

## Регуляризирующие операторы в скалярных задачах дифракции на конических поверхностях

Д. Б. Куриляк

*Физико-механический институт НАН Украины  
290601, Украина, Львов, ул. Наукова, 5  
e-mail: kuryliak@ipm.lviv.ua*

*Статья поступила в редакцию 10 августа 1999 г.*

Рассмотрено семейство регуляризирующих операторов для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в задачах дифракции на конических поверхностях и проанализированы операторы с наиболее простым видом матричных элементов. На этой основе исследована приближенная система уравнений для задачи дифракции на конечном конусе, учитывающая выполнение граничных условий асимптотически. На примерах вычисления диаграмм направленности показана эффективность этой системы для анализа полей, рассеянных конусами больших размеров.

Розглянуто сімейство регуляризованих операторів для безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають у задачах дифракції на конічних поверхнях та проаналізовано оператори з найпростішим виглядом матричних елементів. На цій основі досліджено наближену систему рівнянь для задачі дифракції на скінченному конусі, яка враховує граничні умови асимптотично. На прикладах обчислення діаграм спрямованості показана ефективність цієї системи для аналізу полів, розсіяних конусами великих розмірів.

### Введение

При решении задач дифракции на отрезках конических поверхностей методом "полуобращения" регуляризаторами выступают пары операторов, состоящие из бесконечных матриц типа свертки и соответствующих обратных операторов, элементы которых находятся в аналитическом виде на основе факторизации мероморфных функций, учитывающих модовую структуру полей [1]. Эти операторы находят применение при решении широкого класса задач теории дифракции, в частности, на разветвлениях плоских волноводов [2]. При решении задач дифракции на конусах больших размеров с применением регуляризирующих операторов такого вида возникает проблема, связанная с громоздким вычислением большого количества матричных элементов обратного оператора, выражающихся через бесконечные произведения и требующих нахождения большого количества корней трансцендентных уравнений. Цель данной работы заключается в том, чтобы выделить семейство таких операторов и исследовать возможность выбора оптимальных с точки зрения повышения эффективности численного анализа процесса дифракции.

### Метод "полуобращения"

Рассмотрим ключевую систему уравнений, возникающую при решении скалярных задач дифракции на идеально проводящих кониче-

ских поверхностях, которую запишем в матричном виде так [1]:

$$X = A^{-1}(A - A_1)X + A^{-1}F. \quad (1)$$

Здесь  $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – неизвестный и  $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – известный векторы,  $A_1$  и  $A$  – бесконечные матрицы с элементами

$$a_{qn}^{(1)} = \frac{\rho_1 W \left[ K_{z_n} I_{\xi_q} \right]_{\rho_1}}{(\xi_q^2 - z_n^2) K_{z_n}(\rho_1) I_{\xi_q}(\rho_1)}, \quad (2)$$

$$a_{qn} = \frac{1}{\xi_q - z_n}, \quad (3)$$

где  $q, n = \overline{1, \infty}$ ;  $I_\nu(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя,  $K_\nu(\cdot)$  – функция Макдональда;  $\rho_1 = -ikc$ ,  $k$  – волновой параметр,  $c$  – длина образующей конуса;  $W[\cdot]$  – вронсиан;  $z_n \in \{z_p\}_{p=1}^{\infty}$  и  $\xi_q \in \{\xi_p\}_{p=1}^{\infty}$  – элементы возрастающих последовательностей простых положительных нулей целых функций экспоненциального типа. Для случая симметричного возбуждения конечного конуса ТМ-волной они записываются в виде:

$$Q(v) = \cos(\pi v) / (v^2 - 0.25), \quad (4)$$

$$P(v) = P_{v-1/2}(\cos \gamma) P_{v-1/2}(-\cos \gamma).$$

Здесь  $P_{v-1/2}(\cdot)$  – функция Лежандра. Для функций (4) имеем:  $z_n = n + 1/2$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ ;  $\{\xi_q\}_{q=1}^\infty = \{v_p\}_{p=1}^\infty \cup \{\mu_m\}_{m=1}^\infty$ , где  $v_p$  и  $\mu_m$  – положительные корни трансцендентных уравнений  $P_{v-1/2}(\cos \gamma) = 0$  и  $P_{\mu-1/2}(-\cos \gamma) = 0$  соответственно. Кроме этого, при  $p, m \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические соотношения:

$$v_p = \pi(p - 1/4) / \gamma + O(1/p) \quad \text{и}$$

$$\mu_m = \pi(m - 1/4) / (\pi - \gamma) + O(1/m).$$

Элементы матричного оператора  $A$  равны статическому пределу выражения (2) и совпадают с главной частью его асимптотики при  $z_n, \xi_q \gg |\rho_1|$ .

