

# Квантовая турбулентность: коэффициент сопротивления при колебаниях погруженного в He II кварцевого камертона

И. Гриценко<sup>1</sup>, А. Цескис<sup>2</sup>, Г. Шешин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: sheshin@ilt.kharkov.ua

<sup>2</sup>29 Weidenbusch, Leverkusen 51381, Germany

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2014 г., опубликована онлайн 23 февраля 2015 г.

Приведен анализ экспериментальных результатов движения He II под воздействием погруженного в него осциллирующего камертона. Показано, что до достижения некоторым параметром, имеющим структуру числа Рейнольдса, определенных пороговых значений нормальная и сверхтекучая компоненты движутся независимо. При этом сила и коэффициент сопротивления полностью определяются движением нормальной компоненты. При значениях параметра, превышающих пороговое (для скорости — критическое) значение, происходит турбулизация, которая при температурах ниже точки перехода в сверхтекучее состояние связана с квантовыми эффектами. Обсуждается также универсальность движения жидкого гелия при температуре выше точки перехода.

Наведено аналіз експериментальних результатів руху He II під впливом зануреного в нього осцилюючого камертона. Показано, що до досягнення деяким параметром, що має структуру числа Рейнольдса, визначених порогових значень нормальна і надплинна компоненти рухаються незалежно. При цьому сила і коефіцієнт опору повністю визначаються рухом нормальної компоненти. При значеннях параметра, що перевищують порогове (для швидкості — критичне) значення, починається турбулізація, яка при температурі нижче точки переходу в надплинний стан пов'язана з квантовими ефектами. Обговорюється також універсальність руху рідкого гелію при температурі вище точки переходу.

PACS: 47.27.-i Турбулентное течение;  
47.37.+q Гидродинамические аспекты сверхтекучести; квантовые жидкости;  
67.25.dg Транспорт, гидродинамика и сверхтекучесть;  
77.65.Fs Электромеханический резонанс, кварцевые генераторы.

Ключевые слова: сверхтекучий гелий, турбулентность, число Рейнольдса, коэффициент сопротивления.

## 1. Введение

В последние десятилетия существенно возросла интенсивность исследований явления, известного под названием квантовой турбулентности [1]. Основой для этих исследований является предложенное Л. Онсагером [2] и затем развитое Р. Фейнманом [3] понятие о квантованных макроскопических объектах в сверхтекучем гелии — вихревых нитях (и кольцах). Первая экспериментальная работа на эту тему [4] подтвердила существование таких объектов и стимулировала многочисленные исследования особенностей движения сверхтекучего гелия, в том числе, влияния на него имеющих в жидкости квантованных вихрей и колец, их

взаимодействия между собой, изучение трения между нормальной и сверхтекучей компонентами и т.д. В частности, экспериментальные и численные исследования (см. обзор [5]) указывают на то, что при определенных условиях движение сверхтекучего гелия приобретает стохастический характер, иногда его связывают также с известным спектром Колмогорова–Обухова, « $-5/3$ », свойственным турбулентности в обычной жидкости. Именно это обстоятельство позволяет предполагать, что и в сверхтекучем гелии при подходящих условиях движение является турбулентным, хотя, в отличие от обычной турбулентности, в сверхтекучей жидкости проявляется и квантовая природа явления.

Из экспериментальных методов исследования квантовой турбулентности, за счет относительно высокой точности и простоты измерений, наибольшее развитие получила техника колеблющегося тела, погруженного в исследуемую сверхтекучую жидкость. К таким телам относятся: колеблющаяся микросфера [6], решетка [7], проволока [8] и кварцевый камертон [9]. В настоящей работе анализируются данные, полученные в экспериментах с камертоном [10–12], выделяющихся из других методов особо высокой чувствительностью; добротность таковых на несколько порядков выше, чем во всех остальных случаях ( $Q \sim 10^6$ ), поэтому измерения можно проводить в широком интервале скоростей от  $10^{-3}$  см/с до 500 см/с.

