Физика низких температур, 2005, т. 31, № 2, с. 226–236

О новых квантовых состояниях в режиме дробного квантового эффекта Холла

Э. А. Пашицкий

Институт физики НАН Украины, пр. Науки, 46, г. Киев, 03028, Украина
E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 30 июня 2004 г., после переработки 13 сентября 2004 г.

Показано, что наблюдавшиеся экспериментально в режиме дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) новые дробные значения фактора заполнения $\nu = 4/11$, $4/13$, $5/13$, $5/17$, $6/17$, $3/8$ и $3/10$ (а также дополнительные дроби $5/8$ и $7/11$), которые не удовлетворяют стандартной модели композитных фермионов (КФ), могут быть описаны в рамках расширенной систематики квантовых состояний ДКЭХ, основанной на предположении Гальперина о сосуществовании свободных электронов и связанных электронных пар в двумерных ($2D$) системах в термодинамическом пределе. Возможность существования связанных триплетных «куперовских» пар в полностью поляризованном состоянии на нижайшем спиновом уровне Ландау может быть обусловлена электрон-фононным взаимодействием $2D$ электронов с $2D$ поверхностными акустическими и оптическими фононами, локализованными вблизи интерфейса в полупроводниковых гетероструктурах. Предлагаемая расширенная систематика включает в себя, как частные случаи, модель Лафлина, ранние иерархические модели ДКЭХ и модель КФ с некоторыми ее обобщениями и позволяет описать абсолютно все наблюдаемые дробные значения ν, включая дроби с четными знаменателями (в частности, $\nu = 3/8$ и $3/10$), а также предсказать возможность существования новых «экзотических» дробей (например, $\nu = 5/14$, $5/16$, $3/20$).

Показано, що нові дробові значення фактора заповнення $\nu = 4/11$, $4/13$, $5/13$, $5/17$, $6/17$, $3/8$ та $3/10$ (а також додаткові дроби $5/8$ та $7/11$), що спостерігались експериментально в режимі дробового квантового ефекту Холла (ДКЕХ), які не задовольняють стандартній моделі композитних ферміонів (КФ), можуть бути описані в рамках розширеної систематики квантових станів ДКЕХ, яка базується на припущенні Гальперіна про співіснування вільних електронів та зв'язаних електронних пар у двовимірних ($2D$) системах у термодинамічній границі. Можливість існування зв'язаних триплетних «куперівських» пар в повністю поляризованому стані на найнижчому спіновому рівні Ландау може бути обумовлена електрон-фононною взаємодією $2D$ електронів з $2D$ поверхневими акустичними та оптичними фононами, що локалізовані поблизу інтерфейса у напівпровідникових гетероструктурах. Запропонована розширена систематика включає в себе, як окремі випадки, модель Лафліна, попередні ієрархічні моделі ДКЕХ і модель КФ з деякими її узагальненями і дозволяє описати абсолютно усі дробові значення ν, що спостерігаються, включаючи дроби з парними знаменниками (зокрема, $\nu = 3/8$ та $3/10$), а також передбачає можливість існування нових «екзотичних» дробів (наприклад, $\nu = 5/14$, $5/16$, $3/20$).

PACS: 73.40.Hm

1. Введение

Принято считать, что все особенности холловского сопротивления $R_H = R_{xy}$ (плато) и транспортного магнитосопротивления R_{xx} (минимумы) двумерных ($2D$) электронных систем в зависимости от магнитного поля B в режиме дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) описываются моделью композитных фермионов (КФ) [1]. Такие КФ формируются на основе связанных состояний (композиций) поляризованных по спину $2D$ электронов с четным числом приходящихся на один электрон квантов магнитного потока $\Phi_0 = hc/e$ (где h — постоянная Планка, c — скорость света, e — заряд электрона).

