

К РАСЧЕТУ СИЛЬНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ВЗРЫВА

А. Н. Голубятников¹ и С. С. Чукин²

Россия, 119899, Москва, МГУ, мех.-мат. факультет.

Как показывают оценки, в ряде астрофизических проблем существует необходимость решения задачи о точечном релятивистском взрыве. Для решения применяется развитый ранее асимптотический метод тонкого ударного слоя, связанный с малым отклонением показателя адиабаты от единицы. Показано, что вначале вблизи центра симметрии образуется полость, которая затем начинает схлопываться со скоростью, близкой к скорости света. Это приводит к появлению второй ударной волны и образованию в результате фокусировки плотного компактного объекта.

1. Введение

Как показывают оценки, связанные, например, с применением ньютоновского автомодельного решения Седова задачи о сильном взрыве [1], в ряде астрофизических проблем имеется необходимость также решения задачи о релятивистском взрыве, которая становится неавтомодельной после добавления в число определяющих параметров скорости света c . Решение такой задачи асимптотическим методом тонкого ударного слоя при показателе адиабаты $\gamma \rightarrow 1$ анонсировано в [2]. Вначале вблизи центра симметрии образуется полость, которая затем начинает схлопываться со скоростью, близкой к c . Это приводит к появлению второй ударной волны и образованию в результате фокусировки, если нет условий для нового выделения энергии, плотного компактного объекта.

В настоящей работе приводятся аппроксимационные формулы, а также выполнены некоторые газодинамические расчеты.

2. Уравнения и условия на разрывах

Релятивистские уравнения адиабатического движения совершенного газа в случае сферической симметрии при $c = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{hv}{\sqrt{1-v^2}} \right)_t + 4\pi r^2 p_m = 0, \quad v = r_t, \\ f_t = 0, \quad h = 1 + \gamma f \rho^{\gamma-1}, \\ p = (\gamma - 1) f \rho^\gamma, \quad \rho = \frac{\sqrt{1-v^2}}{4\pi r^2 r_m}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

¹e-mail: golubiat@mech.math.msu.su

²e-mail: chukinss@mail.ru

где индексами t, m обозначены соответственно частные производные по времени инерциального наблюдателя и массе покоя сферы радиуса r , v – радиальная скорость, h – энтальпия, p – давление, ρ – плотность массы покоя, γ – постоянный показатель адиабаты, а функция f связана с распределением энтропии.

Условия на поверхности разрыва $m = M(t)$ дают

$$\begin{aligned} [r] = 0 \Rightarrow \left[v + \frac{M_t \sqrt{1-v^2}}{4\pi r^2 \rho} \right] = 0, \\ \left[\frac{hvM_t}{\sqrt{1-v^2}} - 4\pi r^2 p \right] = 0, \quad (2.2) \\ \left[\left(u + \frac{pv^2}{\rho} \right) \frac{M_t}{\sqrt{1-v^2}} - 4\pi r^2 v p \right] = 0, \end{aligned}$$

где $u = 1 + f\rho^{\gamma-1}$ – удельная внутренняя энергия.

3. Постановка задачи

Пусть в покоящейся среде с плотностью ρ_0 в точке $r = t = 0, m = 0$ выделяется энергия

$$E_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^M \left(u + \frac{pv^2}{\rho} \right) \frac{dm}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (3.1)$$

Дальнейшее выделение отсутствует. При этом при $m = 0$ выполняются условия: при $r = 0$ $p \geq 0$, а при $r > 0$ $p = 0$. В последнем случае в центре образуется полость.

Выберем в качестве единицы измерения длины величину $L \equiv (E_0/(\rho_0 c^2))^{1/3}$, времени – L/c и массы – E_0/c^2 . Тогда все уравнения становятся безразмерными и единственным параметром будет показатель адиабаты γ .

4. Движение первой ударной волны

Рассмотрим решение задачи при $\gamma \rightarrow 1$. Пусть $\epsilon = \gamma - 1$ – малый параметр. Как и в ньютоновской механике [3], на первом этапе следует рассчитать закон движения ударной волны $r = R(t) = (3M/(4\pi))^{1/3}$, разделяющей область невозмущенного состояния среды (0) и область (1), занятую движущимся газом.