Ниже содержится обсуждение результатов упомянутых выше экспериментов с колеблющимся камертоном [10,12] (подробное описание экспериментальной установки, методики эксперимента, исходные значения параметров и полученные данные приведены там же), показывающее, что анализ опытных данных на основе известных соотношений гидродинамики, в том числе и следующих из теории подобия, позволяет не только правильно описывать движение нормальной компоненты, но и выделить условия, при которых начинают проявлять себя квантовые эффекты в сверхтекучей компоненте. Согласно сказанному, результаты будут представлены в двух различных формах.

Как и в обычной гидродинамике, для описания режимов движения нормальной компоненты главной целью эксперимента является отыскание связи между коэффициентом сопротивления  $C_D$  и исходными значениями соответствующих параметров. В отличие от других работ на эту тему (см., например, [11]), в которых обсуждается зависимость коэффициента сопротивления  $C_D$  от скорости колебаний, здесь он будет представлен как функция некоторого безразмерного параметра, аналогично тому, как в обычной гидродинамике  $C_D$  является функцией числа Рейнольдса. Кроме того, будет представлена связь соответствующих размерных величин как таковых, а именно: скорость колебаний ножек камертона как функция некоторой возбуждающей колебания силы, совпадающей по величине с диссипативной составляющей силы сопротивления. Возможность обоих представлений следует из известных гидродинамических формул, приводимых в следующем разделе.

## 2. Необходимые гидродинамические соотношения

Упомянутая выше диссипативная часть силы сопротивления, которая далее обозначена символом  $F$ , определяется, разумеется, вязкой диссипацией, так что до достижения условий, при которых становится существенным взаимодействие нормального и сверхтекучего движений, она связана лишь с первым из них. Таким

образом, в следующих ниже формулах под  $\rho, \nu$  подразумеваются именно плотность и кинематическая вязкость нормальной компоненты.

Точное решение, описывающее движение (неограниченной) жидкости при колебаниях погруженного в нее тела конечных размеров, известно лишь для тела сферической формы. Однако, как это обычно принято, соответствующие формулы могут быть использованы и для тел других форм с той только разницей, что влияние формы тела на величину коэффициента сопротивления определяется экспериментальными данными. Кроме того, поскольку размеры ячейки значительно превосходят поперечные размеры ножек камертона, можно полагать, что указанные формулы могут быть применены в случае конечного объема жидкости. Это предположение оправдывается приведенными ниже результатами.

Упомянутое выше точное решение [13, §24] определяет зависимость полной силы сопротивления  $\Phi$  от скорости колебаний и в высокочастотном приближении (см. далее) имеет вид

$$\Phi = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{du}{dt} + 3\pi \rho R^2 \sqrt{2\nu\omega} \cdot u, \quad (1)$$

здесь  $\omega$  — круговая частота колебаний шара,  $R$  — его радиус,  $u$  — амплитуда скорости колебаний. Оправданность приближения высоких частот связана с малостью величины  $(2\nu/\omega R^2)^{1/2}$  по сравнению с единицей, что выполняется во всем диапазоне исходных параметров в [10,12]. Поскольку в эксперименте определяется некоторое среднее по времени  $t$  значение (диссипативной) силы  $F$  и, соответственно, коэффициента сопротивления, для нахождения последних

следует вычислить величину  $\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \Phi u dt$  при больших значениях  $\tau$  и затем разделить ее на характерное значение скорости  $u$ . В результате первое слагаемое в правой части соотношения (1) даст при таком усреднении нуль (это заранее очевидно также потому, что инерционная составляющая силы сопротивления не содержит вязкости), а оставшееся приведет к выражению

$$F = K \rho S \sqrt{2\nu\omega} \cdot u, \quad (2)$$

где  $S$  — площадь поперечного (по отношению к направлению скорости колебаний) сечения тела, а  $K$  является безразмерным параметром, зависящим от его формы. Таким образом, следует полагать, что, по крайней мере, при не слишком больших скоростях сила сопротивления линейно зависит от скорости. Соответствующий режим, как и в случае стационарного обтекания тела, мы будем называть ламинарным, а отклонение от такого поведения следует, очевидно, связать с возникновением турбулентности.