В этом смысле модель КФ [1], казалось бы, противоречит исходной модели Лафлина [2] для ДКЭХ, согласно которой на каждый электрон приходится нечетное число квантов потока $m = 2n + 1$ ($n = 1,2,3,\ldots$). Тем не менее простые лафлиновские дроби для фактора заполнения нижайшего спинового уровня Ландау (УЛ) $\nu = 1/3,\ 1/5,\ 1/7,\ \ldots$ содержатся в схеме КФ, которая приводит к следующему двухпараметрическому соотношению для ν:

$$\nu = \frac{N_e}{N_\Phi} = \frac{n}{2kn \pm 1} \quad (k, n = 1,2,3,\ldots), \tag{1}$$

где N_e и N_Φ — полные числа электронов и квантов потока в $2D$ системе, k определяет число пар квантов потока, приходящихся на каждый КФ, а n нумерует новые заполненные УЛ в эффективном магнитном поле [1], так что ДКЭХ может рассматриваться как целочисленный квантовый эффект Холла (ЦКЭХ) в системе невзаимодействующих КФ.

Однако в экспериментах [3], проведенных на сверхчистых образцах с рекордной электронной подвижностью $\mu_e \approx 10^7\ \text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, при сверхнизких температурах $T \approx 35$ мК были обнаружены новые особенности R_{xx} при дробных значения фактора заполнения ν, которые не описываются стандартной моделью КФ [1]. Эти новые, не наблюдавшиеся ранее дроби лежат в интервалах между хорошо известными дробями $\nu = 2/7$, $1/3$ и $2/5$ и соответствуют следующим значениям $\nu = 5/17,\ 3/10,\ 4/13,\ 6/17,\ 4/11,\ 3/8,\ 5/13$ (см. [3]), а также дополнительным значениям $(1-\nu) = 5/8$ и $7/11$, связанным с электронно-дырочной симметрией $2D$ состояний на УЛ.

Как отмечалось в [3], все новые дроби с нечетными знаменателями формально могут быть описаны ранней иерархической моделью энионов [4,5], однако считается, что некоторые из этих состояний являются неустойчивыми (сжимаемыми) [6,7], либо не полностью поляризованными по спину [8,9]. Кроме того, анионная модель не описывает дроби с четными знаменателями.

В связи с этим авторы [3] высказали предположение, что в их экспериментах наблюдалось новое явление ДКЭХ для слабо взаимодействующих КФ при частично заполненных высших УЛ. В этом случае в соотношении (1) число n должно быть заменено на некоторый параметр ν^*:

$$\nu = \frac{\nu^*}{2k\nu^* \pm 1}, \tag{2}$$

где ν^* — набор зависящих от k нецелых чисел, которые можно обозначить как ν_{2K}. В частности, в [3] было показано, что дробь $\nu = 4/11$ соответствует значению $\nu^* = \nu_2 = 1 + 1/3$, дробь $\nu = 5/13 \to \nu_2 = 1 + 2/3$, $\nu = 6/17 \to \nu_2 = 1 + 1/5$, $\nu = 3/8 \to \nu_2 = 1 + 1/2$, $\nu = 4/13 \to \nu_4 = 1 + 1/3$, $\nu = 5/17 \to \nu_4 = 1 + 2/3$, а $\nu = 3/10 \to \nu_4 = 1 + 1/2$. (Заметим, что при вычислении дробей $\nu = 4/13$, $\nu = 5/17$, $\nu = 7/11$ и $\nu = 5/8$ в [3] были допущены ошибки.)

Замена целого числа $n = 1$ в (1) на неправильные дроби $\nu^* > 1$ соответствует ДКЭХ для композитных фермионов, но не на нижайшем, а на следующем частично заполненном УЛ в пространстве КФ, по аналогии с ДКЭХ для обычных $2D$ электронов на высших уровнях Ландау в режиме ЦКЭХ (например, для состояний типа $\nu = 4/3$, $\nu = 5/3$).

