

## Алгоритм оценки спектра мощности межпланетных мерцаний

И. С. Фалькович, Н. Н. Калиниченко

*Радиоастрономический институт НАН Украины,  
Украина, 61002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4  
E-mail: falk@ira.kharkov.ua, kalinich@ira.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 8 мая 2002 г.*

Предлагается модификация классического коррелограммного алгоритма спектрального оценивания применительно к задаче исследования мерцаний космических радиоисточников на неоднородностях межпланетной плазмы. Рассматриваемый метод построения степенного спектра мерцаний основан на линейной интерполяции ординат корреляционной функции мерцаний и позволяет анализировать спектр мощности в более широкой полосе частот при более низкой частоте дискретизации флуктуаций интенсивности.

Пропонується модифікація класичного корелограмного алгоритму спектрального оцінювання стосовно задачі дослідження мерехтінь космічних радіо джерел на неоднорідностях міжпланетної плазми. Метод побудови степенного спектру мерехтінь, який пропонують автори, базується на лінійній інтерполяції ординат кореляційної функції мерехтінь і дозволяє аналізувати спектр потужності в більш широкій смузі частот при більш низькій частоті дискретизації флуктуацій інтенсивності.

### Введение

Вопрос о форме пространственного энергетического спектра турбулентности межпланетной плазмы активно дискутируется последние 25 лет. В литературе предлагались две альтернативные формы спектра: гауссов спектр с характерным масштабом 100 км на расстоянии порядка 1 а. е. и степенной спектр неоднородностей в широкой области масштабов. Анализ формы временного энергетического спектра мерцаний на частотах выше 86 МГц [1] позволил сделать выбор в пользу второй модели. Однако экспериментальных данных на более низких частотах (в частности полученных с использованием радиотелескопа УТР-2) явно недостаточно.

Один из методов оценки пространственного спектра турбулентности межпланетной плазмы по радиоастрономическим данным

основан на измерении энергетического спектра мерцаний  $G(f)$  [2]. В классических методах спектрального оценивания [3] используется алгоритм быстрого преобразования Фурье, поэтому они оказываются наиболее эффективными с точки зрения времени счета. Все эти методы, как теоретически доказано [3], обладают сопоставимыми статистическими характеристиками и в целом выглядят примерно одинаково.

Наиболее распространенными являются два классических метода оценки спектра мощности сигнала: периодограммный и коррелограммный. Периодограммный метод основан на формировании оценки  $\hat{G}_p(f) = |F(f)|^2 / T$ , где  $F(f) = \mathfrak{F}\{U(t)\}$  – преобразование Фурье процесса флуктуаций интенсивности сигнала  $U(t)$ ,  $T$  – длительность исследуемой реализации. В часто использу-

емой периодограмме Уэлша [4] спектр мощности оценивается методом взвешенного среднего с перекрывающимися сегментами данных. Исходную реализацию разбивают на  $P$  сегментов, при их 50 % сдвиге во времени получают еще  $P-1$  сегмент. Каждый сегмент умножается на временное окно, а затем периодограммы полученных таким образом  $2P-1$  сегментов усредняются. В коррелограммном методе Блэкмана-Тьюки [5] для вычисления оценки корреляционной функции  $\hat{R}(\tau)$  используется вся реализация длительностью  $T$  без временного окна, но с применением корреляционного окна  $W(\tau)$ , ширина которого  $\tau_{\max} \ll T$ . Последнее неравенство позволяет получить сглаженную оценку выборочного спектра мощности  $\hat{G}_c(f) = \mathfrak{F}\{W(\tau)\hat{R}(\tau)\}$ .

В упомянутых методах спектрального оценивания используется алгоритм дискретного преобразования Фурье (ДПФ), приводящий к повторению спектров с периодом, определяемым частотой дискретизации  $F$  исследуемого процесса  $U(t)$ . Как следствие, результат расчета спектра мощности в окрестности и выше частоты Найквиста  $F/2$  искажен эффектом наложения спектров. Поэтому при спектральном анализе в широкой полосе частот приходится увеличивать частоту дискретизации, добиваясь минимальных искажений спектра на высоких частотах. Предметом дальнейшего рассмотрения является получение модифицированного алгоритма спектрального оценивания, в котором эффект наложения заметно ослаблен, а частота дискретизации  $F$  может быть выбрана достаточно низкой.