В соответствии с обычным для гидродинамики описанием явлений, основанным на теории подобия, анализ экспериментальных данных, как при ламинарном режиме движения, так и при развитии турбулентного режима, принято проводить в терминах безразмерного коэффициента сопротивления тела соответствующей формы (в рассматриваемом случае — камертона)  $C_D$ . По определению

$$C_D = \frac{F}{1/2 \rho u^2 S}, \quad (3)$$

так что с учетом (2) имеем (мы далее переходим к обозначению  $2K \Rightarrow K$ ):

$$C_D = K \sqrt{\frac{\nu \omega}{u^2}}. \quad (4)$$

При подстановке в соотношение (4) вместо частоты  $\omega$  ее значения, выраженного через скорость и амплитуду колебаний  $l$ , под знаком корня будет фигурировать величина, обратная  $ul/\nu$ ; последняя, как легко видеть, имеет структуру числа Рейнольдса. Таким образом, оказывается, что, в отличие от стационарного обтекания тела в ламинарном режиме, когда  $C_D = K Re^{-1}$ , в случае колеблющегося тела коэффициент сопротивления обратно пропорционален квадратному корню из некоторого условного «числа Рейнольдса», выраженного не через размеры тела, а через амплитуду его колебаний. Обозначая его как  $\Omega$ , будем иметь

$$C_D = K \Omega^{-1/2}, \quad (5)$$

причем под  $\nu$  далее подразумевается кинематическая вязкость нормальной компоненты.

Приведенный в следующем разделе анализ экспериментальных данных показывает, что соотношения (2) и (5) выполняются при значениях параметра  $\Omega$ , не превышающих некоторой определенной величины, после достижения которой происходит качественное изменение в поведении зависимости  $C_D(\Omega)$ . Легко понять, что при температурах выше температуры перехода в гелии, когда он представляет собой обычную жидкость, это означает смену ламинарного режима движения жидкости на переходный, который, по видимому, сменяется развитой турбулентностью с ростом  $\Omega$ . При температурах же ниже точки перехода отклонение от указанной зависимости демонстрирует действие квантовых эффектов, связанных со сверхтекучей компонентой и приводящих, в конечном итоге, к явлению, называемому квантовой турбулентностью. Последнее наглядно изображается приводимым в следующем разделе графиком, отражающим также поведение функции  $u(F)$ , которая в некотором интервале скоростей удовлетворяет соотношению (2), но далее, так же, как и  $C_D(\Omega)$ , меняет свою форму из-за влияния, оказываемого на движение квантовыми эффектами.

### 3. Обсуждение экспериментальных результатов: режимы движения нормальной и сверхтекучей компонент

Приступая к обсуждению экспериментальных результатов в терминах  $C_D(\Omega)$ , следует заранее иметь в виду, что их универсальность (возможность представить эти результаты в виде безразмерных соотношений) может быть связана лишь с движением нормальной компоненты. Действительно, из параметров, характеризующих не обладающую вязкостью сверхтекучую компоненту, невозможно образовать безразмерную характеристику, имеющую структуру числа Рейнольдса. Поэтому ясно, что квантовые эффекты, обязанные своим происхождением именно сверхтекучей компоненте, плотность которой растет с уменьшением температуры, с изменением последней начинают проявлять себя при различных значениях параметра  $\Omega$ .

Как видно на рис. 1, при температуре выше критической (4,2 К) и незначительно ниже критической (2,114 К), когда плотность нормальной компоненты велика, зависимость  $C_D(\Omega)$  в точности совпадает с (5); при этом линейная часть графика (ламинарный режим) сменяется нелинейной (переходный режим) при значениях параметра  $\Omega$  порядка нескольких десятков. Можно предполагать, что при увеличении  $\Omega$  за переходным режимом следует развитый турбулентный. Заметим, что обсуждаемые эксперименты дают принципиальную возможность исследования генерации турбулентности в обычной жидкости колеблющимся с большой частотой телом. При температурах ниже  $\approx 1,6$  К кривые  $C_D(\Omega)$  отклоняются от универсальной зависимости, причем это отклонение происходит при тем меньшем значении  $\Omega$ , чем ниже соответ-