В [10] недавно была предпринята попытка теоретического обоснования высказанной в [3] идеи о следующей генерации (иерархии) ДКЭХ на взаимодействующих КФ для объявления необычных дробей в рамках расширенной модели КФ с таким значением $\nu^* > 1 + \bar{\nu}$ в (2) при $k = 1$, которое приводит к следующему выражению для фактора заполнения в интервале $1/3 < \nu < 5/3$:

$$\nu = \frac{3n+1}{8n \pm 3} \quad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{3}$$

Этот результат был получен в [10] с помощью численной диагонализации кулоновского гамильтониана системы N_e электронов (N_e = 8, 12, 16, 20, 24), расположенных на поверхности сферы, в центре которой помещен магнитный монополь Дирака с «зарядом» Q (конфигурация Холдейна) [5]. С помощью специального метода Монте-Карло [9] было получено значение полного магнитного потока через сферу $2Q\Phi_0$ в зависимости от N_e и затем из отношения $N_e/2Q\Phi_0$ в термодинамическом пределе $N_e \to \infty$ найдено соотношение (3).

Однако такая модель может объяснить существование только двух необычных дробей $\nu = 4/11$ и $\nu = 5/13$ из семи новых особенностей.

Между тем все новые особенности R_{xx} [3], а также абсолютно все наблюдавшиеся ранее в режиме ДКЭХ особенности R_{xx} и R_{xy}, включая дроби с четными знаменателями ($\nu = = 1/2,\ 1/4,\ 1/6,\ \ldots$), которые являются предельными состояниями модели КФ [1] при $n \to \infty$ для разных k = 1, 2, 3, …, описываются предложенной в [11] формулой для фактора заполнения:

$$\nu = \frac{4m + p - 4r}{mp - r^2} \tag{4}$$

или ее дополнением:

$$\tilde{\nu} = \frac{4r - p - 4m}{r^2 - mp}\ , \qquad (5)$$

где m — нечетное число, p — четное число, r — число произвольной четности. Формула (4) получена в [11] на основе предположения, что наряду со свободными $2D$ электронами на нижайшем спиновом УЛ могут существовать связанные электронные пары, которые сосуществуют (интерферируют) с электронами и участвуют наравне с ними во взаимодействии с квантами потока.

Следует подчеркнуть, что соотношение (4) получено с помощью пробной волновой функции, которая является антисимметричной (нечетной) относительно перестановки полностью поляризованных электронов, находящихся на нижайшем спиновом УЛ, и симметричной (четной) относительно перестановки связанных электронных пар в триплетном состоянии со спином $\sigma = 1$. Иными словами, в [11] использован обычный подход к описанию фермионов и бозонов, характерный для трехмерных ($3D$) систем, хотя известно [4], что в квантовых $2D$ системах неразличимые частицы или квазичастицы (например, энионы) подчиняются аномальной статистике и могут формально обладать произвольным спином.

Тем не менее следует иметь в виду, что в реальных кристаллах электроны, локализованные в квантовой яме вблизи интерфейса в результате размерного квантования спектра, строго говоря, нельзя считать истинно двумерными, поскольку их волновая функция «размазана» вдоль третьего измерения в некоторой области конечной ширины. Это означает, что операция перестановки двух электронов, несмотря на двумерный характер их квантового движения в нижайшей $2D$ подзоне, может реализоваться по бесконечно большому числу различных $3D$ траекторий, топологически отличающихся от плоских $2D$ траекторий. В связи с этим разделение на фермионы (электроны) и бозоны (связанные пары) при построении волновой функции Гальперина [11] вполне оправдано. Однако в [11] не было высказано никаких предположений относительно динамического механизма образования связанных электронных пар в полупроводниковых гетероструктурах в квантующем магнитном поле.

В [12] показано, что связанные пары вырожденных электронов в нижайшей квантовой $2D$ подзоне (в дальнейшем называемых $2D$ электронами), как на нижайшем спиновом УЛ, так и на высших частично заполненных УЛ, могут возникать, аналогично куперовским парам в сверхпроводниках, за счет электрон-фононного взаимодействия (ЭФВ) с поверхностными $2D$ фононами, локализованными вблизи границы раздела (интерфейса) между разными кристаллами (GaAs и AlGaAs) в полупроводниковых гетероструктурах. Эффективное межэлектронное притяжение, обусловленное обменом виртуальными акустическими и оптическими «интерфейсными» фононами с малой фазовой (групповой) скоростью распространения в плоскости интерфейса, может превышать кулоновское отталкивание $e^2/\varepsilon l_H$ (где ε — диэлектрическая проницаемость кристаллов, а $l_H = \sqrt{\hbar c/eB}$ — квантовая магнитная длина).

