении, и в результате получил кинематические уравнения связи, которые в случае однофазных поликристаллических материалов с кубической решёткой принимают следующий вид

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = 2d_2(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}), \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0, \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0, \quad (2)$$

$$b_2 = \frac{\mu}{2} \frac{9\lambda + 14\mu}{3\lambda + 8\mu}, \quad (3)$$

где  $\bar{\sigma}_{ij}$  и  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  — компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций в различных кристаллах (подэлементах),  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — макроскопические компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций соответственно,  $\bar{\sigma}_0\delta_{ij}$  и  $\bar{\varepsilon}_0\delta_{ij}$  — шаровые тензоры напряжений и деформаций в различных кристаллах,  $\sigma_0\delta_{ij}$  и  $\varepsilon_0\delta_{ij}$  — шаровые тензоры напряжений и деформаций на макроуровне,  $\mu$ ,  $\lambda$  — константы Ламе рассматриваемого поликристалла.

Как было показано в работах [5–7] соотношения (1), (2) не удовлетворяют первому закону термодинамики при любом значении  $d_2$  в интервале  $0 < d_2 < \infty$ ; нижний предел соответствует условию однородного напряжённого состояния, а верхний — однородного деформированного состояния. Тот факт, что в формулах (1)–(3) не фигурируют константы упругости монокристаллов, указывает на чистую феноменологичность принятых предположений.

Выгодно от других многоэлементных моделей, учитывающих неравномерность деформирования и нагружения на микроскопическом уровне, отличается структурная модель Марины, предложенная в работах [5–7]. В этих работах предложена кинематическая схема взаимодействия между подэлементами, которая согласуется с соотношениями Хилла [8]:

$$t_{ij} = \langle \bar{t}_{ij} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \bar{t}_{ij} dV, \quad d_{ij} = \langle \bar{d}_{ij} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \bar{d}_{ij} dV, \quad (4)$$

$$\langle \bar{t}_{ij} \bar{d}_{ij} \rangle = \langle \bar{t}_{nm} \rangle \langle \bar{d}_{nm} \rangle = t_{pq} d_{pq}, \quad (5)$$

где  $V_0$  — минимальный объём материала, который содержит достаточное для осреднённого описания количество структурных элементов.

На основе соотношений (4) и (5) в [9] было предложено выражение, которое содержит в себе предельные варианты  $\bar{t}_{ij} = t_{ij}$  (однородное напряжённое состояние) и  $\bar{d}_{ij} = d_{ij}$  (однородное деформированное состояние)

$$\langle (\bar{t}_{ij} - t_{ij})(\bar{d}_{ij} - d_{ij}) \rangle = 0. \quad (6)$$

Из опыта известно, что механизмы деформирования структурных элементов внутри конгломерата (объёма  $V_0$ ) приводят к процессу самосогласования (когерентности) процессов деформирования и нагружения. Положение о явлении самосогласования таких процессов учитывается на основе принципа осреднённых связей [9]:

взаимодействия между подэлементами в конгломерате формируются под влиянием лишь одних осреднённых связей.

Исходя из этого в работах [6, 9] был сделан вывод, что флуктуации напряжений являются функциями флуктуаций деформаций. Так же был принят постулат, согласно которому скалярное произведение между тензорами флуктуаций напряжений и деформаций равно нулю

$$(\bar{t}_{ij} - t_{ij})(\bar{d}_{ij} - d_{ij}) = 0. \quad (7)$$

Переходя в выражении (7) от тензоров напряжений и деформаций к девиаторным и шаровым составляющим

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}, \quad d_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij},$$

установим первое условие связи макро- и микросостояний, которое обеспечивает и выполнение первого закона термодинамики

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij}) + 3(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)(\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0) = 0. \quad (8)$$

Дополнительно к равенству (8) для флуктуаций девиаторных частей тензоров напряжений и деформаций было принято соотношение [6, 9]

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}), \quad (9)$$

где  $B$  — внутренний параметр содержащий информацию о микроскопических характеристиках подэлементов.

