

Влияние кривизны магнитных силовых линий на спектр и поляризацию синхротронного излучения заряженной частицы

Я. М. Соболев

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
Украина, 61002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4
E-mail: sobolev@ira.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 23 июля 2001 г.

Рассматривается излучение ультррелятивистской заряженной частицы, движущейся по спиральной траектории вдоль искривленной магнитной силовой линии. Получены общие формулы, описывающие спектральную мощность излучения, полные потери энергии частицы на излучение, частотную зависимость степени поляризации излучения. В предельных случаях они переходят в формулы изгибного излучения и синхротронного излучения в однородном магнитном поле.

Розглядається випромінювання ультррелятивістської зарядженої частинки, що рухається по спіральній траєкторії вздовж скривленої магнітної силової лінії. Отримано загальні формули, що описують спектральну потужність випромінювання, повні втрати енергії частинки на випромінювання, частотну залежність ступеня поляризації випромінювання. У граничних випадках вони переходять у формули випромінювання кривини та синхротронного випромінювання в однорідному магнітному полі.

1. Введение

Спектрально-угловое распределение излучения электрона, движущегося по круговой орбите в однородном магнитном поле, дается формулой Шотта [1, 2] и ее асимптотиками в области релятивистских энергий частиц (синхротронное излучение (СИ)) [3, 4, 5]. Обобщение формулы Шотта на случай движения электрона по винтовой траектории в однородном магнитном поле проведено в [6, 7]. Эти формулы СИ нашли широкое применение в радиоастрономии¹.

В реальных условиях заряженные релятивистские частицы движутся в неоднородных магнитных полях, и может оказаться, что кривизна магнитной силовой линии существенно влияет на спектр синхротронного излучения [9].

¹Историю вопроса о роли СИ в астрофизике см в работе [8].

В работах [9, 10, 11] рассмотрен механизм излучения ультррелятивистского электрона, движущегося по спиральной траектории, которая навивается на круговую магнитную силовую линию под малым углом, в случае, когда излучение в данном направлении приходит с малого участка траектории. В работах [12, 13] изучен другой предельный случай, когда вклад в излучение вносят несколько ларморовских витков вокруг искривленной силовой линии (ондуляторное излучение).

Вместе с тем к настоящему времени роль кривизны магнитной силовой линии исследована недостаточно. В частности, не изучено влияние изменения ориентации плоскости ларморовской орбиты [10], возникающего в неоднородном магнитном поле.

В настоящей работе проведено более полное рассмотрение задачи об электромагнит-

ном излучении ультррелятивистской заряженной частицы, движущейся по спиральной траектории, которая навивается на искривленную магнитную силовую линию под малым углом. Исследуется случай, когда излучение в данном направлении приходит с малого участка траектории. Магнитная силовая линия аппроксимируется окружностью.

Траекторию, найденную из уравнений движения релятивистской заряженной частицы вдоль искривленной силовой линии магнитного поля, можно представить в виде двух составляющих: одна соответствует движению ведущего центра по магнитной поверхности, другая – вращению вокруг него по окружности с частотой ω_B . Новым, в сравнении с известными решениями [14], в нашей задаче является поворот плоскости ларморовской окружности. Проведен учет влияния этого эффекта на поляризационные и спектральные характеристики электромагнитного излучения.

Показано, что качественный вид спектра и зависимости степени поляризации в случае круговых силовых линий остаются такими же, как и в однородном магнитном поле, но их количественные характеристики меняются. Увеличивается высота максимума спектра, изменяется степень поляризации вблизи частоты максимума, существенно увеличивается мощность излучения в области экспоненциального спада спектра. Это есть следствие того, что энергия, излучаемая частицей за время одного оборота вокруг силовой линии, “собирается” из точек траектории с различными радиусами кривизны. Полученные спектральное распределение и степень поляризации излучения в предельных случаях малых и больших питч-углов переходят в формулы изгибного излучения и СИ для винтовой траектории в однородном магнитном поле соответственно.

Влияние кривизны магнитной силовой линии на спектр излучения наиболее существенно при таких питч-углах, для которых отношение скорости ларморовского вращения к скорости центробежного дрейфа в криволинейном магнитном поле порядка единицы. Это условие может выполняться в магнитосфере пульсара.

2. Траектория частицы

Предположим, что магнитные силовые линии имеют вид окружностей, а напряженность магнитного поля равна B_0 . Выберем систему декартовых координат с осями (x, y) в плоскости магнитных силовых линий и осью z , совпадающей с осью цилиндрической магнитной поверхности (см. рис. 1). Вектор магнитного поля имеет при этом вид

$$\mathbf{B} = B_0(\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j}), \quad (1)$$

где φ – полярный угол в плоскости (x, y) , \mathbf{i}, \mathbf{j} – единичные орты осей x и y . Частица с лоренц-фактором $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ движется вдоль магнитной силовой линии со скоростью, близкой к скорости света. Соответствующая этому движению угловая скорость Ω ($\Omega \equiv v_{\parallel}/R$, где v_{\parallel} – скорость ведущего центра вдоль магнитной силовой линии с радиусом кривизны R) значительно меньше частоты вращения вокруг магнитной силовой линии ω_B , $\Omega \ll \omega_B$. Радиус ларморовской окружности r_B значительно меньше радиуса R , $r_B \ll R$.

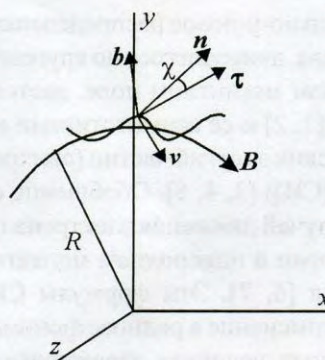


Рис. 1. Траектория частицы и магнитная силовая линия \mathbf{B} :

R – радиус кривизны магнитной силовой линии; τ, ν, \mathbf{b} – орты естественного трехгранника; \mathbf{n} – орт направления на наблюдателя

Радиус-вектор траектории заряженной частицы в магнитном поле (1) принимает вид (см. Приложение 1) [10]:

$$\mathbf{r} = [-2\delta r_B \sin \omega_B t \cos \Omega t + (R + r_B \cos \omega_B t) \sin \Omega t] \mathbf{i} + [2\delta r_B \sin \omega_B t \sin \Omega t + (R + r_B \cos \omega_B t) \cos \Omega t] \mathbf{j} + [v_D t - r_B \sin \omega_B t] \mathbf{k}, \quad (2)$$

где $\omega_B = e_\alpha B_0 / m_\alpha c \gamma$, e_α и m_α – заряд и масса частицы сорта α ; $\delta = \Omega / \omega_B \ll 1$; $v_D = -\Omega^2 R / \omega_B$ – дрейфовая скорость; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные орты декартовой системы координат.