Более того, как было показано в [13], кулоновское взаимодействие между $2D$ электронами на одном и том же спиновом УЛ антисимметрично относительно некоторого интегрального преобразования в импульсном представлении, так что антисимметризованный кулоновский матричный элемент при достаточно больших импульсах меняет знак, т.е. соответствует некоторому эффективному притяжению в импульсном пространстве. Этот эффект обусловлен сильным (бесконечным при $r \to 0$) отталкиванием между полностью поляризованными электронами с параллельными спинами за счет принципа Паули, который играет гораздо более важную роль в формировании состояний так называемой «несжимаемой» $2D$ электронной жидкости Лафлина [2], чем кулоновское отталкивание. Изменение знака фурье-компоненты кулоновского потенциала при больших импульсах можно трактовать как «магнитную переэкранировку» кулоновского взаимодействия электронами на одном и том же УЛ [13]. В настоящей работе приведен вывод соотношения Гальперина (4) и его дополнения (5) на основе многочастичной волновой функции лафлиновского типа [2,11], а также общий универсальный алгоритм для вычисления любых правильных дробей $\nu = q/k$ с $q < k$, соответствующих особенностям R_{xx} и R_{xy} в режиме ДКЭХ, в рамках модели $2D$ системы с суперпозицией свободных электронов и связанных пар на нижайшем УЛ.

2. Связанные электронные пары и волновая функция Гальперина

Гипотеза Гальперина [11] о существовании в $2D$ электронных системах в режиме ДКЭХ связанных пар электронов на нижайшем спиновом УЛ была обоснована в работах [12], в которых был предложен конкретный механизм образования таких пар за счет взаимодействия $2D$ электронов с поверхностными $2D$ акустическими и оптическими фононами, локализованными вблизи интерфейса в гетероструктуре GaAs/AlGaAs. Как известно, волновые функции таких поверхностных фононов, распространяющихся с относительно малыми фазовыми (групповыми) скоростями в плоскости интерфейса, экспоненциально затухают при удалении от интерфейса $\sim e^{-kx}$ на характерном расстоянии $k^{-1} = \lambda/2\pi$ (где λ — длина волны фонона, а k — волновое число вдоль поверхности интерфейса).

В то же время характерными масштабами для вырожденных $2D$ электронов в полупроводниковой гетероструктуре являются следующие: расстояние d от интерфейса до максимума плотности локализованных в квантовой яме электронов, обратное волновое число ферми $k_F^{-1} = (2\pi n_e)^{-1}$ при средней $2D$ плотности электронов n_e и квантовая магнитная длина в магнитном поле l_H. При $B \approx 10$ Тл и $n_e \approx 10^{-11}$ см$^{-2}$ получаем оценки $l_h \le 10^{-6}$ см и $k_F^{-1} \ge 10^{-6}$ см. Такой же порядок величины имеет и расстояние d. Это означает, с одной стороны, что волновые числа виртуальных $2D$ фононов, которые могут возбуждаться $2D$ электронами на интерфейсе за счет ЭФВ и обмен которыми может обеспечить притяжение, необходимое для спаривания электронов, будут того же порядка, что k_F и l_H^{-1}. С другой стороны, это означает, что $2D$ электроны, находящиеся на расстоянии $d \le 10^{-6}$ см от интерфейса, могут вполне эффективно взаимодействовать с поверхностными фононами, амплитуда которых незначительно ослабляется (менее чем в e раз) на длине d.