Элементы обратного оператора  $A^{-1}$  в (1) находим, базируясь на факторизации относительно контура, содержащегося в полосе регулярности  $\Pi: \{\text{Re } v < 1/2\}$  четной мероморфной функции  $M(v) = Q(v)/P(v)$  и представлении ее в виде:

$$M(v) = M_+(v)M_-(v), \quad (5)$$

где  $M_+(v)$ ,  $M_-(v)$  – функции, регулярные в полуплоскостях  $\text{Re } v > -1/2$ ,  $\text{Re } v < 1/2$  соответственно. Эти функции связаны соотношением  $M_+(v) = M_-(-v)$ , а в областях регулярности при  $|v| \rightarrow \infty$  для них справедлива оценка  $O(v^{-1/2})$ . С использованием выражения (5) элементы оператора  $A^{-1}$  записываются так:

$$\tau_{nq} = \frac{1}{\{[M_-(\xi_q)]^{-1}\} \{[M_-(z_n)](z_n - \xi_q)\}}, \quad (6)$$

где

$$\{[M_-(\xi_q)]^{-1}\} = \frac{M_+(\xi_q) d/dv [P(v)]_{v=\xi_q}}{Q(\xi_q)}, \quad (7a)$$

$$[M_-(z_n)]' = \frac{d/dv [Q(v)]_{v=z_n}}{M_+(z_n)P(z_n)};$$

$$M_-(v) = B_0 \times$$

$$\times \left\{ (0.5 - v)\Gamma(0.5 - v) e^{-v\chi} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - v/\xi_n) e^{v/\xi_n} \right\}^{-1}; \quad (7b)$$

$$B_0 = i\sqrt{\pi} \{P_{-0.5}(\cos \gamma) P_{-0.5}(-\cos \gamma)\}^{-1/2},$$

$$\chi = T(\gamma) - S(\gamma) - S(\pi - \gamma) - \psi(3/4),$$

$$T(\gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi},$$

$$S(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\gamma}{\pi(n - 1/4)} - \frac{1}{v_n} \right],$$

$\psi(\cdot)$  – логарифмическая производная гамма-функции.

Для выражения (6) при  $n, q \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическая оценка:

$$\tau_{nq} = O(z_n^{1/2} \xi_q^{-1/2} (z_n - \xi_q)^{-1}). \quad (8)$$

При этом пара регуляризирующих операторов с элементами (3), (6) обеспечивает решение системы (1) в классе последовательностей

$$b(\sigma): \{\|X\| = \sup_n |x_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n n^\sigma| = 0, 0 \leq \sigma < 1/2\}, \quad (9)$$

и, следовательно, гарантирует удовлетворение условий Мейкснера.

### Семейство регуляризирующих операторов

Зададим множество мероморфных функций  $\mathfrak{R}: \{M^*(v) = Q^*(v)/P^*(v)\}$ , где  $Q^*(v)$  и  $P^*(v)$  – четные, необращающиеся в нуль при  $v=0$  целые функции экспоненциального типа. Их простые несовпадающие нули  $z_n^*$  и  $\xi_q^*$  ( $q, n = \overline{1, \infty}$ ) образуют возрастающие последовательности, которые удовлетворяют асимптотическим соотношениям:

$$|z_n - z_n^*| = O(1/n), \quad |\xi_q - \xi_q^*| = O(1/q) \quad (10)$$

при  $n, q \rightarrow \infty$ .

Функции  $Q^*(v)$  и  $P^*(v)$  представляются, например, в виде бесконечных произведений по правилам построения целых функций [3]. При этом функции  $M^*(v)$  обладают свойствами, сформулированными для функции  $M(v)$ .