Согласно (2) движение частицы можно описать как вращение с частотой ω_B и ларморовским радиусом r_B вокруг ведущего центра, который, в свою очередь, движется по дрейфовой траектории

$$\mathbf{R} = R \sin \Omega t \mathbf{i} + R \cos \Omega t \mathbf{j} + v_D t \mathbf{k}. \quad (3)$$

Формула (2) отличается от известных выражений дрейфовой теории [14] тем, что в ней учитывается наклон плоскости ларморовской орбиты к оси магнитной поверхности. Действительно, как видно из (2), в системе отсчета K' , вращающейся вокруг оси OZ с угловой скоростью $-\Omega$ и движущейся вдоль оси OZ со скоростью v_D (оси x' , y' системы K' в начальный момент времени совпадают с осями x , y лабораторной системы отсчета), плоскость ларморовской окружности образует угол 2δ с плоскостью, перпендикулярной магнитной силовой линии, а проекция ларморовской окружности на плоскость (x', y') – эллипс с малой осью $2\delta r_B$. Если в выражении (2) опустить слагаемые, пропорциональные $2\delta \sin \omega_B t$ и $v_D t$, то мы получим выражение для радиус-вектора траектории электрона, использованное в работе [9].

Абсолютная величина скорости частицы остается постоянной и дается выражением

$$v = (\Omega^2 R^2 + v_D^2 + \omega_B^2 r_B^2)^{1/2}. \quad (4)$$

Радиус кривизны траектории (2) равен

$$r_C = k^{-1} = v^2 / \left(\Omega^2 R (1 + q^2 + 2q \cos \omega_B t)^{1/2} \right), \quad (5)$$

где k – кривизна, параметр $q = \omega_B^2 r_B / (\Omega^2 R)$ равен отношению ларморовской скорости $v_L = |\omega_B| r_B$ к абсолютной величине дрейфовой скорости (это также отношение ускорений, связанных с движением по малой ларморовской окружности и большой окружности радиуса R).

Кручение траектории (2) задается формулой:

$$\kappa = -\frac{\omega_B^3 r_B \Omega R \cos \omega_B t + q}{k v^4 (1 + q^2 + 2q \cos \omega_B t)^{1/2}}. \quad (6)$$

В случае преобладания дрейфовой скорости над ларморовской, $q < 1$, радиус кривизны $r_C = R$, ускорение связано с движением вдоль магнитной силовой линии. В противоположном случае, $q > 1$, радиус кривизны меньше R и равен $r_C = R/q \approx r_B c^2 / (\omega_B^2 r_B^2) > r_B$.

Дрейфовая траектория (3) составляет с направлением магнитной силовой линии угол ψ_D , который находим из соотношения $\text{tg } \psi_D = |v_D| / v_{||} = \Omega / |\omega_B| = \delta$. Угол ψ_L между направлением скорости частицы \mathbf{v} и касательной к дрейфовой траектории (3) остается постоянным и определяется выражением $\sin \psi_L \approx v_L / c = |\omega_B| r_B / c$. Питч-угол ψ_p (угол между направлением скорости частицы и направлением магнитной силовой линии) различен для разных значений параметра q . Случаю движения электрона по круговой траектории ($\psi_p = \pi/2$, $v = |\omega_B| r_B$, $v_{||} / c \ll 1$) соответствуют значения параметра $q \gg 1$.

Далее будем рассматривать случай движения, для которого проекция скорости частицы на магнитную силовую линию близка к скорости света, $v_{||} \rightarrow c$. При этом лоренц-фактор, соответствующий движению вдоль силовой линии, $\gamma_{||} = (1 - v_{||}^2 / c^2)^{-1/2} \gg 1$.

Используя выражение (4), лоренц-фактор частицы можно записать в виде

$\gamma = (1/\gamma_{\parallel}^2 - v_D^2/c^2 - v_L^2/c^2)^{-1/2}$. Питч-угол частицы задается соотношением $\operatorname{tg} \psi_P = v_{\perp}/v_{\parallel}$. Подставляя в него $v_{\perp} = |\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_L| = (v_D^2 + v_L^2 + 2v_D v_L \cos \omega_B t)^{1/2}$, находим:

$$\operatorname{tg} \psi_P = \frac{\Omega}{\omega_B} (1 + q^2 + 2q \cos \omega_B t)^{1/2}. \quad (7)$$

Таким образом, питч-угол $\psi_P = \psi_D$ в случае преобладания ускорения за счет движения вдоль магнитной силовой линии над ускорением при движении по ларморовской окружности ($q \ll 1$); питч-угол $\psi_P = \psi_L$, если преобладает ускорение за счет вращения по ларморовской окружности ($q \gg 1$). Отметим, что, как следует из формулы (7), при $q \sim 1$ питч-угол уже не остается постоянным (как в рассмотренных выше предельных случаях), а изменяется в пределах $0 \leq \psi_P \leq 2\psi_L$.

Как известно, характерным признаком СИ является то, что излучение ультрарелятивистской заряженной частицы происходит с малого участка траектории, который можно заменить отрезком окружности, и концентрируется в конусе с раствором $\sim 1/\gamma$ вдоль скорости частицы [2, 7]. В случае винтовой траектории в однородном магнитном поле это приводит к требованию, чтобы в системе отсчета, движущейся вдоль магнитной силовой линии со скоростью v_{\parallel} , энергия частицы была релятивистской. Для этого должно выполняться неравенство

$$\gamma^2 \gg \gamma_{\parallel}^2. \quad (8)$$

При $\gamma \sim \gamma_{\parallel}$ имеем ондуляторный механизм излучения в однородном магнитном поле [7]. В этом случае излучение собирается в диаграмму направленности от многих ларморовских витков [15, 16]. Ондуляторное излучение ($\gamma \sim \gamma_{\parallel}$) для движения вдоль искривленной силовой линии магнитного поля рассмотрено в работах [12, 13].

Получим теперь условия, необходимые для осуществления механизма СИ в неоднородном магнитном поле. Вектор скорости частицы, имеющей траекторию (2), образует посто-

янный угол с касательной к дрейфовой траектории (3). Чтобы излучение в данном направлении происходило с малого участка траектории (составляющего малую часть пути, проходимого частицей за время $\sim 1/\omega_B$), мгновенный угол раствора диаграммы направленности излучения ($\sim 1/\gamma$) должен быть мал в сравнении с углом ψ_L ,

$$1/\gamma \ll \psi_L. \quad (9)$$

Рассмотрим неравенство (9) в предположении больших и малых значений параметра q . Используя выражение (4), можно записать $1/\gamma^2 = 1/\gamma_{\parallel}^2 - (v_D^2/c^2)(1 + q^2)$. В случае, когда ларморовская скорость больше дрейфовой скорости, $q \gg 1$, $\psi_L \equiv \psi_P \equiv 1/\gamma_{\parallel}$ и условие (9) совпадает с неравенством (8). В случае $q \ll 1$ (при преобладании дрейфовой скорости над ларморовской) $\psi_L \ll \psi_D$, а лоренц-фактор можно записать в виде $1/\gamma^2 = 1/\gamma_D^2 - v_L^2/c^2$, где $\gamma_D = (1/\gamma_{\parallel}^2 - v_D^2/c^2)^{-1/2}$ – лоренц-фактор, соответствующий проекции скорости на направление дрейфовой траектории (3). Для выполнения условия (9) требуется, чтобы $\psi_L \approx 1/\gamma_D$ (при этом $\gamma_D \gg \gamma_{\parallel}$) и $\gamma \gg \gamma_D$. Неравенство (9) принимает вид: $\gamma \gg \gamma_D \gg \gamma_{\parallel}$.