Уравнения (4), (5), (8), (9) не достаточны для определения зависимости между макроскопическими напряжениями и деформациями, если задано соотношение между микроскопическими напряжениями и деформациями. Для получения замкнутой системы уравнений необходимы дополнительные принципы, которые отражали бы и явления самосогласования процессов деформирования структурных элементов в конгломерате. Для расширения системы уравнений (4), (5), (8), (9) в работах [5–7] был предложен принцип экстремума несоответствия макроскопических мер с подходящими средними значениями микроскопических аналогов. Суть названного принципа заключается в следующем: из (4), (5) видно, что усреднения по объёму напряжений, деформаций и их произведений единственным образом зависят от данных на поверхности конгломерата. Однако не все макроскопические переменные обладают этим специфическим свойством. В частности, в [8] показано, что естественные макромеры пластической работы деформаций отличаются от усреднений по объёму своих микромер. Естественно, что

для анализа следует использовать переменные, для которых не требуются обращения к каким-либо частным определяющим законам. В работах [5–7, 9] в качестве таких переменных использованы девиаторные составляющие напряжений и деформаций. Легко показать, что

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle \neq \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle,$$

и несоответствие

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle - \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \Delta$$

зависит от кинематической схемы взаимодействия структурных элементов (подэлементов) в конгломерате. Так как в двух предельных вариантах  $\bar{t}_{ij} = \langle \bar{t}_{ij} \rangle$ ,  $\bar{d}_{ij} = \langle \bar{d}_{ij} \rangle$  несоответствие  $\Delta$  обращается в 0, то всегда существует некоторая промежуточная схема взаимодействия между подэлементами, для которой  $\Delta$  принимает экстремальное значение. Согласно принципу, сформулированному в работах [5–7, 9], во всех реальных взаимодействиях несоответствие  $\Delta$  принимает экстремальное значение

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle - \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \text{extremum}. \quad (10)$$

На основании системы уравнений (4), (5), (8)–(10) можно построить макроскопические определяющие уравнения, если известны зависимости между микронапряжениями и деформациями.

### 3. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ МАКРОСКОПИЧЕСКИМИ И МИКРОСКОПИЧЕСКИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ/ДЕФОРМАЦИЯМИ

Для поликристаллических материалов с кубической решёткой взаимосвязь между локальными девиаторными напряжениями и деформациями в упругой области в кристаллографической системе координат  $x'_i$  задаётся в виде

$$\bar{\sigma}'_{ij} = \begin{cases} (c_{11} - c_{12}) \bar{\varepsilon}'_{ij}, & i = j, \\ 2c_{44} \bar{\varepsilon}'_{ij}, & i \neq j, \end{cases} \quad (11)$$

где  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  — независимые упругие постоянные кубических монокристаллов. Если поликристаллическая среда макроскопически однородна, тогда взаимосвязь между макроскопическими девиаторными величинами определяется выражением

$$\sigma'_{ij} = 2G \varepsilon'_{ij}, \quad (12)$$

где  $G$  — макроскопический модуль сдвига.

Для шаровых переменных имеют место следующие равенства

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (13)$$

где  $K = c_{11} + 2c_{12}$  — объёмный модуль упругости поликристалла, который совпадает с измеренным объёмным модулем упругости монокристалла.

На основании (4), (5), (8)–(12) в работе [9] получены следующие формулы для внутреннего параметра  $B$  и макроскопического модуля сдвига  $G$

$$B = \sqrt{\frac{c_{44}(c_{11} - c_{12})[4c_{44} + 3(c_{11} - c_{12})]}{3c_{44} + c_{11} - c_{12}}} = 2c_{44}\sqrt{\frac{2A + 3}{A(3A + 2)}}, \quad (14)$$

$$G = \sqrt{\frac{c_{44}(c_{11} - c_{12})[3c_{44} + c_{11} - c_{12}]}{4c_{44} + 3(c_{11} - c_{12})}} = c_{44}\sqrt{\frac{3A + 2}{A(2A + 3)}}, \quad (15)$$

где  $A = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$  — фактор анизотропии монокристалла. Формулу (14) можно представить ещё в виде

$$G = \sqrt{G_V G_R}, \quad (16)$$

$$G_V = \frac{3c_{44} + c_{11} - c_{12}}{5}, \quad G_R = \frac{5c_{44}(c_{11} - c_{12})}{4c_{44} + 3(c_{11} - c_{12})}. \quad (17)$$

В формуле (16) через  $G_V$  обозначен модуль сдвига, полученный Фойгтом в 1928 г. [1] (в рамках приближения  $\bar{d}_{ij} = d_{ij}$ ), а через  $G_R$  обозначен модуль сдвига, полученный Рейсом [2] в 1929 г. (в рамках приближения  $\bar{t}_{ij} = t_{ij}$ ).