Используя  $M^*(v)$  с учетом ее факторизации, образуем семейство пар матричных операторов  $\mathfrak{Z}$ :  $\{A^*, [A^*]^{-1}\}$ , элементы которых определяем по формулам (3), (6). Далее рассмотрим бесконечную систему уравнений вида:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{y_p}{\xi_k - z_p} = \eta_k, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (11)$$

где  $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$  – известный вектор из  $b(\sigma_1)$  и  $0 \leq \sigma_1 < 1$ . Точное решение системы (11) в классе последовательностей (9) записывается непосредственно с применением оператора  $A^{-1}$ . Покажем, что любая пара операторов из  $\mathfrak{Z}$  является регуляризующей для системы (11). Действительно, используя операторы из  $\mathfrak{Z}$ , получаем систему второго рода, которую запишем так:

$$y_n + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} y_k = \tilde{\eta}_n, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (12)$$

где

$$b_{nk} = \sum_{p=1}^{\infty} \tau_{np}^* \frac{(\xi_k^* - \xi_k) + (z_p - z_p^*)}{(\xi_k^* - z_p^*)(\xi_k - z_p)}, \quad (13)$$

$$\tilde{\eta}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \tau_{np}^* \eta_p.$$

Учитывая соотношения (8), (10), находим, что  $b_{nk} = O(n^{-1/2}k^{-2})$  при  $n, k \rightarrow \infty$  и  $\tilde{\eta}_n \in b(\sigma)$ . Используя эти оценки, доказываем, что на неизвестный вектор в (12) действует вполне непрерывный оператор в  $b(\sigma)$ . Таким образом, получаем, что операторы из семейства  $\mathfrak{Z}$  являются регуляризаторами системы (13). Следовательно, они являются также регуляризаторами исходной системы, которую теперь запишем так:

$$X = [A^*]^{-1}(A^* - A_1)X + [A^*]^{-1}F. \quad (14)$$

Из множества  $\mathfrak{R}$  выберем такую функцию  $M^*(v)$ , чтобы ее нули и полюсы определялись соотношениями:

$$z_n^* \in \{p + 1/2\}_{p=1}^{\infty}, \quad (15)$$

$$\xi_q^* \in \{\pi(p - 1/4)/\gamma\}_{p=1}^{\infty} \cup \{\pi(p - 1/4)/(\pi - \gamma)\}_{p=1}^{\infty}.$$

Здесь  $z_n^*, \xi_q^*$  – главные части асимптотик  $z_n, \xi_q$  как функций параметров  $n, q$  соответственно, при  $q, n \rightarrow \infty$ . Тогда  $M^*(v)$  выражается через гамма-функции, а ее факторизация проводится непосредственно. При этом соответствующие “плюс” и “минус” функции записываются так:

$$M_{\pm}^*(v) = i \frac{\Gamma(3/4 \pm v\gamma/\pi)\Gamma(3/4 \pm v(\pi - \gamma)/\pi)}{(v \pm 1/2)\Gamma(v \pm 1/2)} e^{\mp vT(\gamma)}. \quad (16)$$

Отметим, что функции  $M_{\pm}^*(v)$  и  $M_{\pm}(v)$  (5) совпадают в предельном случае  $\gamma = \pi/2$ .

Функции (16) существенно упрощают выражения матричных элементов оператора  $[A^*]^{-1}$ . Например, базисные выражения для производных (7а), вычисления которых на основе функций (4), (5) особенно громоздки, принимают, с использованием (16), достаточно простой вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d[M_{\pm}^*(v)]^{-1}}{dv} \right|_{v=\xi_q^*} &= \\ &= \frac{i(1/2 - \xi_q^*)\Gamma(1/4 + \xi_q^*\gamma/\pi)\Gamma(1/4 + \xi_q^*(\pi - \gamma)/\pi) e^{-\xi_q^*T(\gamma)}}{\Gamma(\xi_q^* + 1/2)\cos(\pi\xi_q^*)} \times \\ &\times \begin{cases} \gamma \sin(\xi_q^*\gamma - \pi/4) \cos(\xi_q^*(\pi - \gamma) - \pi/4) \\ \text{при } \xi_q^* = \pi(q - 1/4)/\gamma, \\ (\pi - \gamma) \cos(\xi_q^*\gamma - \pi/4) \sin(\xi_q^*(\pi - \gamma) - \pi/4) \\ \text{при } \xi_q^* = \pi(q - 1/4)/(\pi - \gamma), \end{cases} \quad (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dM_{\pm}^*(v)}{dv} \right|_{v=z_n^*} &= \\ &= \frac{i\pi^2 \Gamma(z_n^* + 1/2) e^{z_n^*T(\gamma)}}{(1/2 - z_n^*)\Gamma(1/4 + z_n^*\gamma/\pi)\Gamma(1/4 + z_n^*(\pi - \gamma)/\pi)} \times \\ &\times \frac{\sin(\pi z_n^*)}{\cos(z_n^*\gamma - \pi/4) \cos(z_n^*(\pi - \gamma) - \pi/4)}. \quad (17b) \end{aligned}$$

Следовательно, формально используя более слабые регуляризаторы, получаем существенные преимущества, связанные с простотой их построения.