3. Спектрально-угловое распределение синхротронного излучения

Для вычисления распределения энергии \mathcal{E} , излучаемой заряженной частицей в телесный угол $d\Omega$ и интервал частот $d\omega$, воспользуемся выражением [2]:

$$d\mathcal{E} = \frac{cR_0^2}{4\pi^2} |\mathbf{E}(\omega)|^2 d\Omega d\omega, \quad (10)$$

где $\mathbf{E}(\omega)$ – фурье-компонента электрического поля в дальней зоне,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega) &= \\ &= \frac{-i\omega e}{cR_0} \exp\left(\frac{i\omega R_0}{c}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{n}[\mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}]] \exp[i\omega(t - \mathbf{nr}/c)] dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь R_0 – расстояние до наблюдателя; \mathbf{n} – единичный вектор, соответствующий направлению потока энергии на наблюдателя; $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, \mathbf{v} – скорость заряженной частицы; \mathbf{r} – радиус-вектор траектории частицы (2).

Для вычисления электрического поля (11) поступим следующим образом. Поскольку в случае СИ излучение происходит с малого участка траектории в пределах угла $\sim 1/\gamma$ в направлении скорости частицы, разложим радиус-вектор (2) в ряд Тейлора вплоть до величин порядка $(t-t_0)^3$, где момент времени t_0 соответствует данному направлению на наблюдателя \mathbf{n} . По-видимому, этот метод впервые был применен в работе [5] при вычислении СИ электрона, движущегося по круговой плоской орбите. Такое разложение радиус-вектора траектории частицы использовалось и в работе [9], но лишь для одного направления, соответствующего начальному моменту времени $t_0 = 0$. Обобщим этот метод на случай, когда траектория задается пространственной кривой.

В сферической системе координат выберем направление на наблюдателя

$$\mathbf{n} = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \sin\phi \mathbf{j} - \sin\theta \cos\phi \mathbf{k}, \quad (12)$$

где θ – угол между направлением \mathbf{n} и ортом \mathbf{i} оси x , ϕ – угол, который составляет проекция орта \mathbf{n} на плоскость (y, z) с отрицательным направлением оси z .

Подставляя (12) в формулу (11), получим довольно громоздкое выражение для напряженности электрического поля, которое можно упростить и свести к известным формулам теории СИ, воспользовавшись следующими соображениями. В каждой точке траектории (2) введем естественный трехгранник, состоящий из ортов касательной $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/v$, нормали \mathbf{v} и бинормали \mathbf{b} (рис. 1). Траектория в соприкасающейся плоскости заменяется отрезком окружности, радиус которой равен радиусу кривизны в данной точке. Выбираем такую точку траектории в момент t_0 , что орт \mathbf{n} лежит в спрямляющей плоскости (плоскость касательной $\boldsymbol{\tau}$ и бинормали \mathbf{b}). При этом орт \mathbf{n} и орт нормали \mathbf{v} перпендику-

лярны. Условие для выбора момента времени t_0 принимает вид

$$\mathbf{n}\mathbf{v}(t_0) = 0. \quad (13)$$

Вектор \mathbf{n} лежит в плоскости $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$ и может быть записан в виде (рис. 1):

$$\mathbf{n} = \cos\chi \boldsymbol{\tau} + \sin\chi \mathbf{b}, \quad (14)$$

где χ – угол между ортом скорости $\boldsymbol{\tau}$ и направлением на наблюдателя \mathbf{n} . Определением (14) задается положительное направление отсчета угла χ (от $\boldsymbol{\tau}$ к \mathbf{b}).

Радиус-вектор (2) вблизи точки траектории в момент времени t_0 можно представить в виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)(t-t_0) + \ddot{\mathbf{r}}(t_0)(t-t_0)^2/2 + \ddot{\mathbf{r}}(t_0)(t-t_0)^3/6, \quad (15)$$

где $\dot{\mathbf{r}} = v \boldsymbol{\tau}$, $\ddot{\mathbf{r}} = kv^2 \mathbf{v}$, $\ddot{\mathbf{r}} = -k^2 v^3 \boldsymbol{\tau} + kv^2 \mathbf{v} + kv^3 \mathbf{b}$ и учтено, что $\dot{v} = 0$, $k = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|/v^3$ – кривизна, $\kappa = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]/[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]^2$ – кручение траектории.

С помощью выражений (14), (15) показатель экспоненты в формуле (11) можно записать в виде:

$$i\omega(t - \mathbf{nr}/c) = i\omega \left\{ -\frac{\mathbf{nr}(t_0)}{c} + \left(1 - \frac{v}{c} \cos\chi\right) (t-t_0) - \frac{(t-t_0)^3}{6c} \left(-k^2 v^3 \cos\chi + \kappa k v^3 \sin\chi\right) \right\}. \quad (16)$$

Для исследования поляризационных свойств излучения нужно найти компоненты вектора электрического поля $\mathbf{E}(\omega)$ в плоскости, перпендикулярной направлению на наблюдателя \mathbf{n} . Выберем один из ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ в плоскости, перпендикулярной \mathbf{n} , вдоль направления нормали $\mathbf{e}_\sigma = \mathbf{v}$. Орт \mathbf{e}_σ направлен вдоль вектора ускорения в данной точке

к центру соприкасающейся окружности. В случае кругового движения это условие соответствует σ -поляризации (E_{\perp} – в обозначениях [9]). Второй орт, $\mathbf{e}_{\pi} = -[\mathbf{e}_{\sigma}, \mathbf{n}]/|[\mathbf{e}_{\sigma}, \mathbf{n}]|$, лежит в плоскости $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$ и характеризует поляризационные свойства излучения над и под соприкасающейся плоскостью. Орты \mathbf{e}_{σ} , \mathbf{e}_{π} , \mathbf{n} образуют правую тройку,

$$\mathbf{e}_{\sigma} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{e}_{\pi} = -\sin \chi \boldsymbol{\tau} + \cos \chi \mathbf{b}.$$

Теперь вычислим предэкспоненциальный множитель в интеграле (11). Воспользовавшись разложением (15) и формулой (14) и оставляя слагаемые низшего порядка по $(t - t_0)$, находим:

$$[\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathbf{v}]] = v \sin \chi \mathbf{e}_{\pi} - k v^2 (t - t_0) \mathbf{e}_{\sigma}. \quad (17)$$

Подставляя выражения (16), (17) в формулу (11), получаем:

$$E_i(\omega) = \frac{-i\omega e_{\alpha}}{cR_0} \exp(i\Phi) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\beta \sin \chi}{-k v^2 (t - t_0)/c} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i\omega \left[(1 - \beta \cos \chi)(t - t_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (k^2 v^3 \cos \chi - \chi k v^3 \sin \chi)(t - t_0)^3 / 6c \right] \right\} dt, \quad (18)$$

где $i = \pi, \sigma$; верхняя строка относится к π -поляризации; $\Phi = \omega [R_0/c - \mathbf{n}\mathbf{r}(t_0)/c]$ – постоянная фаза.