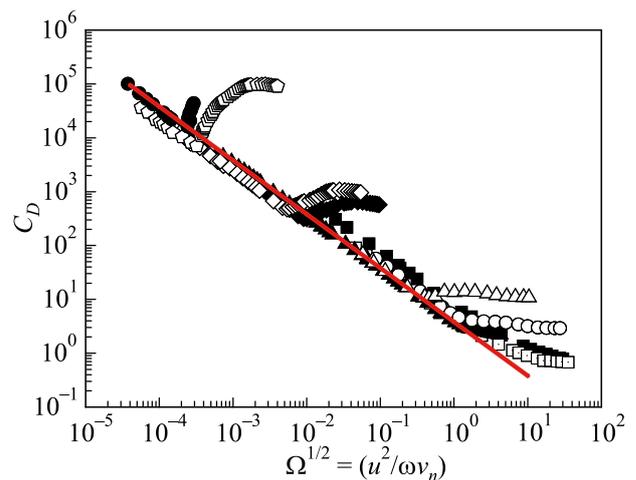


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Зависимость безразмерного коэффициента сопротивления от эффективного числа Рейнольдса при разных  $T$ , К: 4,2 (■), 2,114 (□), 1,695 (▲), 1,642 (○), 1,305 (△), 0,778 (◆), 0,731 (◇), 0,43 (◇) и 0,307 (●). Сплошная (красная) прямая — линейный, ламинарный режим движения.

ствующая температура. Это явление схоже с тем, которое обуславливается в обычной гидродинамике влиянием шероховатости границ [14], но в сверхтекучей жидкости его естественно связывать с действием квантовых эффектов (см. ниже). На рис. 1 видно, что это действие заметнее при низких температурах (0,43 К и 0,307 К), при которых на кривых появляется излом. По-видимому, последнее объясняется тем фактом, что плотность нормальной компоненты при этих температурах мала и, таким образом, она оказывает незначительное влияние на квантовые явления в сверхтекучей.

Рассмотрим теперь, как результаты обсуждаемых экспериментов представляются в виде зависимостей между размерными физическими величинами в терминах  $u(F)$ .

Эта зависимость приведена на рис. 2. Видно, что при достаточно малых значениях  $F$  и  $u$  она при всех температурах сводится к линейной, согласующейся с соотношением (2). Затем, при скоростях выше примерно 5–6 см/с и температурах ниже температуры перехода, функция  $u(F)$  отклоняется от линейной (и становится близкой к квадратичной), причем, как и в ситуации с зависимостью  $C_D(\Omega)$ , соответствующий излом становится тем резче, чем ниже температура. Температурам 4,2 и 2,114 К, таким же образом, как на рис. 1, отвечает плавный переход от линейной к нелинейной зависимости скорости колебаний от силы сопротивления, как это и должно быть при движении обычной жидкости. Изломы же при низких температурах свидетельствуют о влиянии квантовых эффектов на движение жидкости в экспериментальной ячейке. Поскольку последние приводят к качественным изменениям движения, сходным с имеющим место при пере-

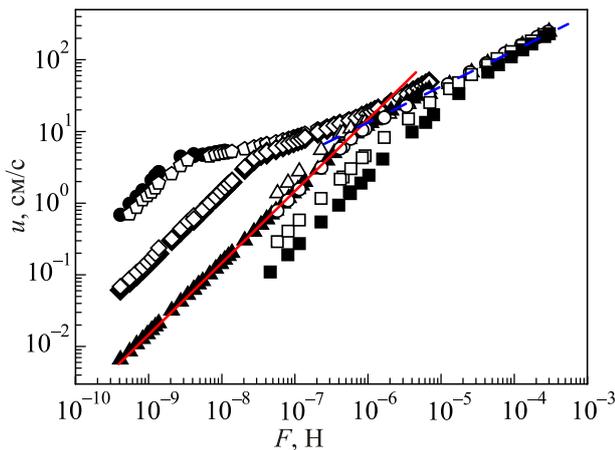


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Зависимость скорости колебания ножки камертона от возбуждающей колебания силы в  ${}^4\text{He}$  при различных  $T$ , К: 4,2 (■), 2,114 (□), 1,695 (▲), 1,642 (○), 1,305 (△), 0,778 (◆), 0,731 (◇), 0,43 (◐) и 0,307 (●). Сплошная прямая — ламинарный режим движения, пунктирная линия — турбулентный режим движения жидкого  ${}^4\text{He}$ .