Таким образом, из принципа несоответствия мер следует, что макроскопический модуль сдвига равен среднегеометрическому значению модулей сдвига, полученных в двух предельных вариантах: однородное напряжённое состояние и однородное деформированное состояние.

Взаимосвязи между микроскопическими и макроскопическими напряжениями/деформациями имеют вид

$$\bar{\sigma}'_{ij}(A, \theta, \psi, \varphi, \sigma_{nm}) = \begin{cases} M1(A)\bar{a}_{in}(\theta, \psi, \varphi)\bar{a}_{jm}(\theta, \psi, \varphi)\sigma_{nm}, & i = j, \\ N1(A)\bar{a}_{in}(\theta, \psi, \varphi)\bar{a}_{jm}(\theta, \psi, \varphi)\sigma_{nm}, & i \neq j, \end{cases} \quad (18)$$

$$\bar{\varepsilon}'_{ij}(A, \theta, \psi, \varphi, \varepsilon_{nm}) = \begin{cases} M(A)\bar{a}_{in}(\theta, \psi, \varphi)\bar{a}_{jm}(\theta, \psi, \varphi)\varepsilon_{nm}, & i = j, \\ N(A)\bar{a}_{in}(\theta, \psi, \varphi)\bar{a}_{jm}(\theta, \psi, \varphi)\varepsilon_{nm}, & i \neq j, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$M1(A) = \frac{5(1+A)}{2+3A+\sqrt{A(2+3A)(3+2A)}}, \quad (20)$$

$$N1(A) = \frac{5(1+A)\sqrt{A}}{\sqrt{(2+3A)(3+2A)}+(2+3A)\sqrt{A}}, \quad (21)$$

$$M(A) = \frac{5(1+A)\sqrt{A}}{(2A+3)\sqrt{A}+\sqrt{(2+3A)(3+2A)}}, \quad (22)$$

$$N(A) = \frac{5(1+A)}{2A+3+\sqrt{A(2+3A)(3+2A)}}, \quad (23)$$

$$[a_{ij}(\theta, \psi, \varphi)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Величины  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  являются углами Эйлера, при помощи которых определяется ориентация кристаллографической системы координат монокристаллов относительно глобальной системы координат.

На основе формулы (18) устанавливается взаимосвязь между компонентами девиаторов локальных и макроскопических напряжений, а при помощи формулы (19) между компонентами девиаторов локальных и макроскопических деформаций.

Отметим, что в случаях обратимых процессов деформирования в уравнениях связи микро- и макросостояний (18), (19) фигурируют функции (20)–(23), которые выражаются через углы Эйлера ( $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ ) и только один структурный параметр — фактор анизотропии  $A$ . На рисунке 1 представлены графики зависимости материальных функций  $M1(A)$ ,  $N1(A)$ ,  $M(A)$ ,  $N(A)$ .

Из графиков видно, что функции  $M1(A)$ ,  $N(A)$  монотонно убывают, а функции  $N1(A)$ ,  $M(A)$  монотонно возрастают, причём,  $M1(A)$  более чувствительна к увеличению параметра анизотропии  $A$ , чем функция  $N1(A)$ .

На основе (8), (9), (11)–(15) получим следующие выражения для вариаций компоненты шарового тензора напряжений:

$$|\bar{\sigma}_0 - \sigma_0| = \sqrt{\frac{(c_{11} + 2c_{12})}{3} \sqrt{\frac{3c_{44} + c_{11} - c_{12}}{c_{44}(c_{11} - c_{12})[4c_{44} + 3(c_{11} - c_{12})]}} (\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})}.$$

Заметим, что при помощи этой формулы флуктуации шаровых тензоров напряжений в кристаллах определяются только с точностью до знака.