После подстановки (18) в формулу (10) находим:

$$\frac{d\xi_i}{d\omega} = \frac{e_{\alpha}^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \frac{\beta^2}{k^2 v^2 \gamma^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \begin{matrix} \gamma \chi \\ -\tau \end{matrix} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i\omega}{2\gamma^3 k v} \left[(1 + \gamma^2 \chi^2) \tau + \tau^3 \beta (\cos \chi - (\chi/k) \sin \chi) / 3 \right] \right\}^2, \quad (19)$$

где $\tau = \gamma(t - t_0)kv$

Интегралы в выражении (19) отличаются от соответствующих интегралов в случае кругового движения [2, 7] наличием дополнительного множителя $\beta(\cos \chi - (\chi/k) \sin \chi)$ у слагаемого $\tau^3/3$ в экспоненте, а также зависимостью кривизны и кручения траектории от t_0 . В случае круговой траектории $\chi = 0$, из (19) получаются формулы СИ для кругового движения. При движении по винтовой траектории в однородном магнитном поле $\chi/k \sim v_{\parallel}/|\omega_B r_B|$, $\chi \chi/k \sim \gamma_{\parallel}/\gamma \ll 1$, и получаем известные формулы СИ [7].

Интегралы в (19) выражаются через функции Эйри, из анализа аргументов которых следует, что основной вклад в (19) дают малые значения χ , $\chi \leq 1/\gamma$. С учетом формул (5), (6) находим

$$\cos \chi - \frac{\chi}{k} \sin \chi \approx 1 - \frac{\chi^2}{2} + \\ + \gamma \chi \frac{\Omega R}{\gamma \omega_B r_B} \left[\frac{q^2 (\cos \omega_B t_0 + q)}{(1 + q^2 + 2q \cos \omega_B t_0)^{3/2}} \right]. \quad (20)$$

Поскольку $\gamma \chi \leq 1$ и в силу свойств СИ $|\omega_B r_B|/R > 1/\gamma$ (см. анализ в конце предыдущего раздела), величина третьего слагаемого в выражении (20) определяется значением множителя в квадратных скобках. При $q > 1$ и $q < 1$ этот множитель порядка или меньше единицы и выражение (20) приблизительно равно 1. В случае $q = 1$ множитель в квадратных скобках в выражении (20) пропорционален $(1 + \cos \omega_B t_0)^{-1/2}$ и обращается в бесконечность в точке $\omega_B t_1 = \pi$. При $q = 1$ траектория (2) имеет точку распрямления при $t_0 = t_1$ (кривизна равна нулю, вектор нормали изменяет свое направление), и в малой окрестности этой точки нарушается приближение, использованное при выводе формулы (19). Оценим, на каких расстояниях от точки, соответствующей моменту времени t_1 , можно пользоваться приближением траектории с помощью вписанной окружности. Найдем такую точку (момент времени t_2), в которой длина формирования излучения порядка расстояния меж-

ду этой точкой и точкой распрямления траектории. В момент t_2 радиус кривизны траектории (2) ($q = 1$) $r_c = R/\Delta$, где $\Delta = \omega_B(t_1 - t_2)$. За время $t_1 - t_2$ частица проходит путь $l \approx c\Delta/|\omega_B|$. Пусть это расстояние порядка длины, с которой происходит излучение, $l \sim r_c/\gamma$. Отсюда $\Delta \sim (|\omega_B|/\gamma\Omega)^{1/2} < 1$. Оценивая величину последнего слагаемого в формуле (20) при значениях $|q - 1| > \Delta$, находим, что им можно пренебречь, поскольку оно мало по сравнению с первым слагаемым. Таким образом, будем рассматривать выражения (19) при значениях параметра q , удовлетворяющих условию

$$|q - 1| > \left(\frac{|\omega_B|}{\gamma\Omega} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Неравенство (21) дает условие применимости использованного в работе метода расчета. Однако для нахождения излучаемой мощности необходимо провести суммирование вкладов в излучение всех точек траектории. При этом вклад точки, соответствующей моменту времени t_1 , мал² и формула (32) (см. ниже) остается применимой и при $q = 1$.

При выполнении условия (21) выражения (19) принимают вид:

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{d\omega} = \frac{e_\alpha^2 \omega^2 \beta^2}{4\pi^2 c k^2 v^2 \gamma^4} \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \begin{Bmatrix} \gamma\chi \\ -\tau \end{Bmatrix} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2\gamma^3 kc} \left[(1 + \gamma^2 \chi^2) \tau + \tau^3/3 \right] \right\} \right|^2. \quad (22)$$

Они отличаются от соответствующих выражений теории СИ для кругового движения тем, что радиус кривизны траектории изменяется со временем t_0 .

Выражения (22) отличаются от соответствующих выражений работы [9]. Если в раз-

²Это утверждение может быть доказано методом, основанным на вычислении работы поля излучения.

ложении (16) положить $t_0 = 0$, принять $\chi = 0$ в коэффициенте при $(t - t_0)^3$, пренебречь наклоном плоскости ларморовской окружности и дрейфом частицы (убрать слагаемые, пропорциональные $2\delta \sin \omega_B t$ и $v_B t$ в выражении (2)), то получим формулы (3.22) и (3.23) из работы [9]. При этом коэффициент перед слагаемым $\cos \chi (t - t_0)^3/6$ переходит в соответствующее выражение из [9], $Q_2^2 = k^2 v^2 + \Omega \omega_B^2 r_B/v$. После этого везде в формуле (22) нужно заменить $k^2 v^2$ на Q_2^2 и для σ -поляризации добавить множитель $k^2 v^2/Q_2^2$. Именно отличие этого множителя от единицы приводит к особенностям поляризации излучения, найденным в работе [9], которые не характерны для СИ при круговом движении [10] (подробнее см. Приложение 2). Если же учесть наклон плоскости ларморовской окружности, то в каждый момент времени t_0 будем иметь формулы СИ для движения по окружности с радиусом, равным радиусу кривизны траектории $r_c(t_0)$ в точке, где находится частица в момент времени t_0 .

Воспользовавшись определением функций Макдональда $K_{1/3}(x)$, $K_{2/3}(x)$ [7, 9], запишем спектрально-угловые распределения излучаемой энергии (22) в виде:

$$\frac{d\mathcal{E}_\pi}{d\omega} = \frac{e_\alpha^2 \omega^2 \beta^2}{3\pi^2 c k^2 v^2 \gamma^4} \psi^2 (1 + \psi^2) K_{1/3}^2(\eta), \quad (23)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_\sigma}{d\omega} = \frac{e_\alpha^2 \omega^2 \beta^2}{3\pi^2 c k^2 v^2 \gamma^4} (1 + \psi^2)^2 K_{2/3}^2(\eta),$$

$$\text{где } \psi = \gamma\chi, \quad \eta = \frac{2}{3} \frac{\omega}{2\gamma^3 kv} (1 + \psi^2)^{3/2}.$$

Формулы (23), в отличие от аналогичных выражений для излучения электрона в однородном магнитном поле [7], содержат зависимость кривизны траектории от параметра t_0 , т. е. спектрально-угловые характеристики излучения определяются радиусом кривизны траектории в точке, соответствующей моменту времени t_0 .