В [12] вычислены как матричные элементы ЭФВ с поверхностными неполярными акустическими и оптическими фононами, так и матричные элементы кулоновского взаимодействия [13] для первых двух нижайших УЛ, и показано, что в определенных областях импульсного пространства возникает эффективное притяжение между $2D$ электронами, которое может приводить к их «куперовскому» спариванию. Такое спаривание электронов, находящихся на одном и том же спиновом УЛ, является триплетным с суммарным спином пары, равным $\sigma = 1$. Благодаря конечной ширине области размытия волновых функций электронов в $2D$ квантовой яме вдоль третьего измерения и, следовательно, конечной вероятности перестановки тождественных частиц вдоль различных неплоских траекторий сохраняется обычная для $3D$ пространства связь между спином и статистикой для фермионов и бозонов. Поэтому связанные электронные пары можно считать бозонами, а пространственную часть полной волновой функции $2D$ системы, по аналогии с функцией Лафлина [2], можно представить в виде [11]:

$$\Psi_H \sim \prod_{\mu,\nu}^{(M,M)} (Z_\mu - Z_\nu)^m \prod_{i,j}^{(N,N)} (R_i - R_j)^{2u} \times$$

$$\times \prod_{i,\mu}^{(2N,M)} (Z_i - Z_\nu)^w \prod_{j,\nu}^{(N,M)} (R_j - Z_\nu)^q \prod_{j}^{(N)} (Z_j - Z_{j-1})^{-t}, \tag{6}$$

где M — число свободных электронов, N — число связанных пар, Z_μ и Z_ν — комплексные $2D$ координаты свободных электронов, Z_i и Z_{i-1} — координаты тех электронов, которые образуют пары, а $R_i = (Z_i + Z_{i-1})/2$ — координаты центров масс связанных электронных пар. В силу симметрийных свойств волновых функций частиц с полуцелым спином (фермионов) и связанных пар с целым спином (бозонов) показатели степени в соответствующих произведениях (6) имеют разную четность. В первом произведении, которое описывает обменные корреляции свободных электронов, показатель степени бинома m — нечетное целое число, так же как и показатели степени w и t, которые соответствуют корреляциям между свободными и связанными электронами (с координатами Z_μ и Z_i) и между связанными электронами одной и той же пары (с координатами Z_j и Z_{j-1}). В то же время во втором произведении показатель степени должен быть всегда четным $2u$ (u — произвольное целое число) благодаря симметрии волновой функции относительно перестановок связанных пар, а показатель q, соответствующий перестановкам пар и свободных электронов, имеет произвольную четность (q — любое целое число).

Представим квадрат модуля функции (6) в виде ффективного канонического распределения Гиббса [2].

$$|\Psi_H|^2 = \exp\{-\beta\Phi_H\}, \tag{7}$$

где

$$-\beta\Phi_H \sim 2\Bigg\{ m\sum_{\mu,\nu}^{(M,M)} \ln(Z_\mu - Z_\nu) + 2u\sum_{i,j}^{(N,N)} \ln(R_i - R_j) + + w\sum_{i,\mu}^{(2N,M)} \ln(Z_i - Z_\mu) + q\sum_{j,\nu}^{(N,M)} \ln(R_j - Z_\nu) - - t\sum_{i}^{(N)} \ln(Z_i - Z_{i-1}) \Bigg\}. \tag{8}$$

Здесь Φ_H играет роль эффективной «свободной энергии» многокомпонентной $2D$ классической «заряженной плазмы» с логарифмическим «кулоновским взаимодействием» между частицами (см. [2]). Поскольку в дальнейшем спины никакой роли не играют (задача эффективно является «бесспиновой»), предполагается, что электроны и пары на нижайшем УЛ эквивалентны, так что (8) можно переписать в виде

$$-\beta\Phi_H \sim 2\left\{m\sum_{\mu,\nu}^{(M,M)}\ln(Z_\mu - Z_\nu) + 2u\sum_{i,j}^{(N,N)}\ln(Z_i - Z_j) + \right.$$
$$\left. + (2w+q)\sum_{i,\mu}^{(N,M)}\ln(Z_i - Z_\mu) - t\sum_i^{(N)}\ln(Z_i - Z_{i-1})\right\}. \tag{9}$$