**Приближенная система уравнений**

Образуем теперь из (1) новую систему уравнений, получающуюся заменой индексов  $z_n$  и  $\xi_q$  в (2), (3) их асимптотическими значениями  $z_n^*$  и  $\xi_q^*$  (15). Пусть при этом операторы  $A_1, A$  переходят в  $A_1^*, A^*$  соответственно. Аналогичную замену индексов проводим и в компонентах известного вектора  $F$ , преобразуя его в вектор  $F^*$ . Тогда искомую приближенную систему уравнений запишем так:

$$X = [A^*]^{-1} (A^* - A_1^*) X + [A^*]^{-1} F^* \quad (18)$$

Отметим, что уравнения системы (18) стремятся к точным при  $\gamma \rightarrow \pi/2$  для произвольных значений линейных размеров конуса и частотного параметра. При  $\gamma \neq \pi/2$  эта система приближенно учитывает граничные условия задачи. Рассмотрение системы (18) оправдано, поскольку при анализе полей, рассеянных конусами больших размеров, привлекаются моды высоких порядков. Тогда, для конусов больших размеров с учетом соотношения (10) естественно ожидать равномерного по отношению к углу раскрытия конуса  $\gamma$  стремления решения приближенной системы (18) к точному. Для проверки этого предположения сравнивались результаты вычислений амплитудных диаграмм направленности, полученные на ос-

нове решения точной (1) и приближенной (18) систем уравнений. Соответствующие результаты показаны на рис. 1. Приведенные на этом рисунке данные (равно как и данные на рис. 2, 3) соответствуют возбуждению конечного конуса радиальным электрическим диполем, помещенным на оси симметрии конуса в точке со сферическими координатами ( $r=l < c; \theta=0$ ). При этом элементы известного вектора находятся по формуле:

$$f_k = - \frac{A_0 \pi I_{\xi_k}(\rho_0) (\xi_k^2 - 0.25) P_{\xi_k - 1/2}(\mp \cos \gamma)}{2\sqrt{\rho_0} I_{\xi_k}(\rho_1) \cos(\pi \xi_k)} \quad (19)$$

где  $A_0 = 2P_0 Z / l$ ,  $P_0$  – момент диполя и  $Z$  – волновое сопротивление среды;  $\rho_0 = -ikl$ , знак “+” соответствует размещению источника в области  $0 \leq \theta \leq \gamma$ , а “-” размещению в области  $\gamma \leq \theta \leq \pi$ . Вычисление диаграмм направленности базировалось на использовании выражения для  $H_\phi$ -компоненты полного поля через решение рассматриваемых систем, которое для зоны излучения записывается в виде:

$$H_\phi^{(i)} = -Z^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ikr}}{r} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n P_{z_n - 1/2}^1(\cos \theta)}{(z_n^2 - 1/4) P_{z_n - 1/2}(\cos \gamma) K_{z_n}(\rho_1)} \quad (20)$$

При вычислениях полагали  $P_0 k = 1/(4\pi) A$ ,  $Z = 1$  Ом. Из-за симметричности графики диаграмм показаны в диапазоне углов  $0 \leq \gamma \leq \pi$ .