3.1. Спектр излучения

Для вычисления скорости потери энергии заряженной частицей в интервале частот $d\omega$, нужно проинтегрировать выражения (23) по телесному углу и разделить на период вращения. Получим формулу для элемента телесного угла. Излучение концентрируется в слое, угловой размер которого вдоль поверхности (отметим ее буквой S), образуемой единичным вектором скорости $\tau(t_0)$ при изменении фазы в интервале $0 \leq \omega_B t_0 \leq 2\pi$, составляет $\sim 1/\gamma$. Для характеристики угла раствора слоя в плоскости, перпендикулярной этой поверхности, введем угловую координату χ . Нулевые значения угла χ соответствуют совпадению направления скорости частицы и направления на наблюдателя. Вторая угловая координата μ связана с изменением направлений образующих поверхности S и соответствует кривой, описываемой концом единичного вектора скорости частицы на поверхности единичной сферы. При таком определении угла μ имеем:

$$dv = v d\mu = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} dt_0 = |\dot{\mathbf{r}}| dt_0 = kv^2 dt_0.$$

Для элемента телесного угла получаем:

$$d\omega = d\chi d\mu = d\chi kv dt_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{kv}{|\omega_B|} d\psi d(|\omega_B| t_0).$$

В качестве временного интервала возьмем циклотронный период $2\pi/|\omega_B|$.

Разделив выражения (23) на $2\pi/|\omega_B|$ и интегрируя их по телесному углу (заменив при этом пределы интегрирования по углу χ на $\pm\infty$, в силу экспоненциального убывания функций Макдональда при $\chi \gg 1/\gamma$), получаем спектральную мощность излучения:

$$\frac{dP_\pi}{d\omega} = \frac{e_\alpha^2 \omega^2 \beta^2}{3\pi^2 c \gamma^5} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{d(|\omega_B| t)}{2\pi} \frac{1}{kv} \psi^2 (1 + \psi^2) K_{2/3}^2(\eta), \quad (24)$$

$$\frac{dP_\sigma}{d\omega} = \frac{e_\alpha^2 \omega^2 \beta^2}{3\pi^2 c \gamma^5} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{d(|\omega_B| t)}{2\pi} \frac{1}{kv} (1 + \psi^2)^2 K_{2/3}^2(\eta).$$

Здесь и ниже опускаем нуль в индексе переменной интегрирования $|\omega_B| t_0$.

Отметим, что при малых и больших значениях параметра q подынтегральные выражения в формулах (24) не зависят от переменной интегрирования $|\omega_B| t$. Пусть $q \ll 1$, тогда множитель перед интегралом по $d\psi$ имеет вид $\frac{e^2 \omega^2}{3\pi^2} \frac{1}{\gamma^5 \Omega^2 R}$ и соответствует формуле изгибного излучения. Для $q \gg 1$ получаем множитель $\frac{e^2 \omega^2}{3\pi^2} \frac{1}{\gamma^5 c |\omega_B| \sin \psi_p}$, характерный для СИ при движении по винтовой орбите в однородном магнитном поле [7].

Выражения (24) интегрируем по ψ при помощи формул [6, 7, 9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\psi (1 + \psi^2)^2 K_{2/3}^2(\eta) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{y} \left[\int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\psi \psi^2 (1 + \psi^2) K_{2/3}^2(\eta) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{y} \left[\int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right],$$

$$\text{где } \eta = \frac{1}{2} y (1 + \psi^2)^{3/2}.$$

Для излучаемой электроном мощности получаем:

$$\frac{dP_\pi}{d\omega} = \frac{3\sqrt{3} \beta^2}{8\pi \gamma^3} \int_0^{2\pi} \frac{d(|\omega_B| t)}{2\pi} \frac{W(k)}{kv} y \left[\int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right], \quad (25)$$

$$\frac{dP_\sigma}{d\omega} = \frac{3\sqrt{3} \beta^2}{8\pi \gamma^3} \int_0^{2\pi} \frac{d(|\omega_B| t)}{2\pi} \frac{W(k)}{kv} y \left[\int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right],$$

где $y = \omega/\omega_s$, $\omega_s = \frac{3}{2} \gamma^3 kv$, $W(k) = \frac{2}{3} \frac{e_\alpha^2}{c} \gamma^4 k^2 v^2$ — полная мощность излучения заряженной частицы, движущейся по окружности радиуса $r_c = k^{-1}$; $kv^2 = \Omega^2 R (1 + q^2 + 2q \cos \omega_B t)^{1/2}$. Выражение под первым интегралом в форму-

лах (25) можно интерпретировать как спектральную мощность излучения электрона, движущегося по круговой орбите с мгновенным радиусом k^{-1} .

Сложив верхнее и нижнее выражения (25), находим полную спектральную мощность излучения:

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{\beta^2}{\gamma^3} \int_0^\pi \frac{d(|\omega_B|t)}{\pi} \frac{W(k)}{kc} y \int_y^\infty dx K_{5/3}(x). \quad (26)$$

Интегрируя (25), (26) по частоте, при помощи формул (10.124) из [7], получаем: $P_\pi = \frac{1}{8} P$,

$P_\sigma = \frac{7}{8} P$, где полная мощность излучения задается выражением

$$P = \frac{2}{3} \frac{e_\alpha^2}{c} \gamma^4 \beta_\parallel^2 \Omega^2 (1 + q^2). \quad (27)$$

Как видно из формулы (27), полная мощность излучения частицы в неоднородном магнитном поле учитывает потери за счет изгибного излучения (первое слагаемое) и потери за счет СИ (второе слагаемое).

При движении по винтовой траектории в однородном магнитном поле, $q \gg 1$, формула (27) принимает вид:

$$P_s = \frac{2}{3} \frac{e_\alpha^2}{c} \gamma^4 \omega_B^2 \beta_\perp^2. \quad (28)$$

Отметим, что выражение (28) совпадает с формулой (10.135) из [7], которая в этой работе называется "точной формулой для полной потери энергии излучения в случае движения электрона по винтовой линии". Воспользовавшись тем, что $\gamma \gg \gamma_\parallel$ и $\beta_\perp^2 \cong 1/\gamma_\parallel^2$, получаем из формулы (28) (в терминологии [7]) "приближенное значение для интенсивности излучения" (формула (10.140) из [7]). Это же выражение остается справедливым и в случае релятивистского продольного движения, $\gamma_\parallel \gg 1$. Подставляя

значение $1 + q^2$, найденное из выражения для лоренц-фактора (см. абзац после формулы (9)), в (27) и учитывая неравенство (8), находим

$$P = \frac{2}{3} \frac{e_\alpha^2}{c} \gamma^4 \omega_B^2 \frac{1}{\gamma_\parallel^2}. \quad (29)$$

Если радиус ларморовской окружности равен нулю, $q \ll 1$, то в формуле (27) остается первое слагаемое

$$P_C = \frac{2}{3} \frac{e_\alpha^2}{c} \gamma^4 \beta_\parallel^2 \Omega^2. \quad (30)$$

В отличие от случая кругового движения (изгибное излучение), для которого $\gamma = \gamma_\parallel$, формула (30) описывает случай, когда $\gamma \gg \gamma_\parallel$. При этом $1/\gamma^2 = 1/\gamma_\parallel^2 - v_D^2/c^2$ и $v_D/c \approx 1/\gamma_\parallel$ или $\gamma_\parallel \Omega = |\omega_B|$.