Следующим шагом является закрепление одной из координат в каждом логарифмическом слагаемом в одной и той же точке Z_0, так что в двойных суммах одно из суммирований заменяется просто на число M или N, а выражение (9) приводится к виду

$$-\beta\Phi_H \sim 2\left\{mM\sum_{\mu}^{(M)}\ln(Z_\mu - Z_0) + 2uN\sum_{i}^{(N)}\ln(Z_i - Z_0) + \right.$$
$$\left. + (2w+q)N\sum_{\mu}^{(M)}\ln(Z_\mu - Z_0) - t\sum_i^{(N)}\ln(Z_i - Z_0)\right\}. \tag{10}$$

Здесь сразу можно перейти к термодинамическому пределу, полагая $M \to \infty$ и $N \to \infty$, так что с хорошей точностью можно пренебречь последним членом в (10). В результате, собирая слагаемые в суммах по μ и по i, с учетом того, что полное число электронов в $2D$ системе равно

$$N_e = 2N + M, \tag{11}$$

представим (10) в следующем виде:

$$-\beta\Phi_H \sim 2\left\{\left[mM + (2w+q)N\right]\sum_{\mu}^{(M)}\ln(Z_\mu - Z_0) + \right.$$
$$\left. + uN\sum_i^{(2N)}\ln(Z_i - Z_0)\right\}. \tag{12}$$

Отсюда с учетом (11) следует, что полное число квантов магнитного потока в $2D$ системе равно:

$$N_\Phi = mM + (2w + q + u)N \equiv mM + rN, \tag{13}$$

где число $r = (2w + q + u)$ имеет произвольную четность, поскольку $2w$ — четное число, а q и u — числа с произвольной четностью. Минимальное (нечетное) значение $w = 1$, а минимальные (четные) значения $q = u = 0$, так что $r \geq 2$.

Исходя из общего определения, представим фактор заполнения нижайшего УЛ с учетом (11) и (13) в виде

$$\nu = \frac{N_e}{N_\Phi} = \frac{2N + M}{mM + rN}, \tag{14}$$
$$(m = 2n+1,\ r = n+1,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

3. Алгоритм вычисления фактора заполнения в режиме ДКЭХ

Из выражения (14) следует, что в отсутствии связанных электронных пар, когда их число $N = 0$, фактор заполнения ν, при котором наблюдаются особенности проводимости, сводится к простым лафлиновским дробям [2]:

$$\nu = \frac{1}{m} \equiv \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots . \tag{15}$$

С другой стороны, если все электроны связаны в пары, т.е. число свободных электронов $M = 0$, из (14) следуют гальперинские дроби (при $r \geq 2$):

$$\nu = \frac{2}{r} = 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{1}{5}, \ldots . \tag{16}$$

Здесь следует выделить дроби с числителем 2, которые не содержатся в теории Лафлина [2], но описываются моделью КФ [1] (см. соотношение (1)), а также дроби с четными знаменателями $\nu = 1/2$, $1/4$, $1/8$, ..., которые в модели КФ являются предельными состояниями при $n \to \infty$ для разных $k = 1,2,3,\ldots$. Кроме того, заметим, что в (16) содержатся и лафлиновские дроби (15).

Для того, чтобы вычислить ν при произвольных M и N, представим выражение (14) в виде

$$\nu = \frac{2 + M/N}{r + mM/N} \tag{17}$$

и учтем, что простые лафлиновские дроби (15) следуют из (14) или (17) в двух случаях: при $N = 0$ и при $r = 2m$. Это означает, что в общем случае можно положить $N \sim (2m - r) \geq 0$ при $r \leq 2m$ (но $r \geq 2$), либо $N \sim (r - 2m) > 0$ при $r > 2m$.

С другой стороны, при $M = 0$ можно формально положить $\nu = 2/r \equiv 4/p$, т.е. ввести некоторое четное число $p = 2r$, а в общем случае можно считать, что $M \sim (p - 2r) \geq 0$ при $p \geq 2r$ либо $M \sim (2r - p) > 0$ при $p < 2r$.