Из условий на разрыве (2.2) следует, что и на ударной волне выполняются соотношения, главные члены которых имеют вид:

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{\epsilon (\sqrt{1-v_1^2} - 1 + v_1^2)} \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}} - 1, \quad p_1 = \frac{v_1^2}{1-v_1^2}, \quad M_t = 4\pi R^2 v_1,$$

и, таким образом, разложение $r(t, m, \epsilon)$ следует начинать с расчета движения оболочки $r = R(t)$, на которой сосредоточена вся захватываемая масса.

Пусть μ – плотность массы оболочки, тогда с учетом притока массы имеем

$$\left(\frac{\mu R^2 R_t}{\sqrt{1-R_t^2}} \right) = 0, \quad \left(\frac{\mu R^2}{\sqrt{1-R_t^2}} \right) = R^2 R_t. \quad (4.2)$$

Решая эту систему, найдем зависимости

$$t = R + \pi R^4/3, \quad \mu = (R/3)\sqrt{1+1/M}. \quad (4.3)$$

Решение (4.3) справедливо на временах $t \sim 1$. При больших t его следует "склеить" с ньютоновским решением. Можно предложить следующее уравнение, описывающее полную эволюцию ударной волны,

$$R_t = \frac{\sqrt{1+2\epsilon M}}{1+M}, \quad M = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad (4.4)$$

Решение уравнения (4.4) даётся квадратурой

$$t = \int_0^M \frac{(1+m)dm}{(36\pi m^2)^{1/3} \sqrt{1+2\epsilon m}} \quad (4.5)$$

и может служить отправным пунктом при проведении более детальных расчетов.

5. Определение параметров движения газа

Далее из условий (4.1) с учетом $v_1 = R_t$ (4.3) определяем функцию

$$f = \frac{1+m}{\sqrt{2m+m^2}} - 1. \quad (5.1)$$

Из уравнения движения (2.1), считая $h = 1 + f(m)$ и также $r = R(t)$, с учетом условий (4.1) находим распределение давления

$$p = \frac{1}{4\pi R^2} \left(\frac{R_t}{\sqrt{1-R_t^2}} \right)_{t_m}^M \int (1+f)dm + \frac{R_t^2}{1-R_t^2} = \frac{\sqrt{2m+m^2}}{(2M+M^2)^{3/2}}. \quad (5.2)$$

Отметим, что $p(t, 0) = 0$ и, таким образом, возможно образование полости. Из соотношения $p = \epsilon f \rho^\gamma$ и определения плотности (2.1) получим соотношение

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} - \int_m^M (\epsilon f/p)^{1/\gamma} \sqrt{1-v^2} dm. \quad (5.3)$$

Пусть $r(t, 0) = R_0(t)$ – закон движения полости. Подинтегральное выражение (5.3) содержит особенность типа $(1/m)^{1/\gamma}$. Это требует для сходимости интеграла удержания показателя $1/\gamma = 1 - \epsilon$. Если, кроме того, отбросить остальные степени m и заменить текущую скорость v на скорость движения границы полости $R_{0,t}$, то приближенно получим

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{1}{2} \sqrt{1-R_{0,t}^2} \times (2M+M^2)^{3/2} (M^\epsilon - m^\epsilon). \quad (5.4)$$

Соотношение (5.4) можно также переписать в виде

$$r^3 = R_0^3 + (m/M)^\epsilon (R^3 - R_0^3). \quad (5.5)$$

6. Движение полости

Обозначим через $M_0 = 4\pi R_0^3/3$ объем полости. Тогда согласно (5.4), с использованием $R(t)$ (4.3), уравнение движения полости имеет вид

$$\left(\frac{dM_0}{dM} \right)^2 = (1+M)^2 \left(\frac{M_0}{M} \right)^{4/3} \times \left(1 - \frac{4(M-M_0)^2}{(M^2+2M)^3} \right). \quad (6.1)$$

Качественное исследование уравнения (6.1) показывает, что единственно возможное решение определяется условием его прохождения через вершину изоклины $dM_0/dM = 0$ (точка А), которая является и границей области существования решения. Решение состоит из участков двух сепаратрис. Первая отвечает случаю $dM_0/dM > 0$ и разделяет