**Модифицированный алгоритм ДПФ  
в классическом методе  
спектрального оценивания**

В коррелограммном методе спектральная плотность мощности  $G(\omega)$  определяется преобразованием Фурье корреляционной функции  $R(\tau)$ . Пользуясь четностью последней

и опуская множитель 2, запишем выражение для  $G(\omega)$  в следующем виде:

$$G(\omega) = \int_0^{\tau_{\max}} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \cong \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \hat{R}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \hat{G}(\omega), \quad (1)$$

$$\hat{R}(\tau) = R_{k+1} + (R_k - R_{k+1}) \left( k + 1 - \frac{\tau}{h} \right).$$

Здесь  $\omega = 2\pi f$ ,  $R_k = R(kh)$ ,  $h = 1/F = \tau_{\max}/N$ , а оценка спектра  $\hat{G}(\omega)$  получена заменой функции  $R(\tau)$  ее оценкой  $\hat{R}(\tau)$ , являющейся результатом линейной интерполяции дискретных значений  $R(kh)$ . Выражение (1) справедливо для интервалов наблюдения от нескольких секунд до нескольких минут, когда мерцания в декаметровом диапазоне можно считать стационарным процессом, для которого корреляционная функция является четной.

Выполнив интегрирование в (1), получим:

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ R_{k+1} \sin(k+1)\omega h - R_{k+1} \sin(k+1)\omega h - R_k \sin k\omega h - (R_k - R_{k+1}) \frac{\cos(k+1)\omega h - \cos k\omega h}{\omega h} \right].$$

Перейдем к дискретным значениям частоты  $\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi n/\tau_{\max}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$\hat{G}(f_n) = \hat{G}_n = \frac{\tau_{\max}}{2\pi n} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ R_{k+1} \sin 2\pi \frac{n(k+1)}{N} - R_k \sin 2\pi \frac{nk}{N} \right] + \frac{\tau_{\max}}{2\pi n} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{R_{k+1} - R_k}{2\pi n/N} \left[ \cos 2\pi \frac{n(k+1)}{N} - \cos 2\pi \frac{nk}{N} \right]. \quad (2)$$

Легко показать, что первая сумма в (2) равна нулю, поэтому

$$\hat{G}_n = h \left( \frac{N}{2\pi n} \right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} (R_{k+1} - R_k) \times \left[ \cos 2\pi \frac{n(k+1)}{N} - \cos 2\pi \frac{nk}{N} \right]. \quad (3)$$

Выразим  $\hat{G}_n$  через стандартную форму дискретного преобразования Фурье  $S = \sum_{k=0}^{N-1} R_k e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$ . С учетом  $\sum_{k=0}^{N-1} R_{k+1} e^{-i\frac{2\pi n(k+1)}{N}} = S + R_N - R_0 \equiv S_0$ , выражение (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \hat{G}_n &= \frac{h}{(2\pi n/N)^2} \left[ \operatorname{Re} S_0 - \operatorname{Re} \left( S_0 e^{i2\pi \frac{n}{N}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Re} \left( S e^{-i2\pi \frac{n}{N}} \right) + \operatorname{Re} S \right] = \frac{h}{(2\pi n/N)^2} \left[ \operatorname{Re} S + R_N - \right. \\ &\quad \left. - R_0 - \cos 2\pi \frac{n}{N} (\operatorname{Re} S + R_N - R_0) + \sin 2\pi \frac{n}{N} \operatorname{Im} S - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Re} \left( S e^{-i2\pi \frac{n}{N}} \right) + \operatorname{Re} S \right] = h \frac{\sin \frac{2\pi n}{N}}{(\pi n/N)^2} \times \\ &\quad \times \left( \operatorname{Re} S + \frac{R_N - R_0}{2} \right) = h \operatorname{sinc}^2 \frac{2\pi n}{N} \left( \operatorname{Re} S + \frac{R_N - R_0}{2} \right), \end{aligned}$$

где  $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$ . Величина  $R_N = R(\tau_{\max}) \ll R_0 = R(0)$ , поэтому  $R_N - R_0 \approx -R_0$ , тем более, что обычно используемые корреляционные окна  $W(\tau)$  резко уменьшают взвешенное значение  $R_N W_N$ , доводя его до нуля в случае, например, окна Ханна  $W_N = \cos^2 \pi \frac{n}{2N}$ . Для определения параметров среды получаемый спектр сравнивается с модельным, и выбираются окна, минимально искажающие форму спектра при сохранении достаточно высокого спектрального разрешения. Кроме