Заслуживает внимания выражение



$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 + \beta \sqrt{\frac{(c_{11} + 2c_{12})}{3}} \sqrt{\frac{3c_{44} + c_{11} - c_{12}}{c_{44}(c_{11} - c_{12})[4c_{44} + 3(c_{11} - c_{12})]}} (\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}), \quad (25)$$

где

$$\beta = \begin{cases} (-1)^n, & \text{если } \bar{\sigma} \leq \sigma, \\ (-1)^{n+1}, & \text{если } \bar{\sigma} > \sigma. \end{cases}$$

Допустимы два варианта:  $n$  — чётное число или нечётное число.

Отметим, что в формуле (25) выражение  $(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})$  не зависит от ориентации кристаллографической системы координат, поэтому

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}) = (\bar{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij})(\bar{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij}), \quad (26)$$

$$\sigma'_{ij}(\theta, \psi, \varphi) = a_{in}(\theta, \psi, \varphi) a_{jm}(\theta, \psi, \varphi) \sigma_{nm}. \quad (27)$$

Таким образом, с помощью выражений (18)–(23), (25) можно с точностью до знака коэффициента  $\beta$  определить закономерность изменения локальных объёмных напряжений  $\bar{\sigma}_0$ /деформаций  $\bar{\varepsilon}_0$ , если известны компоненты тензора напряжений/деформаций, упругие константы монокристалла  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  в зависимости от ориентации кристаллографической системы координат.

На рисунке 2 представлены графики зависимости вариаций шарового тензора напряжений (в МПа) при двух фиксированных значениях углов  $\varphi$ ,  $\theta$ . Из данной зависимости видно, что по абсолютной

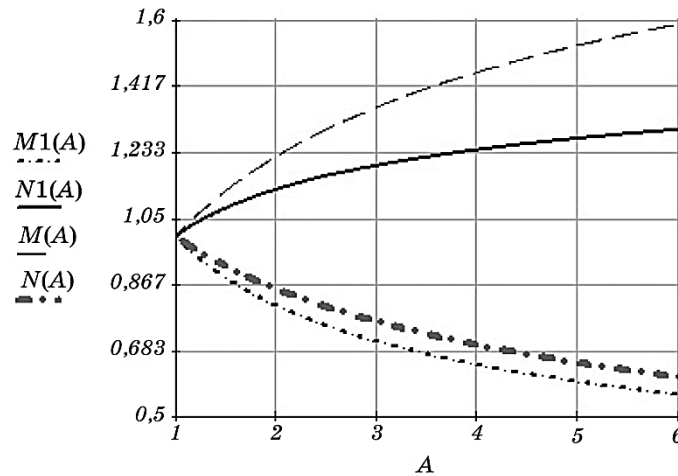


Рис. 1. Зависимость функций  $M1$ ,  $N1$  от фактора анизотропии  $A$ .

Fig. 1. Dependence of the functions  $M1$ ,  $N1$  on the factor of anisotropy  $A$ .

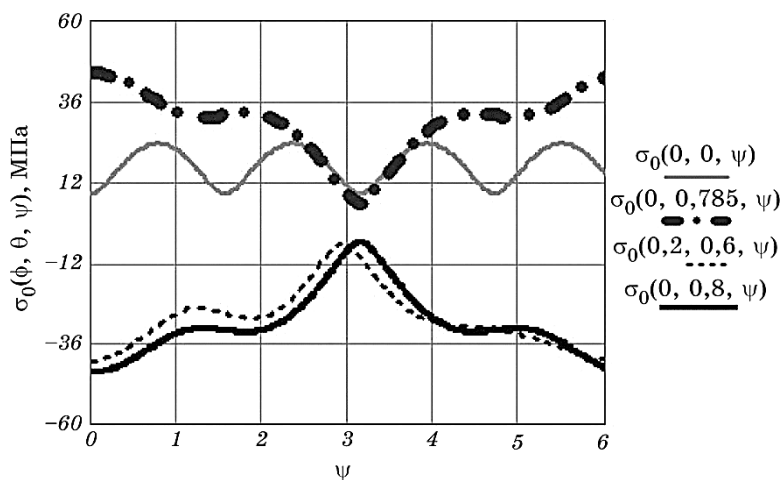
величине шаровая компонента напряжений изменяется в пределах  $|\sigma_0| \in (1,968 - 0,244)\sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ . Расчёты проводились для трёх видов материалов по данным, опубликованным в работе [10] ( $\text{CuF}_2$ :  $c_{11} = 16,4$ ,  $c_{12} = 5,3$ ,  $c_{44} = 3,37 \cdot 10^4$  МПа;  $\text{Cu}$ :  $c_{11} = 16,84$ ,  $c_{12} = 12,14$ ,  $c_{44} = 7,54 \cdot 10^4$  МПа;  $\text{ZnSe}$ :  $c_{11} = 8,10$ ,  $c_{12} = 4,88$ ,  $c_{44} = 4,41 \cdot 10^4$  МПа), в случае чистого макроскопического сдвига со значением модуля девиатора тензора напряжений равным  $\sigma = 50$  МПа. В качестве иллюстрации представлены графики для  $\text{ZnSe}$ , построенные при чётном значении  $n$  для трёх фиксированных значений углов  $\varphi, \theta$ .