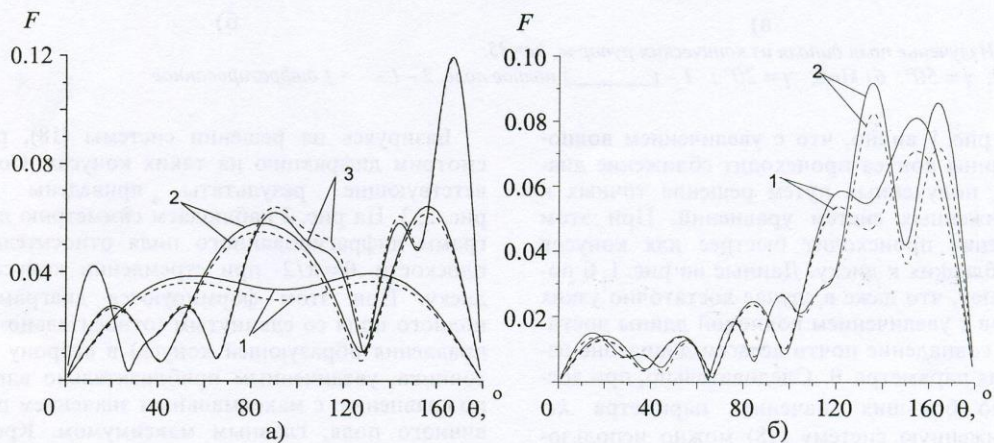


Рис. 1. Сопоставление диаграмм направленности дифрагированного поля, рассчитанных на основе решения точного уравнения (1) (—) и приближенного (18) (---) при  $kl=1$ :  
 а)  $\bar{\alpha} = 130^\circ$  (кривая 1 –  $kc=3$ ; 2 –  $kc=6$ ; 3 –  $kc=12$ ); б)  $\bar{\alpha} = 160^\circ$  (кривая 1 –  $kc=12$ ; 2 –  $kc=18$ )

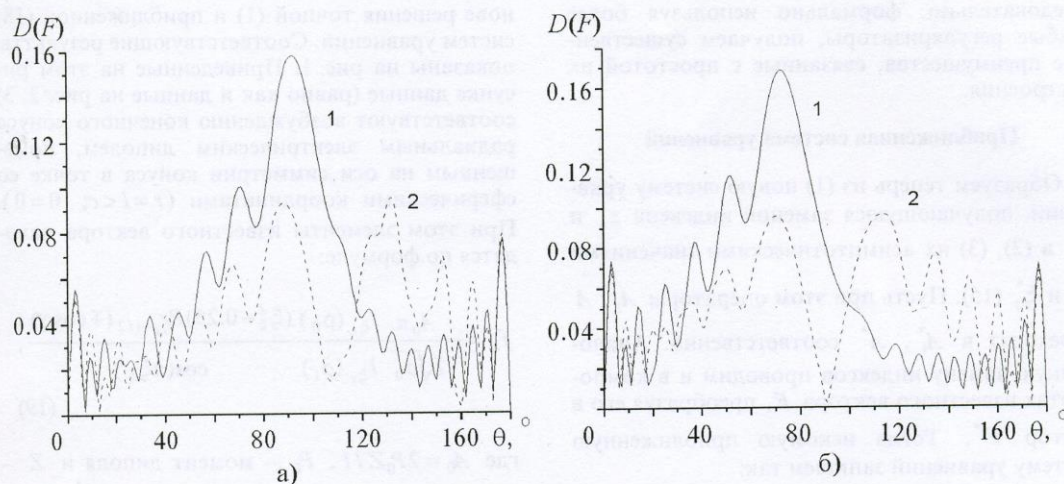


Рис. 2. Диаграммы рассеяния конусов близких к диску,  $kl=1$ ,  $kc=35$ :  
 а)  $\gamma=110^\circ$ ; б)  $\gamma=91^\circ$ ; 1 – (—) полное поле, 2 – (---) дифрагированное

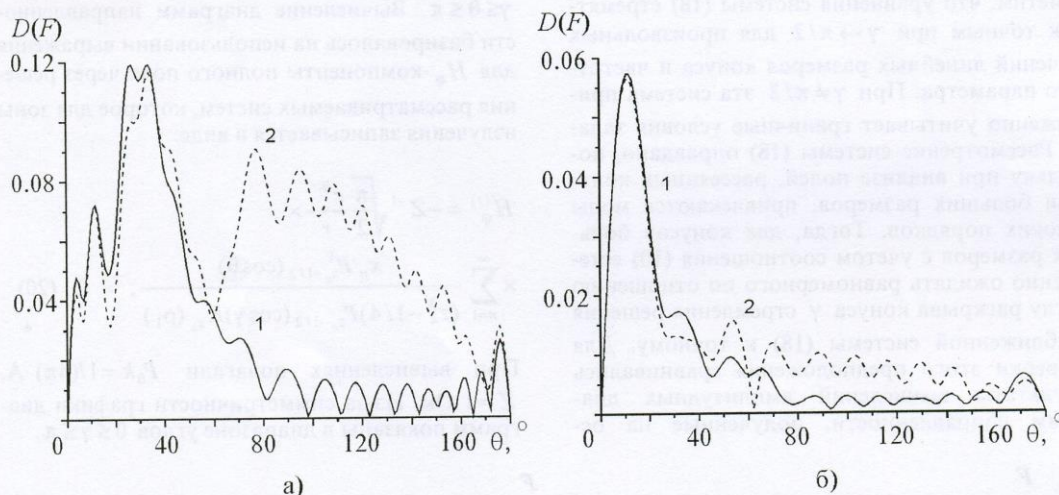


Рис. 3. Излучение поля диполя из конических рупоров,  $kc=35$ :  
 а)  $kl=1$ ,  $\gamma=50^\circ$ ; б)  $kl=8$ ,  $\gamma=20^\circ$ ; 1 – (—) полное поле, 2 – (---) дифрагированное