вышеуказанного окна Ханна подобными свойствами обладают, например, окна Хемминга, Блекмана и другие. Более подробно проблемы, связанные с выбором окна, изложены в [6]. Таким образом, окончательно получаем:

$$\hat{G} \left( \frac{n}{\tau_{\max}} \right) = h \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi n}{N} \left( \operatorname{Re} S - \frac{R(0)}{2} \right). \quad (4)$$

Последняя формула представляет собой модифицированный алгоритм оценки спектра мощности исследуемого процесса по заданным отсчетам  $R(kh)$  его корреляционной функции. Он отличается от стандартной формы  $S$  алгоритма ДПФ членом  $R(0)/2$  и множителем  $\operatorname{sinc}^2 \frac{\pi n}{N}$ .

Наличие  $R(0)/2$  в скобках (4) связано с использованием только положительных значений  $k=0, 1, \dots, N-1$  при вычислении ДПФ четной функции  $R(kh)$ .

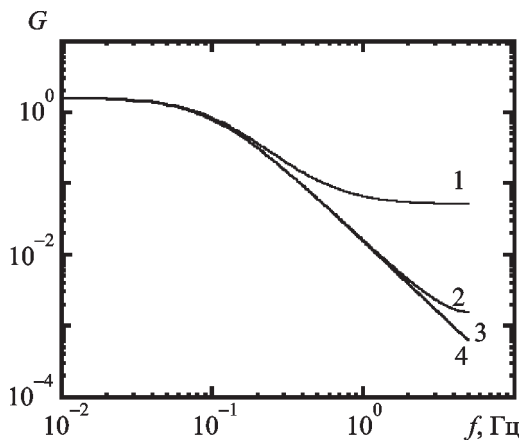
Множитель  $\operatorname{sinc}^2 \frac{\pi n}{N}$  значительно ослабляет эффект наложения периодически повторяющихся спектров из-за конечной частоты дискретизации корреляционной функции. Как видно из (1), отличие  $\hat{G}(\omega)$  от истинного спектра мощности  $G(\omega)$  определяется отличием истинной корреляционной функции  $R(\tau)$  от ее оценки  $\hat{R}(\tau)$ , полученной в результате кусочно-линейной аппроксимации  $R(\tau)$  с использованием дискретных отсчетов  $R(kh)$ . Иначе говоря, проведенное в (1) интегрирование по  $\tau$  позволило сформировать оценку спектра мощности  $\hat{G}(\omega)$  без периодического повторения, а ошибки  $\hat{G}(\omega)$  связаны в данном случае только с ошибками использованной аппроксимации  $R(\tau)$ .

Относительная погрешность кусочно-линейной аппроксимации определяется выражением [7]:

$$\delta(\tau) = \frac{h^2}{8} \left| \frac{R''(\tau)}{R(\tau)} \right|.$$

В часто встречающемся случае плавно убывающей функции  $R(\tau)$ , когда  $|R''(\tau)| \ll \ll 8|R(\tau)|/h^2$ , величина  $\delta$  может быть мала даже при достаточно низкой частоте дискретизации  $F = 1/h$ . Ниже в качестве примера используется корреляционная функция вида  $R(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_0}$  ( $\tau_0 \approx 1.6$  с), для которой  $\delta = 0.05\%$  при  $F = 10$  Гц и  $\delta = 5\%$  при  $F = 1$  Гц.

Рис. 1 иллюстрирует результат применения различных алгоритмов спектрального оценивания для аналитически заданной корреляционной функции  $R(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_0}$ . Кривая 4 на рисунке соответствует истинному спектру мощности  $G(f) = \tau_0 / (1 + 4\pi^2 f^2 \tau_0^2)$ . Использование стандартного алгоритма ДПФ  $\hat{G}_n = h \text{Re} S$  (дискретизация  $R(\tau)$  с частотой  $F = 10$  Гц) приводит к неудовлетворительному результату (кривая 1). Спектр мощности, рассчитанный по формуле  $\hat{G}_n = h [\text{Re} S - R(0)/2]$  (кривая 2), представляет собой результат наложения периодически повторяющихся спектров. И, наконец, полученная с использованием предложенного алгоритма (4) кривая 3 совпадает в масштабах рисунка с истинным спектром мощности 4. Как было отмечено выше, эффект наложения спектров здесь практически отсутствует.