В формулах (25), (26) выполняем интегрирование по $|\omega_B|t$. Введя переменную $z = 1 + q^2 + 2q \cos \omega_B t$ и изменив порядок интегрирования, получаем

$$\frac{dP_i}{d\omega} = \frac{P_C}{\omega_C} f_i(y_C, q), \quad (31)$$

где

$$f_i(y_C, q) = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} y_C \left\{ \int_{\frac{y_C}{|1-q|}}^\infty dx F_i(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{y_C}{1+q}}^{\frac{y_C}{|1-q|}} dx F_i(x) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1+q^2 - y_C^2/x^2}{2q} \right) \right\};$$

$P_C = \frac{2}{3} \frac{e_\alpha^2}{c} \gamma^4 \beta_\parallel^2 \Omega^2$ – полная мощность излучения заряженной частицы при движении по окружности радиуса R со скоростью v_\parallel ; $y_C = \omega/\omega_C$, $\omega_C = (3/2)\gamma^3 \Omega \beta_\parallel/\beta \approx (3/2)\gamma^3 \Omega$ –

критическая частота излучения; $i = \pi, \sigma$;
 $F_\pi = K_{5/3} + dK_{2/3}/dx = (1/2)(K_{5/3} - K_{1/3})$,
 $F_\sigma = K_{5/3} - dK_{2/3}/dx = (1/2)(3K_{5/3} + K_{1/3})$.

Для полной спектральной мощности излучения имеем выражение

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{P_C}{\omega_C} f(y_C, q), \quad (32)$$

где

$$f(y_C, q) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y_C \left\{ \int_{\frac{y_C}{\|1-q\|}}^{\infty} dx K_{5/3}(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{y_C}{1+q}}^{\frac{y_C}{\|1-q\|}} dx K_{5/3}(x) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1+q^2 - y_C^2/x^2}{2q} \right) \right\}.$$

Воспользовавшись соотношением

$$\arcsin \frac{z - (1+q^2)}{2q} = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{q}} \sqrt{(1+q^2)^2 - z}$$

и введя новые обозначения: $\omega_1 = \omega_C (1+q)$, $y_1 = y_C / (1+q)$, формулу (32) можно привести к формуле (15) из работы [10].

Таким образом, универсальная функция распределения синхротронного излучения при

движении релятивистского электрона по круговой орбите [3, 4]

$$f(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^{\infty} dx K_{5/3}(x), \quad (33)$$

заменяется выражением (32) при движении по спиральной траектории, навивающейся под малым углом на искривленную магнитную силовую линию.

Формула (32) при малых и больших значениях q , $q \ll 1$ и $q \gg 1$, переходит в формулу изгибного излучения (излучения релятивистского электрона, имеющего круговую орбиту радиуса R) и в формулу СИ при движении по винтовой траектории в однородном магнитном поле. В этих случаях второе слагаемое в фигурных скобках в (32) мало по сравнению с первым слагаемым. Наиболее существенное отличие от известных формул возникает при $q \sim 1$, когда определяющим становится вклад второго слагаемого в фигурных скобках в (32).

3.2. Поляризация излучения

Для характеристики поляризационных свойств излучения определим степень поляризации как [7, 9]

$$\pi(\omega) = \left(\frac{dP_\sigma}{d\omega} - \frac{dP_\pi}{d\omega} \right) / \left(\frac{dP_\sigma}{d\omega} + \frac{dP_\pi}{d\omega} \right). \quad (34)$$

Подставляя в формулу (34) выражения (31), (32), находим

$$\pi(\omega) = \frac{2K_{2/3}\left(\frac{y_C}{\|1-q\|}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{y_C}{1+q}}^{\frac{y_C}{\|1-q\|}} dx (K_{5/3} + K_{1/3}) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1+q^2 - y_C^2/x^2}{2q} \right)}{2 \int_{\frac{y_C}{\|1-q\|}}^{\infty} dx K_{5/3} + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{y_C}{1+q}}^{\frac{y_C}{\|1-q\|}} dx K_{5/3}(x) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1+q^2 - y_C^2/x^2}{2q} \right)}. \quad (35)$$

В случае движения в однородном магнитном поле формула для степени поляризации (35) принимает вид:

$$\pi(\omega) = \frac{K_{2/3}(\omega/\omega_j)}{\int_{\omega/\omega_j}^{\infty} dx K_{5/3}(x)}, \quad (36)$$

где $\omega_j = \omega_C$ – для изгибного излучения, и $\omega_j = \omega_S = \omega_C q$ – для СИ в однородном магнитном поле.

4. Обсуждение

Сравним спектральные распределения излучения для одинаковых значений питч-угла (параметр q), вычисленные по формулам СИ в однородном магнитном поле [2] и по формуле (32). Спектр СИ при движении по винтовой траектории в однородном магнитном поле дается первым слагаемым в формуле (32), в котором нижний предел интегрирования $\omega/(\omega_C |1 - q|)$ заменен на $\omega/(\omega_C q)$. Питч-угол в однородном магнитном поле $\sin \psi_P = |\omega_B| r_B / c = |\omega_B| r_B / c$, а характерная частота излучения равна $\omega_S = \frac{3}{2} \gamma^2 \frac{e_\alpha B_0 \sin \psi_P}{mc} = \omega_C q$ [2]. На рис. 2, а приведен спектр СИ в однородном магнитном поле (штриховая линия), вычисленный при $q = 1.2$. Сплошная линия – это спектральное распределение (32) при том же значении параметра q . При увеличении q графики сближаются. (Уже при $q = 10$ эти кривые неразличимы). На рис. 2, б приведен спектр изгибного излучения (33) (первое слагаемое в формуле (32), в котором нижний предел интегрирования равен ω/ω_C) и спектр (32) при $q = 0.9$. При дальнейшем уменьшении параметра q сплошная и пунктирная кривые совпадают. Сравнивая графики для различных значений параметра q , аналогичные приведенным на рис. 2, находим, что кривизна магнитной силовой линии существенна в следующей области значений параметра q : $2 < q < 5$. Для формулы (32) получаем большую интенсивность излучения и большую характерную частоту излучения.