ходе к турбулентности в обычной жидкости, т.е. к турбулизации движения, в этом случае, применительно к движению He II, как раз и принято говорить о соответствующих явлениях как о квантовой турбулентности.

Обычно считается (см. [5] и цитируемую там литературу), что такая — квантовая — турбулизация обусловлена генерацией макроскопических квантованных вихревых нитей или колец, их взаимодействием между собой или с твердыми поверхностями, ограничивающими занятый движущимся жидким гелием объем. В экспериментах, результаты которых здесь обсуждаются, такая турбулизация начиналась при указанных выше значениях скорости 5–6 см/с. Согласно различным экспериментальным данным, собранным в работе [15], значение скорости, при которой происходит квантовая турбулизация, лежит в интервале от нескольких единиц до 20 см/с. Эта скорость называется критической и, по-видимому, определяется условиями эксперимента (размерами экспериментальной ячейки, формой и размерами колеблющегося тела и т.д.). Отметим, что, несмотря на многочисленные работы, имеющиеся на эту тему, удовлетворительного объяснения как существования критической скорости, так и теоретической оценки ее величины, до сих пор не найдено.

Что касается квантовой турбулентности как таковой, то можно предполагать, что с ростом параметра  $\Omega$ , например, за счет увеличения скорости колебаний тела, взаимодействие квантовых вихрей между собой и рост их суммарной длины в единице объема (подобен росту плотности числа квантованных вихревых нитей при увеличении скорости вращения содержащего He II цилиндрического сосуда [16]) в конце концов будут имитировать движение обычной вязкой жидкости. В таком случае все «расслоенные» кривые рис. 1 должны были бы слиться между собой; такое слияние свидетельствовало бы о наступлении универсального режима развитой турбулентности. До такого слияния квантовыми эффектами пренебречь нельзя; их доминирующим влиянием, по-видимому, определяются основные свойства квантовой турбулентности, отличающие ее от классического аналога.

#### 4. Заключение

Выше представлены и проанализированы данные экспериментов по исследованию движения сверхтекучего и нормального жидкого гелия при колебаниях погруженного в него камертона. Представление этих данных в виде закона подобия, при котором коэффициент сопротивления  $C_D$  рассматривается как функция безразмерного параметра  $\Omega$  (эффективного числа Рейнольдса), дает возможность сделать вывод об универсальности движения нормальной компоненты при всех температурах при значениях  $\Omega$ , не превышающих некоторого (но меняющегося с изменением значе-

ния температуры). После достижения этого порогового значения режим движения жидкости меняется с ламинарного на переходный, причем это изменение проявляется тем отчетливее, чем ниже температура жидкости. Дальнейший ход кривой  $C_D(\Omega)$ , отличный по своему виду от такового при температурах выше точки перехода к сверхтекучему состоянию, свидетельствует о зарождении и развитии (с ростом  $\Omega$ ) квантовой турбулентности.

Универсальность зависимости  $C_D(\Omega)$ , характеризующей движение обычной вязкой жидкости, свидетельствует о том, что при значениях  $\Omega$  ниже порогового сверхтекучая и нормальная компоненты практически не взаимодействуют друг с другом. На это же обстоятельство указывает и линейность зависимости скорости от силы сопротивления,  $u(F)$ , в интервале, ограниченном (справа) критическим значением  $u \approx 5\text{--}6$  см/с. Дальнейший рост скорости или, соответственно, параметра  $\Omega$ , когда турбулизация уже произошла, должен привести в конце концов к тому, что для всех  $\Omega \geq \Omega^*$  (при всех температурах!) He II будет двигаться как обычная вязкая жидкость. Таким образом, соответствующие разным температурам кривые  $C_D(\Omega)$  в точке  $\Omega = \Omega^*$  сольются, и в результате на плоскости  $C_D(\Omega)$ , вся область между универсальной кривой (рис. 1) — слева и вертикалью, пересекающей ось  $\Omega$  в точке  $\Omega^*$  — справа, будет заполнена кривыми, характеризующими именно режим квантовой турбулентности.