**Рис. 1.** Спектры мощности, полученные с использованием различных алгоритмов спектрального оценивания:

1 – стационарного алгоритма ДПФ, 2 – на основании формулы  $\hat{G}_n = h [\text{Re} S - R(0)/2]$ , 3 – с использованием предложенного алгоритма (4). Кривая 4 – истинный спектр мощности  $G(f) = \tau_0 / (1 + 4\pi^2 f^2 \tau_0^2)$

В предложенном варианте коррелограммного метода наряду с ошибками кусочно-линейной аппроксимации  $R(\tau)$  следует определить статистические ошибки оценки  $\hat{G}(f)$ . Они характеризуются относительным среднеквадратическим отклонением  $\sigma_0(f)$  и относительным смещением  $b_0(f)$  оценки спектра, которые рассчитываются по ансамблю реализаций исследуемого процесса  $U(t)$ . Как показано выше, для рассматриваемого примера случайного процесса с корреляционной функцией  $e^{-|\tau|/\tau_0}$  относительная погрешность аппроксимации последней незначительна, поэтому основными являются указанные статистические ошибки. Определить эти ошибки можно с помощью численного моделирования, кратко описанного ниже.

Реализации процесса  $U(t)$  формировались посредством цифровой фильтрации белого шума  $n(t)$  при его интегрировании с постоянной времени  $\tau_0$ . Для уменьшения ошибок при фильтрации  $n(t)$  использовался алгоритм ДПФ с большим числом точек  $N = 10^5$  при длине реализации  $T = 100$  с, что соответствует частоте дискретизации  $F = 10^3$  Гц. Уменьшение частоты дискретизации  $U(t)$  вплоть до нескольких Гц достигалось пропуском соответствующего числа отсчетов. Полученные таким образом реализации  $U(t)$  использовались для определения оценок корреляционной функции  $\hat{R}(kh) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k-1} U(ih)U(ih+kh)$ , которые после взвешивания и подстановки в алгоритм (4) позволяли получить искомые оценки спектра мощности  $\hat{G}(f)$ .

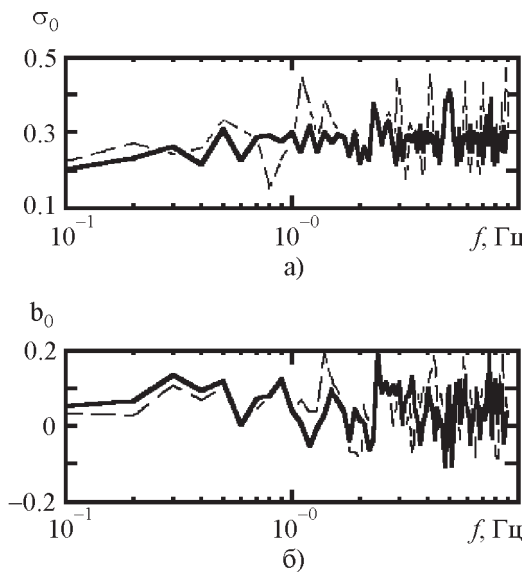
Для сглаживания выборочного спектра применялось корреляционное окно Ханна  $W(\tau) = \cos^2 \pi \frac{\tau}{2\tau_{\max}}$ . В результате максимальный корреляционный сдвиг не превосходил  $\tau_{\max} = 10$  с. Ограничение  $\tau_{\max}$  приводит к уменьшению дисперсии  $\hat{G}(f)$  в  $T/\tau_{\max}$  раз с одновременным ухудшением частотного разрешения, поэтому для получения интерполированных значений спектра оценка  $\hat{R}(\tau)$  дополнялась нулями в интервале  $(\tau_{\max}, T)$ .

Статистические ошибки оценки спектра мощности вычислялись стандартным способом:

$$\sigma_0(f) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{[\hat{G}_m(f) - \bar{G}(f)]^2}{G^2(f)}},$$

$$b_0(f) = \frac{\bar{G}(f) - G(f)}{G(f)}, \quad \bar{G}(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{G}_m(f).$$

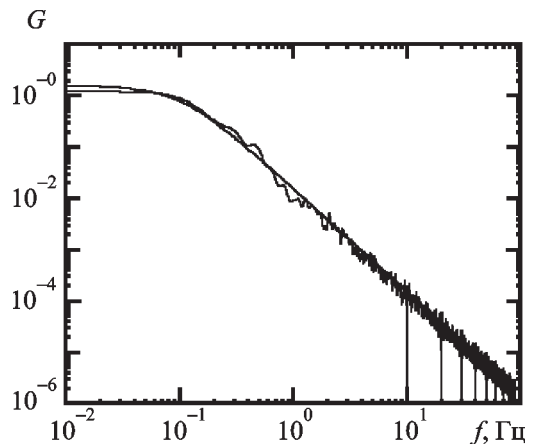
На рис. 2 приведен результат расчета  $\sigma_0(f)$  и  $b_0(f)$  для двух значений частоты дискретизации: 2.5 Гц и 10 Гц. Флуктуации рассчитанных параметров связаны с небольшим количеством  $M = 10$  использованных реализаций.