Из рис. 1 видно, что с увеличением волновой длины конуса происходит сближение диаграмм, полученных путем решения точных и приближенных систем уравнений. При этом сближение происходит быстрее для конусов более близких к диску. Данные на рис. 1, б показывают, что даже в случае достаточно узких конусов с увеличением волновой длины достигается совпадение почти во всем диапазоне изменения параметра  $\theta$ . Следовательно, при достаточно больших значениях параметра  $kc$  приближенную систему (18) можно использовать для численного анализа полей практически во всем диапазоне изменения угла раскрытия конуса  $\gamma$ .

Базируясь на решении системы (18), рассмотрим дифракцию на таких конусах. Соответствующие результаты приведены на рис. 2, 3. На рис. 2 наблюдаем симметрию диаграмм дифрагированного поля относительно плоскости  $\theta=\pi/2$  при стремлении конуса к диску. При этом формируются диаграммы полного поля со сдвинутым (относительно направления образующей конуса) в сторону источника, увеличенным приблизительно вдвое, по сравнению с максимальным значением первичного поля, главным максимумом. Кроме этого, наблюдаем формирование области тени с быстрыми осцилляциями поля и существенным всплеском, достигающим практически уровня максимума первичного поля диполя

( $A_0 = 0.07958$ ), в окрестности оси симметрии. Быстрые осцилляции поля в области тени обусловлены сложением первичного и дифрагированного полей, а пики в окрестности оси формируются исключительно за счет дифрагированного поля.

Процесс образования тени хорошо наблюдается при рассмотрении излучения из конических рупоров больших размеров (см. рис. 3). Локализация источника в глубине такого рупора образует широкую область тени, и, следовательно, для погашения первичного поля в этой области форма углового распределения модуля дифрагированного поля должна быть близкой к распределению первичного поля. Этот эффект хорошо виден из рис. 3, где кривые 2, описывающие поведение дифрагированного поля, слабо осциллируют вдоль условной кривой распределения первичного поля в области тени.

Из приведенных результатов заключаем, что решение более простой приближенной системы уравнений (18) оправдано для анализа полей дифрагированных на конусах с большим углом раскрытия и позволяет эффективно вычислять поля при облучении конических поверхностей как со стороны вершины, так и в случаях размещения источника внутри узких конических рупоров.

#### Заключение

Для получения строгого решения скалярных задач дифракции ТМ-волн на конечных конусах предложено применять более простые регуляризирующие операторы, построенные с использованием мероморфных функций, приближенно учитывающих модовую структуру поля. В соответствии с этим приведена приближенная бесконечная система уравнений, учитывающая граничные условия задачи асимптотически, допускающая точное аналитическое обращение этими операторами в статическом пределе и совпадающая с точной в пределе  $\gamma = \pi/2$ . На примере вычисления диаграмм направленности показано, что приближенная

система дает равномерное относительно  $\gamma$  приближение с увеличением длины образующей конуса. На этой основе исследованы особенности формирования диаграмм направленности больших конусов.

Отметим, что рассматриваемые здесь регуляризирующие операторы использовались в качестве левосторонних регуляризаторов, но они могут быть применимы и в качестве правосторонних регуляризаторов. Кроме этого, они могут использоваться и для решения более широкого класса задач дифракции на структурах, содержащих конические поверхности.

Исследования, проведенные в этой публикации, выполнены при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект № 2.4/687).

#### Литература

1. Д. Б. Куриляк. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997, **40**, №2, с. 27-35.
2. В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов. Матричные уравнения типа свертки в задачах теории дифракции. Київ, Наук. думка, 1984, 292 с.
3. А. Ф. Леонтьев. Целые функции. Ряды экспонент. Москва, Наука, 1983. 175 с.

#### Regularisation Operators in a Problem of Scalar Diffraction by Conical Surfaces

D. B. Kuryliak

The set of regularisation operators for infinite systems of the linear algebraic equations for scalar diffraction problem by conical surfaces is considered. The operators with the most simple matrix elements are analyzed. On this basis the approximate set of equations for diffraction by finite cone which takes into account the boundary conditions asymptotically is introduced. The efficiency of this system is shown by numerically calculated patterns for the far fields, scattered by large-size cones.