На рисунке 3 представлены закономерности изменения абсолютного значения компоненты шарового тензора при одном фиксированном значении угла Эйлера  $\varphi = \pi/8$  в декартовой системе координат. Расчёты проводились для того же макроскопического напряжённого состояния — чистый сдвиг с модулем девиатора напряжений  $\sigma = 50$  МПа.

Из графика видно, что элементы симметрии кристаллической решётки приводят к появлению периодических экстремумов. При этом отметим, что по абсолютной величине встречаются три вида экстремумов.

Закономерность вариаций шаровых тензоров напряжений в кристаллах в сферической системе координат представлена на рис. 4.

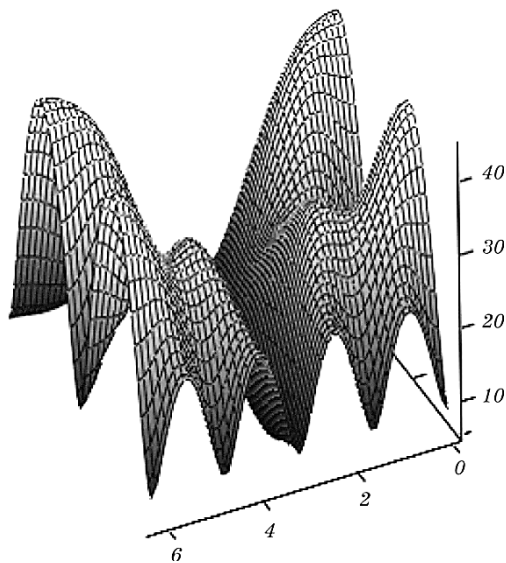
Из данного рисунка более наглядно видна периодичность вариаций функций  $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\theta, \psi, \varphi)$  в зависимости от ориентации кристал-



**Рис. 2.** Закономерность изменения шарового тензора в зависимости от ориентации кристаллов при двух фиксированных значениях углов Эйлера.

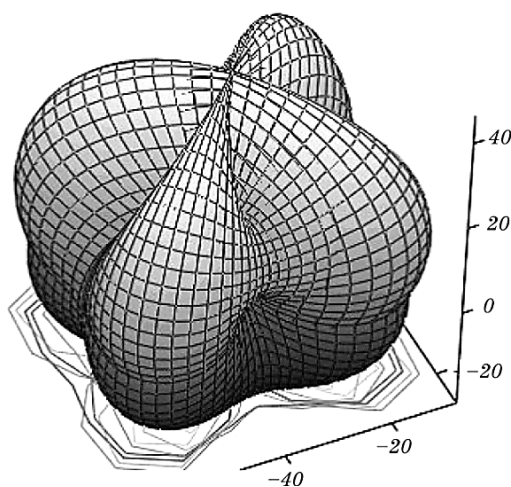
**Fig. 2.** The pattern of change in spherical tensor depending on the orientation of the crystals with two fixed values of Euler angles.

логарфической системы координат.



**Рис. 3.** Закономерность изменения шарового тензора в зависимости от ориентации кристаллов при одном фиксированном значении угла Эйлера.

**Fig. 3.** The pattern of change in spherical tensor depending on the orientation of the crystals at one fixed value of the Euler angle.