**Рис. 2.** Частотные зависимости статистических ошибок оценки спектра мощности при использовании алгоритма (4); сплошные линии – частота дискретизации 10 Гц; пунктирные – 2,5 Гц

Среднее значение относительного смещения  $\bar{b}_0 \approx 0.05$  мало и определяется, в основном, типом примененного корреляционного окна. Значение относительного среднеквадратического отклонения  $\bar{\sigma}_0 \approx 0.3$  соответствует тео-

ретическому пределу  $\sqrt{\tau_{\max}/T} \approx 0.3$  для сглаженного выборочного спектра [3]. Обратим внимание на то, что средние значения  $\bar{b}_0$  и  $\bar{\sigma}_0$  слабо зависят от частоты дискретизации при  $F \geq 2.5$  Гц. Интересным является также отсутствие заметной частотной зависимости  $\bar{b}_0(f)$  и  $\bar{\sigma}_0(f)$ , в том числе и на частотах, превышающих частоту Найквиста  $f_N = F/2$  (на рис. 2  $f_N = 1.25$  Гц при  $F = 2.5$  Гц и  $f_N = 5$  Гц при  $F = 10$  Гц). Это обстоятельство, а также то, что периодическое повторение спектров при использовании (4) заметно подавлено, позволяют измерять спектр мощности в более широком частотном диапазоне при более низкой частоте дискретизации исследуемого процесса  $U(t)$ . Сказанное иллюстрирует рис. 3, на котором изображен спектр мощности одной реализации  $U(t)$  продолжительностью  $T = 100$  с с частотой дискретизации  $F = 10$  Гц. Узкие выбросы на частотах, кратных  $F = 10$  Гц, являются следствием кусочно-линейной аппроксимации  $R(\tau)$ , приводя-



**Рис. 3.** Подавление эффекта наложения спектров в случае модификации классического коррелограммного метода (4)

щей к появлению первой и высших гармоник частоты дискретизации.

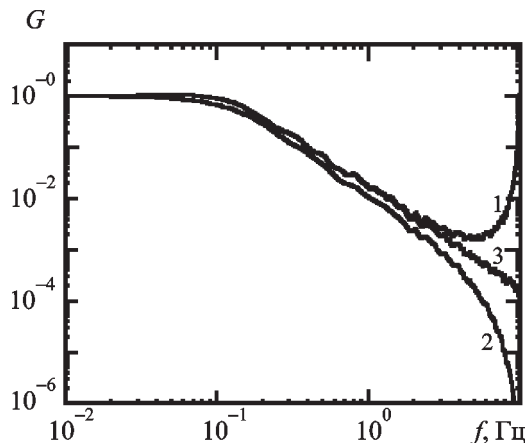
Алгоритм оценки спектра мощности, подобный (4), можно получить и в случае пери-

одограммы  $G(\omega) = |\mathfrak{Z}\{U(t)\}|^2/T$ , вычислив преобразование Фурье оценки  $\hat{U}(t)$ , представляющей собой результат линейной интерполяции отсчетов  $U_k$ :

$$\hat{G}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{h^2}{T} \text{sinc}^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) |S|^2, \quad (5)$$

где  $S = \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$  – ДПФ процесса  $U(t)$ .

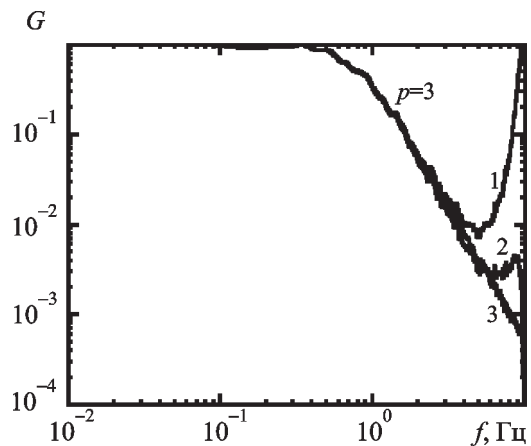
Множитель  $\text{sinc}^4\left(\frac{\pi n}{N}\right)$  в (5) формально обеспечивает подавление периодически повторяющихся спектров, однако одновременно вносит заметные искажения на высоких частотах (рис. 4). Действительно, при кусочно-линейной аппроксимации отсчетов осциллирующего процесса  $U(t)$  теряется информация о его частотных составляющих выше  $F/2$ . Поэтому алгоритм (5) не имеет преимуществ по сравнению с обычной периодограммой, в которой заложены примерно такие же ограничения на верхнюю граничную частоту. В коррелограммном же методе линейная интерполяция ординат корреляционной функции не приводит (вследствие ее монотонности) к полной потере высокочастотных составляющих