интегральные кривые, выходящие из особой точки $(0, 0)$ и попадающие на ударную волну $M_0 = M$ или на изоклину $dM_0/dM = 0$. Вторая – при $dM_0/dM < 0$, наоборот, разделяет уходящие от ударной волны или от указанной изоклины интегральные кривые (рис 1). В результате чего по-

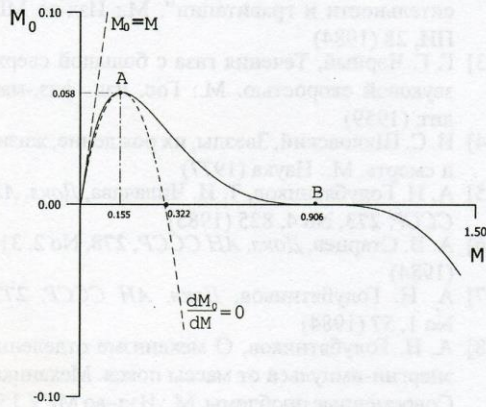


Рис. 1. Качественное исследование решений уравнения полости

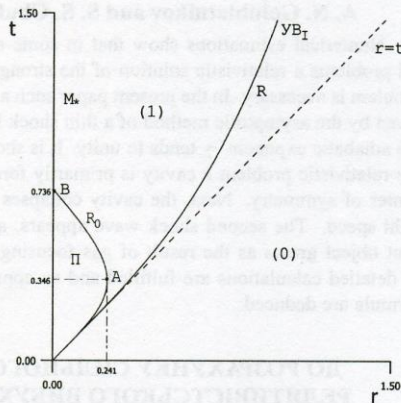


Рис. 2. Результат численного интегрирования

лость начинает схлопываться со скоростью, порядка скорости света, к центру, образуя вторую ударную волну. Момент ее образования определяется корнем $M_0(t_*) = 0$ (точка В). Уравнение (6.1) может быть решено численно. Для решения использовался метод "предиктор-корректор" второй степени точности. При этом $t_* = 0.736$, $R(t_*) = 0.636$, $v(t_*) = 0.89$ (рис. 2).

Таким образом, действительно, при релятивистском взрыве имеет место образование полости. В

ньютоновской механике при $\gamma < 7$ полость вообще отсутствует [1].

7. Расчет второй ударной волны

Очевидно, что в основном приближении в центре при $t > t_*$ ($M_0 < 0$) растет сосредоточенная масса $M_*(t)$. Полагая в (5.5) $r = 0$, получим

$$M_* = M / (1 - M/M_0)^{1/\epsilon}. \quad (7.1)$$

Соотношение $m = M_*(t)$ позволяет определить в основном приближении массу газа за второй ударной волной, отделяющей область (1) от области (2), содержащей центр симметрии.

Анализ показывает, что в следующем приближении, связанном с расчетом распределенных в области (2) параметров, в условиях на разрывах на второй ударной волне можно пренебречь противодавлением p_1 , а также считать $v_2 \ll |v_1| \sim 1$. В результате получим следующие приближенные соотношения на разрыве

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{v_1^2 \rho_1}{\epsilon \sqrt{1 - v_1^2}} \\ &= \frac{v_1^2 M_*}{\epsilon^2 (-M_0)}, \quad f_2 = \frac{f_1}{\sqrt{1 - v_1^2}}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$p_2 = \frac{v_1^2 f_1 M_*}{\epsilon \sqrt{1 - v_1^2} (-M_0)}, \quad M_{*,t} = -\frac{4\pi \rho_1 R_*^2 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2}}.$$

Последнее соотношение эквивалентно $r_1 = 0$ в основном приближении. Причем можно считать $f_1 = 1/\sqrt{2m} \gg 1$.

По порядку членов главной в уравнении движения (2.1) в области (2) является производная давления, которая полагается, в результате, равной нулю. Таким образом, в области (2) в основном приближении реализуется состояние движения газа с однородным давлением $p(t) > 0$, которое определяется из условий (7.2) при $m = M_*(t)$. Полость не образуется.