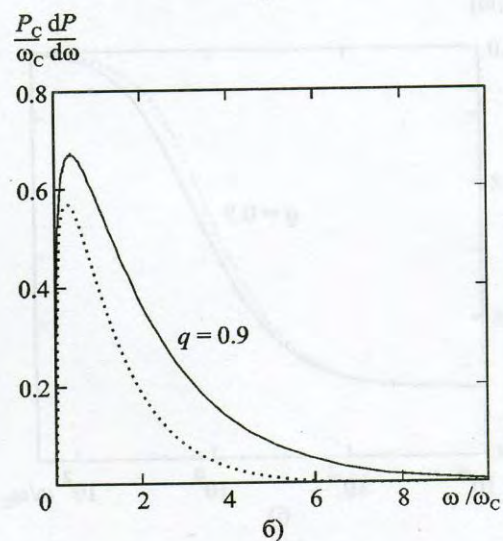
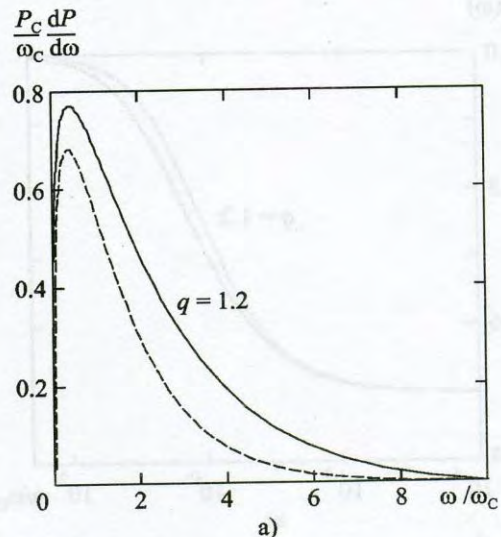


Рис. 2. Спектр СИ при различных значениях q : а) $q = 1.2$ (сплошная линия – распределение (32), штриховая – спектр СИ в однородном магнитном поле); б) $q = 0.9$ (сплошная линия – распределение (32), пунктир – спектр изгибного излучения)

На рис. 3, а приведены графики зависимости степени поляризации от частоты в однородном магнитном поле и в магнитном поле с круговыми силовыми линиями ($q = 1.2$). При значении $q = 0.9$, на рис. 3, б приведены аналогичные графики для изгибного механизма излучения и СИ в магнитном поле с круговыми силовыми линиями. Сплошные кривые постро-

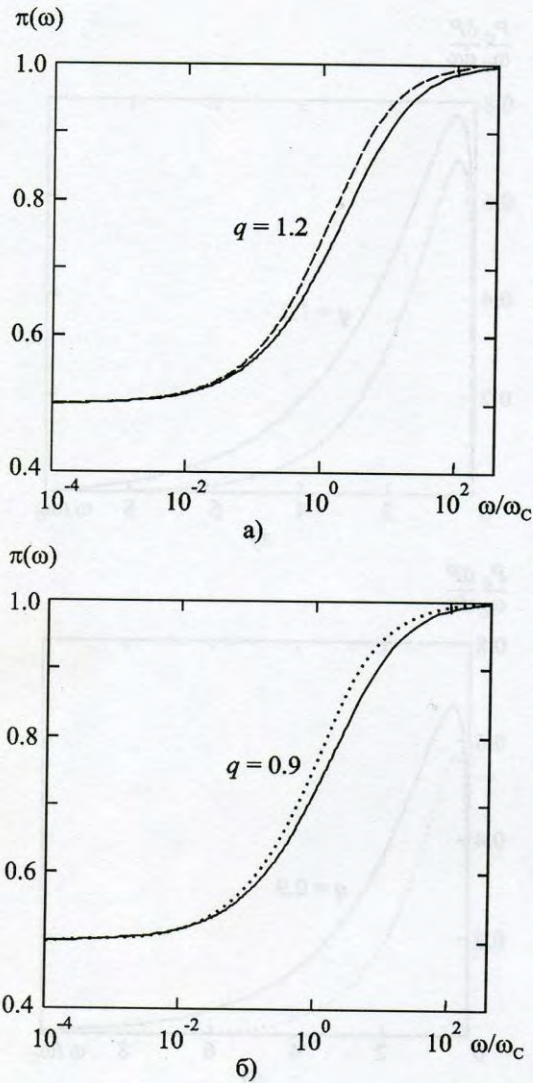


Рис. 3. Степень поляризации СИ при различных значениях q :

а) $q = 1.2$ (сплошная кривая – рассчитана по формуле (35), штриховая – степень поляризации СИ в однородном магнитном поле);

б) $q = 0.9$ (сплошная кривая – рассчитана по формуле (35), пунктир – степень поляризации изгибного излучения)

ены по формуле (35), штриховая и пунктирная линии – по формуле (36). Наибольшие отличия кривых видны вблизи характерной частоты излучения.

Таким образом, получены общие формулы синхротронного излучения ультрарелятивистской заряженной частицы, которая движется по

спиральной траектории, навивающейся на искривленную магнитную силовую линию. Спектральное распределение излучаемой мощности дается формулой (32). Поляризационные свойства излучения описываются формулой (35). В предельных случаях $q \ll 1$ и $q \gg 1$ формула (32) переходит в формулы изгибного излучения и формулы СИ в однородном магнитном поле соответственно. Полная мощность излучения дается формулой (27), которая при $q \gg 1$ переходит в точную формулу потерь энергии электрона, движущегося по винтовой траектории в однородном магнитном поле. Отличие от формул СИ в однородном магнитном поле существенно при значениях питч-угла, соответствующих $q = \omega_B^2 r_B / (\Omega^2 R) \sim 1$. Воспользовавшись формулой (9), это соотношение можно переписать в виде

$$2 \left(\frac{10^3}{\gamma_{\parallel}} \right) \left(\frac{3 \cdot 10^7}{\gamma} \right) \left(\frac{B}{10^6} \right) \left(\frac{R}{10^8} \right) \sim 1. \quad (37)$$

Условие (37) легко выполняется в лабораторной и космической плазме. В частности, в магнитосфере пульсара во внешних зазорах [17] ($R \sim 10^8$ см, $B \sim 10^6$ Гс, $\gamma \sim 10^7$). Поэтому вычисленные по формуле (32) характерные энергии фотонов, которые определяют потенциал зазора посредством рождения электронно-позитронных пар, могут отличаться от соответствующих значений, вычисленных по формулам СИ в однородном магнитном поле.

Автор благодарен А. Г. Боеву за обсуждение результатов.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 02.07.433).

Приложение 1.

Решение уравнений движения

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) , связанной с лабораторной системой отсчета, уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле (1) принимают вид:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \omega_B \dot{z}, \quad r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0, \quad \ddot{z} + \omega_B \dot{r} = 0. \quad (\text{П1})$$

Второе и третье уравнения (П1) могут быть проинтегрированы, после чего получаем:

$$r^2\dot{\phi} = M = \text{const}, \quad (\text{П2})$$

$$\dot{z} + \omega_B r = V_z = \text{const}, \quad (\text{П3})$$

где постоянная M ($M = -\Omega R^2$) имеет смысл момента импульса в круговом магнитном поле (1), а постоянная V_z связана с сохранением обобщенного импульса в силу однородности магнитного поля вдоль оси z .