В результате, считая для простоты все коэффициенты пропорциональности одинаковыми, можно представить отношение числа свободных электронов M к числу связанных пар N в виде

$$\frac{M}{N} = \frac{p - 2r}{2m - r} > 0, \text{ либо } \frac{M}{N} = \frac{2r - p}{r - 2m} > 0. \tag{18}$$

Подставляя первое из этих соотношений в (17), получаем выражение Гальперина [4] для фактора заполнения (4) справедливое при $r \leq 2m$ и $p \geq 2r$, а подстановка в (17) второго соотношения (18) приводит к дополнительному соотношению (5), справедливому при $r > 2m$ и $p < 2r$.

Таким образом, существует трехпараметрическое множество значений фактора заполнения, определяющееся формулами

$$\nu = \frac{4m + p - 4r}{mp - r^2} > 0, \text{ либо } \tilde{\nu} = \frac{4r - p - 4m}{r^2 - mp} > 0 \quad (19)$$

в зависимости от соотношений между числами m, p и r.

Заметим, что предложенное в [10] обобщение стандартного двухпараметрического соотношения (1) модели КФ [1] с заменой n на $\nu^* = n + \tilde{\nu}$ фактически соответствует введению трехпараметрической формулы для ν при произвольных k.

При $r = 2m$ для любых p первое из выражений (19), или формула (4), вырождается в простые лафлиновские дроби с нечетными знаменателями $\nu = 1/m = 1/(2n+1)$. Заметим, что при $p = 2r = 4m$ оба выражения (19) содержат неопределенность типа $0/0$, раскрытие которой по правилу Лопиталя приводит к значению $\nu = 1/m$. Поскольку условие $r = 2m$ означает отсутствие связанных электронных пар ($N = 0$), приходим к выводу, что лафлиновские состояния реализуются на свободных $2D$ электронах ($M = N_e$).

При $p = 2r$ для любых m из (4) следуют гальперинские дроби $\nu = 2/r$, которые возникают в отсутствии свободных электронов ($M = 0$) в системе связанных пар ($N = N_e/2$). Однако, если исходить из аналогии с куперовскими парами в сверхпроводниках, то становится ясно, что состояние с $M = 0$ может реализоваться только при абсолютном нуле температуры $T = 0$. При конечных температурах $T \neq 0$ числа частиц и пар отличны от нуля, $M \neq 0$ и $N \neq 0$, причем с изменением T они могут изменяться только дискретным образом (так же, как и при непрерывном изменении магнитного поля B). Относительные числа электронов $\nu_e = M/N_e$ и пар $\nu_p = N/N_e$ могут принимать следующие значения:

$$\nu_e = \frac{p - 2r}{4m + p - 4r} > 0 \text{ либо } \nu_e = \frac{2r - p}{4r - p - 4m} > 0; \quad (20)$$

$$\nu_p = \frac{2m - r}{4m + p - 4r} > 0 \text{ либо } \nu_p = \frac{r - 2m}{4r - p - 4m} > 0; \quad (21)$$

Формулы (19), или (4) и (5), в общем случае описывают множество различных правильных дробей $\nu = q/k < 1$ с произвольными целочисленными числителями q и знаменателями k. Однако наиболее простые и чаще всего наблюдаемые экспериментально дробные значения ν, как правило, получаются из (19) в результате многократных взаимных сокращений числителей и знаменателей, т.е. при высокой степени кратности чисел q и k.

Поскольку числитель и знаменатель фактора заполнения ν соответствуют числам электронов N_e и квантов потока N_Φ, такая кратность означает, что одновременно большое число частиц (электронов и пар) образует когерентные связанные состояния (или композиции) с одинаковым числом квантов (не обязательно четным!) в расчете на один электрон. В результате этого возникают особенности в макрохарактеристиках (например, в R_{xx} и R_{xy}) всей $2D$ системы, которые наблюдаются экспериментально.