Затем аналогично п. 5 находится закон движения газа

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\epsilon}{p(t)} \int_0^m f dm. \quad (7.3)$$

Закон движения второй ударной определяется из формулы (7.3) при $m = M_*(t)$. Пусть $t = T_*(m)$ –

функция, обратная к $m = M_*(t)$ (7.1). Тогда получим

$$\frac{4\pi R_*^3}{3} = \left(\frac{\epsilon^2 \sqrt{1-v_1^2} (-M_0)}{v_1^2 f_1 M_*} \right)_{m=M_*} \times \int_0^{M_*} \left(\frac{f_1 dm}{\sqrt{1-v_1^2}} \right)_{t=T}. \quad (7.4)$$

Соотношение (7.4) позволяет определить порядок величины закона движения в области (2) $r \sim \epsilon^{2/3}$ и фактически проверить выполненные выше приближения с учетом порядков дифференцирований: $\partial/\partial t \sim 1$ и $\partial/\partial m \sim 1/M_*$.

8. Заключение

В заключение отметим, что данное решение модельной задачи о сильном точечном взрыве позволяет исследовать как локальное поведение газа при релятивистских взрывах в недрах звезд, так и описать, например, взаимодействие продуктов взрыва сверхновой с окружающей средой, не вдаваясь в детали производства энергии и механизмов ее передачи внешнему газу. Качественно новым явлением, по сравнению с ньютоновской механикой, здесь является образование расширяющейся полости, которая затем схлопывается с релятивистской скоростью с образованием второй ударной волны, за которой происходит рост компактного объекта. Похожая картина, как известно, наблюдается в Крабовидной туманности, в центре содержащей пульсар [4].

Этим механизмом можно также объяснить эффект повторных γ -всплесков. В связи с этим интересен вопрос исследования устойчивости схлопывающейся полости.

Отметим еще некоторые другие астрофизические задачи, решенные методом тонкого ударного слоя: ньютоновская задача о взрыве вращающейся звезды с образованием пары расширяющихся торoidalных вихрей [5], та же задача с учетом вмороженного магнитного поля [6], задача о гравитационном захвате газа с определяемым значением стока [7].

Интересна постановка и обратной задачи: о возможности отделения энергии-импульса от массы покоя, точно решенная в рамках релятивистской гидродинамики [8].

Работа поддержана РФФИ, проект 00-01-00135.

Список литературы

- [1] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука (1965)
- [2] А. Н. Голубятников, Тезисы докл. VI Сов. грав. конф. "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации". М.: Изд-во МГПИ, 28 (1984)
- [3] Г. Г. Черный, Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. (1959)
- [4] И. С. Шкловский, Звезды, их рождение, жизнь и смерть. М.: Наука (1977)
- [5] А. Н. Голубятников, Т. И. Чилачава, Докл. АН СССР, 273, No 4, 825 (1983)
- [6] А. В. Старцев, Докл. АН СССР, 278, No 2, 316 (1984)
- [7] А. Н. Голубятников, Докл. АН СССР, 277, No 1, 57 (1984)
- [8] А. Н. Голубятников, О механизме отделения энергии-импульса от массы покоя. Механика. Современные проблемы. М.: Изд-во МГУ, 152 (1987)

ON CALCULATION OF STRONG RELATIVISTIC EXPLOSION

A. N. Golubiatnikov and S. S. Chukin

Numerical estimations show that in some astrophysical problems a relativistic solution of the strong explosion problem is necessary. In the present paper such a solution is given by the asymptotic method of a thin shock layer when the adiabatic exponent γ tends to unity. It is shown that in the relativistic problem a cavity is primarily formed at the center of symmetry. Next, the cavity collapses at a near-light speed. The second shock wave appears, and a compact object grows as the result of gas focusing. A series of detailed calculations are fulfilled and an approximation formula are deduced.

ДО РОЗРАХУНКУ СИЛЬНОГО РЕЛЯТИВІСТСЬКОГО ВИБУХУ

А. Н. Голубятников, С. С. Чукін

Як показують числові оцінки, у ряді астрофізичних проблем існує необхідність розв'язання задачі про точковий релятивістський вибух. Для розв'язання використовується розвинений раніше асимптотичний метод тонкого ударного шару, зв'язаний з малою відмінністю показника адіабати γ від одиниці. Показано, що спочатку поблизу центра симетрії створюється порожнина, яка потім починає стискатись із швидкістю, близькою до швидкості світла. Це зумовлює появу другої ударної хвилі та створення у результаті фокусування щільного компактного об'єкту.