**Рис. 4.** Закономерность изменения шарового тензора в сферической системе координат.

**Fig. 4.** The pattern of change in spherical tensor in spherical coordinates.

#### 4. ВЫВОДЫ

1. Исследованы закономерности взаимодействия зёрен в поликристаллических материалах с кубической кристаллической решёткой.
2. Показано, что в сложной схеме взаимодействия между зёрнами появляется неоднородное поле объёмной деформации, в результате которой даже при чистом макроскопическом сдвиге на локальном уровне шаровые тензоры напряжений/деформаций не равны нулю. Следовательно, при любом внешнем взаимодействии в поликристаллических материалах появляется неоднородное поле температуры, которое можно рассматривать как дополнительный источник рассеивания энергии. В рамках данной модели в системе зёрен существуют кристаллы, в которых наибольшее нормальное напряжение больше нуля даже при таком виде нагружения как чистое сжатие.
3. Проведены численные исследования закономерности изменения полей шаровых тензоров напряжений/деформаций для трёх поликристаллических материалов.
4. Показано, что пределы изменения шаровых компонент сильно зависят от коэффициента анизотропии кристаллов. Для коэффициента анизотропии  $A = 3,21$  максимальные изменения шаровых компонент имеют тот же порядок что и модуль макроскопического девиатора тензора напряжений/деформаций.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik* (Berlin: Teubner: 1928).
2. A. Reuss, *Z. Angew. Math. und Mech.*, **9**, No. 1: 49 (1929).
3. В. В. Новожилов, Ю. И. Кадашевич, *Микронапряжения в конструкционных материалах* (Ленинград: Машиностроение: 1990).
4. E. Kroner, *Zeitschrift für Physik*, **151**: 504 (1958).
5. В. Ю. Марина, *Многоэлементная модель среды, описывающая переменные сложные неизотермические процессы нагружения* (Автореферат дисс. ... д-ра физ.-мат. наук) (Киев: Институт механики АН Украины: 1991).
6. В. Ю. Марина, *Прикладная механика*, № 6: 9 (1997).
7. V. Marina, *Metallurgy and New Materials Researches*, **11**, No. 3: 50 (1994).
8. З. Хилл, *Прикладная математика и механика*, **35**, вып. 1: 31 (1971).
9. В. Ю. Марина, *Известия Академии наук Республики Молдова. Математика*, № 2: 16 (1998).
10. М. Онами, С. Ивасимудзу, К. Гэнка, *Введение в микромеханику* (Москва: Металлургия: 1987).

#### REFERENCES

1. W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik* (Berlin: Teubner: 1928).
2. A. Reuss, *Z. Angew. Math. und Mech.*, **9**, No. 1: 49 (1929).

3. V. V. Novozhilov and Yu. I. Kadashevich, *Mikronapryazheniya v Konstruktsionnykh Materialakh* [Microstresses in Constructional Materials] (Leningrad: Mashinostroenie: 1990) (in Russian).
4. E. Kroner, *Zeitschrift für Physik*, **151**: 504 (1958).
5. V. I. Marina, *Mnogoelementnaya Model' Sredy, Opisyyvayushchaya Peremennye Slozhnye Neizotermicheskie Protssesy Nagruzheniya* [A Multi-Element Model of the Medium Described Variable Complex Non-Isothermal Loading Processes] (Thesis of Dissert. ... for Dr. Phys.-Math. Sci.) (Kyiv: Institute of Mechanics, N.A.S. of Ukraine: 1991) (in Russian).
6. V. I. Marina, *Prikladnaya Mekhanika*, No. 6: 9 (1997) (in Russian).
7. V. Marina, *Metallurgy and New Materials Researches*, **11**, No. 3: 50 (1994).
8. Z. Khill, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, **35**, Iss. 1: 31 (1971) (in Russian).
9. V. I. Marina, *Izvestiya Akademii Nauk Respubliki Moldova. Matematika*, No. 2: 16 (1998) (in Russian).
10. M. Onami, S. Ivasimudzu, and K. Genka, *Vvedenie v Mikromekhaniku* [Introduction to Micromechanics] (Moscow: Metallurgiya: 1987) (in Russian).