Необходимо в заключение сделать также следующее замечание. Как и сама формула (1), следующие из нее соотношения (2)–(5), с которыми согласуются обсуждаемые экспериментальные данные, описывают периодическое движение жидкости. Можно думать, таким образом, что в экспериментах с периодически колеблющимися в He II телами его движение также периодически, включая и движение сверхтекучей компоненты. Следовательно, периодическим должно быть и поведение квантованных вихрей, имеющих в жидкости еще до перехода к турбулентному режиму. Возможно, поэтому квантовая турбулизация, являющаяся результатом взаимодействия таких вихрей, оказывается формальным следствием нарушения этой периодичности.

Авторы выражают признательность Э.Я. Рудаковскому, К.Э. Немченко и С.С. Соколову за полезные замечания и обсуждение результатов работы.

Работа была выполнена при частичной поддержке Украинско-японского гранта (проект № Ф52.2/005).

1. W.F. Vinen, *J. Low Temp. Phys.* **161**, 419 (2010).
2. L. Onsager, *Nuovo Cim.* **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
3. R.P. Feynman, in: *Progress in Low Temp. Phys.* C.J. Gorter (ed.), North Holland, Amsterdam (1955), v. 1.
4. W.F. Vinen, *Nature* **181**, 1524 (1958).
5. W.F. Vinen and L. Skrbek, *PNAS* **11**, Suppl. 1, 4699 (2014).
6. M. Niemetz, H. Kerscher, and W. Schoepe, *J. Low Temp. Phys.* **124**, 163 (2001).

7. H.A. Nicholl, L. Skrbek, P.C. Hendry, and P.V.E. McClintock, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 244501 (2004).
8. D.I. Bradley, S.N. Fisher, A.M. Guenault, R.P. Haley, V. Tsepelin, G.R. Pickett, and K.L. Zaki, *J. Low Temp. Phys.* **154**, 97 (2009).
9. M. Blažková, M. Človečko, V.B. Eltsov, E. Gažo, R. de Graaf, J.J. Hosio, M. Krusius, D. Schmoranzler, W. Schoepe, L. Skrbek, P. Skyba, R.E. Solntsev, and W.F. Vinen, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 525 (2008).
10. Г.А. Шешин, А.А. Задорожко, Э.Я. Рудаковский, В.К. Чаговец, Л. Скрбек, М. Блажкова, *ФНТ* **34**, 1111 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 875 (2008)].
11. M. Blažková, D. Schmoranzler, L. Skrbek, and W.F. Vinen, *Phys. Rev. E* **79**, 054522 (2009).
12. И.А. Гриценко, А.А. Задорожко, А.С. Неонета, В.К. Чаговец, Г.А. Шешин, *ФНТ* **37**, 695 (2011) [*Low Temp. Phys.* **34**, 551 (2011)].
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
14. И. Никурадзе, в кн.: *Проблемы турбулентности*, изд-во ОНТИ НКТП СССР, Москва (1936), с. 75.
15. R. Hänninen, M. Tsubota, and W.F. Vinen, *arXiv: cond. matt/0610224* (2006).
16. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1978), ч. 2.

## Quantum turbulence: the drag coefficient under oscillations of the quartz tuning fork immersed in He II

I. Gritsenko, A. Tseskis, and G. Sheshin

The experimental data on the motion of He II excited by an oscillating quartz tuning fork immersed in helium are analyzed. It is shown that before attaining certain threshold values by a parameter, with the structure of the Reynolds number, the normal and superfluid components move independently. In this case the force and the drag coefficient are completely determined by the motion of the normal component. When the parameter exceeds the threshold value which is critical for velocity the turbulent flow regime begins to work. This regime at a temperature below that for the transition to a superfluid state is attributed to the formation of quantized vortices. The universality of motion of liquid helium at a temperature above the transition point is discussed.

PACS: **47.27.-i** Turbulent flows;  
**47.37.+q** Hydrodynamic aspects of superfluidity; quantum fluids;  
**67.25.dg** Transport, hydrodynamics, and superflow;  
**77.65.Fs** Electromechanical resonance, quartz resonators.

Keywords: superfluid helium, turbulence, Reynolds number, drag coefficient.