**Рис. 4.** Иллюстрация результата модификации классического периодограммного метода (5): 1 – спектр мощности, рассчитанной с использованием алгоритма классического периодограммного метода, 2 – согласно (5), 3 – истинный спектр

спектра мощности даже при достаточно низкой частоте дискретизации  $F$ .

Выше рассматривались примеры построения спектра мощности, имеющего на высоких частотах степенной вид  $f^{-p}$  при значении  $p = 2$ . Характерные значения показателя степени  $p$  в случае наблюдения межпланетных мерцаний заключены в интервале  $p = 2 \div 3$  при среднем значении  $p = 2.5$  [1]. На рис. 5 показан результат применения алгоритма (4) при  $p = 3$ . В отличие от случая  $p = 2$  (рис. 3), когда искажения спектра на частотах  $f > F/2$  практически отсутствуют, здесь (кривая 2) имеет место неполное подавление периодически повторяющихся спектров. Тем не менее, кривая 2 совпадает с истинным спектром 3 в динамическом диапазоне, превосходящем на порядок диапазон, полученный при применении классического коррелограммного метода.



**Рис. 5.** Частичное подавление эффекта наложения спектров при значении показателя спектра  $p = 3$

### Заключение

При исследовании межпланетных мерцаний большой интерес представляют возможные изменения наклона спектра мерцаний в области высоких частот  $1 \div 10$  Гц. Таких данных на декаметровых волнах до настоящего времени нет. Решение этой зада-

чи связано, во-первых, с увеличением чувствительности приемной системы для расширения динамического диапазона измеряемого спектра мощности. Во-вторых, необходимо без искажений воспроизводить спектр мерцаний вплоть до частоты 10 Гц. Применение предложенного алгоритма позволяет почти вдвое снизить частоту дискретизации  $F$  входного процесса. Конечно, на современном этапе развития цифровой техники увеличение частоты  $F$  (например, с 10 до 20 Гц) может быть легко реализовано. Однако использование более низкой частоты регистрации дает возможность в соответствующее число раз уменьшить массив исходных данных, что существенно при продолжительных радиоастрономических наблюдениях. Кроме того, всегда существуют ограничения на предельную частоту дискретизации (сейчас около 500 МГц) и всегда в тех или иных приложениях есть необходимость проводить спектральный анализ на максимально высоких частотах, чему может помочь алгоритм вида (4).

Авторы благодарят Л.Г. Содина за плодотворные дискуссии.

Настоящая работа выполнялась при частичной финансовой поддержке грантов INTAS 97-1964, INTAS-CNES 97-1450.

## Литература

1. А. В. Пынзарь, В. И. Шишов, Т. Д. Шишова. *Астрономический журнал*. 1975, **52**, №6, с. 1187-1194.
2. Н. А. Лотова, И. В. Чашей. *Астрономический журнал*. 1977, **54**, №2, с. 398-403.
3. С. Л. Марпл-мл. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. Москва, Мир, 1990, 584 с.
4. P. D. Welch. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* 1967, **AU-15**, No. 2, pp. 70-73.
5. R. B. Blackman, J. W. Tukey. *The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering*. New York, Dover, 1958.
6. F. J. Harris. *Proc. IEEE*. 1978, **66**, pp 51-83.
7. Г. Я. Мирский. *Аппаратурное определение характеристик случайных процессов*. Москва, Энергия, 1972, с.203.

## Algorithm for Estimation of Power Spectrum of Interplanetary Scintillations

I. S. Falkovich, N. N. Kalinichenko

The modification of the classical correlogram algorithm as applied to interplanetary scintillations of cosmic radio sources is suggested. The suggested method for building power scintillation spectrum is based on linear interpolation of ordinates of correlation function of scintillations and enables to analyse a power spectrum in wider frequency band and with smaller sampling frequency of fluctuation intensity.