Подставляя $\dot{\phi}$ и \dot{z} из уравнений (П2), (П3) в первое уравнение (П1), получаем уравнение для координаты r , решение которого выражается через эллиптические функции. Найдем асимптотические решения уравнений (П1) методом [14], используя малость радиуса ларморовской окружности r_B по сравнению с радиусом кривизны магнитной силовой линии R .

Введем новые координаты ρ и ψ :

$$\rho = r - R, \quad \psi = \phi + \Omega. \quad (\text{П4})$$

При этом радиус R и угловая скорость Ω есть приближение нулевого порядка малости (по параметру $r_B/R \ll 1$) для радиальной координаты ведущего центра и его угловой скорости движения.

В первом порядке по $\rho/R \ll 1$ из уравнения (П2) получаем

$$\dot{\psi} = 2\Omega \frac{\rho}{R}. \quad (\text{П5})$$

Из формул (П1), (П3)-(П5) следует уравнение

$$\ddot{\rho} + (\omega_B^2 + 3\Omega^2)\rho = \Omega^2 R + \omega_B (V_z - \omega_B R). \quad (\text{П6})$$

Поскольку мы ищем отклонения от решения $r = R$, полагаем правую часть уравнения (П6) равной нулю, что означает равенство центробежной силы и силы Лоренца для дрейфовой траектории (3). Задавая начальные значения $\rho = r_B$, $\dot{\rho} = 0$, $\phi = \pi/2$, $z = 0$, находим решения уравнений (П6), (П2), (П3):

$$r = R + r_B \cos \omega_B t,$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \Omega t + 2 \frac{\Omega}{\omega_B} \frac{r_B}{R} \sin \omega_B t, \quad (\text{П7})$$

$$z = v_D t - r_B \sin \omega_B t,$$

где $v_D = -\Omega^2 R / \omega_B$ и $\Omega^2 \ll \omega_B^2$.

Переходя от цилиндрических координат к декартовым, получаем радиус-вектор траектории частицы (2). Выражение (2) совпадает (в первом порядке по $r_B/R \ll 1$) с радиус-вектором траектории, полученным в [10] другим методом.

Приложение 2.

Сопоставление с результатами работы [9]

Поляризационные и спектральные свойства излучения, полученные в работе [9], отличаются от соответствующих свойств СИ, найденных в настоящей работе. Рассмотрим, почему возникло отличие.

В работе [9] получена следующая формула для спектральной мощности излучения:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\omega} = \frac{dP_\pi}{d\omega} + \frac{dP_\sigma}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}e^2\gamma}{4\pi r_C^*} \frac{\omega}{\omega_C} \left\{ \int_{\omega/\omega_C}^{\infty} K_{5/3}(x) dx - \right. \\ \left. - K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right) + \frac{[(R+r_B)\Omega^2 + \omega_B^2 r_B]^2}{c^4 Q_2^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\int_{\omega/\omega_C}^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right) \right] \right\}, \quad (\text{П8}) \end{aligned}$$

где ω_c и Q_2^2 имеют вид:

$$\omega_c = (3/2)\gamma^3\Omega \left[(1+q)^2 + q \right]^{1/2}, \quad (\text{П9})$$

$$Q_2^2 = (\Omega^2/v^2) \left[(1+q)^2 + q \right], \quad (\text{П10})$$

$r_c^* = (c/\Omega)(1+q)^{-1}$ – радиус кривизны траектории в момент $t_0 = 0$.

Формула (П8) вычислена в работе [9] для траектории, в которой не учитывается наклон плоскости ларморовской окружности к магнитной силовой линии. Радиус-вектор такой траектории описывается выражением (2), в котором отсутствуют слагаемые, пропорциональные $2\delta\sin\omega_B t$. Для траектории [9] не выполняется соотношение $\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} = 0$, всегда справедливое в магнитном поле. Таким образом, в работе [9] использован радиус-вектор траектории, для которой не учитывается постоянство скорости частицы в магнитном поле.

Для траектории (2), учитывающей постоянство энергии частицы в магнитном поле, вторые слагаемые в квадратных скобках в формулах (П9), (П10) обращаются в нуль, множитель $k^2v^2 / (k^2v^2 + q\Omega^2)$ перед квадратными скобками в формуле (П8) равен единице. Выражение (П8) сводится к выражению для потерь энергии частицы, движущейся по круговой орбите радиуса $R/(1+q)$ (радиус кривизны траектории в момент $t_0 = 0$). Если еще учесть зависимость радиуса кривизны траектории от времени, то получим формулу (32).

Литература

1. G. A. Schott. Electromagnetic radiation. Cambridge, 1912.
2. Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. Теория поля. Москва, Наука, 1973, 504 с.

3. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. ДАН СССР. 1948, **59**, с. 1551-1554.
4. J. Schwinger. Phys. Rev. 1949, **75**, pp. 1912-1925.
5. В. В. Владимирский. ЖЭТФ. 1948, **18**, с. 392-401.
6. K. S. Westfold. Astroph. J. 1959, **130**, pp. 241-258.
7. А. А. Соколов, И. М. Тернов. Релятивистский электрон. Москва, Наука, 1974, 393 с.
8. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский. УФН. 1965, **87**, с. 65-111.
9. K. S. Cheng, J. L. Zhang. Astroph. J. 1996, **463**, pp. 271-283.
10. Я. М. Соболев. Вопросы Атомн. Науки и Техники. Сер. "Плазменная электроника". 2000, №1, с. 27-30.
11. И. М. Панкратов. Физика Плазмы. 1999, **23**, с. 165-168.
12. Я. М. Соболев. Радиофизика и Радиоастрономия. 2000, **5**, №2, с. 137-147.
13. В. Я. Эпп, Т. Г. Митрофанова. Тез докл. Всерос. астрон. конф. 6-12 августа 2001г. Санкт-Петербург, с. 201.
14. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, Наука, 1974, 504с.
15. А. А. Соколов, Д. В. Гальцов, В. Ч. Жуковский. ЖТФ. 1973, **43**, с. 682-683.
16. Д. Ф. Алферов, Ю. А. Башмаков, Е. Г. Бессонов. ЖТФ. 1973, **43**, с. 2126-2132.
17. K. S. Cheng, C. Ho, M. A. Ruderman. Astroph. J. 1986, **300**, pp. 500-521.

Influence of Magnetic Line Curvature on Spectrum and Polarization of Synchrotron Radiation of a Charged Particle

Ya. M. Sobolev

Radiation of a relativistic charged particle moving over the spiral curve along the curved magnetic line is considered. General formulas for the spectral power of radiation, the total radiated energy power and the frequency dependence of the polarization rate are obtained. In the limit they turn into the formulas for the curvature radiation and synchrotron radiation in an uniform magnetic field.