Для определения таких дробей $\nu = q/k$ с $q < k$ и высокой кратностью числителя и знаменателя предлагается следующий простой алгоритм: приравниваем числитель выражений (19) произведению чисел lq, а знаменатель — произведению lk (где l — целое число), и решаем два уравнения относительно p и r при заданных значениях $m = 2n + 1$. Из условия получения решения в виде целых чисел находим искомую кратность l числителя и знаменателя. Действительно, из двух уравнений на основе первого соотношения (19), или (4):

$$4m + p - 4r = lq; \; mp - r^2 = lk \quad (22)$$

получаем квадратное уравнение относительно r, меньший корень которого равен:

$$r = 2m - \sqrt{l(qm - k)} \leq 2m\ . \quad (23)$$

При этом параметр p определяется соотношением

$$p = (4r - 4m + lq) \geq 2r. \quad (24)$$

Для произвольного положительного числа $(qm - k)$ квадратный корень в (23) вычисляется точно при условии

$$l(qm - k) = n^2, \quad (25)$$

т.е. для $l = (qm - k)$, либо для такого значения l, которое является множителем, дополняющим число $(qm - k)$ до полного квадрата.

Если же число $(qm - k)$ само является полным квадратом, то l равно 1 либо любому полному квадрату, и единственным ограничением для l являются условия $2 \leq r \leq 2m$ и $p \geq 2r$, а также четность числа p.

Приведем несколько примеров. Возьмем для начала три типичные дроби $\nu = 3/7,\ 4/9,\ 5/11$, описывающиеся формулой (1). Подставляя соответствующие значения $q = 3, 4, 5$ и $\kappa = 7, 9, 11$ в (23), а затем в (24), находим для $m = 3$ соответствующие значения параметров для этих дробей: $l_1 = 2$, $r_1 = 4$,

$p_1 = 10$; $l_2 = 3$, $r_2 = 3$, $p_2 = 12$; $l_3 = 4$, $r_3 = 2$, $p_3 = 16$ (см. табл. 1). Другие значения l не удовлетворяют требованиям $2 \le r \le 6$ и $p \ge 2r$.

Заметим, что дробь $\nu = 3/7$ реализуется также при $m = 5$, $l = 8$, $r = 2$, $p = 12$ (табл. 2).

Теперь рассмотрим экзотические дроби, наблюдаемые в [3] и не вписывающиеся в схему КФ [1].

В качестве первой выберем дробь $\nu = 4/11$. Подставляя соответствующие $q = 4$ и $k = 11$ в (23) и (24), при $m = 3$ находим 4 варианта реализации дан-

Таблица 1. Основные дробные значения $\nu = q/k$ для $m = 3$*

r \ p	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
2	1	5/7	3/5	7/13	1/2	9/19	5/11	—	3/7	—	7/17	—	2/5
3		2/3	8/15	10/21	4/9	—	—	2/5	—	—	8/21	—	—
4			1/2	3/7	2/5	5/13	3/8	7/19	4/11	—	5/14	—	6/17
5				2/5	4/11	6/17	8/23	—	—	—	—	—	—
6	1/3	1/3	1/3	1/3	0/0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
7	—	—	—	—	4/13	2/7							
8	4/13	7/23	3/10	5/17	2/7	3/11	1/4						
9	—	2/7	—	—	4/15	—	—	2/9					
10	3/11	—	5/19	—	1/4	—	3/13	5/23	1/5				
11	—	—	—	—	4/17	—	—	—	—	2/11			
12	—	5/21	—	—	2/9	—	—	1/5	4/21	—	1/6		
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2/13	
14	—	—	—	—	1/5	—	—	—	2/17	—	—	—	1/7

Примечание: * — дроби получены на основе соотношения (4) в области $2 \le r \le 6$ и $p \ge 2r$ и с помощью соотношения (5) в области $7 \le r \le 14$ и $p \le 2r$. Горизонталь $r = 6$ при любых p соответствует лафлиновскому состоянию с $\nu = 1/3$ (при $M = N_e$ и $N = 0$). Диагональ $p = 2r$ соответствует гальперинскому состоянию с $\nu = 2/r$ (при $N = N_e/2$ и $M = 0$), которое недостижимо при $T \ne 0$. Дроби с большими несоизмеримыми числителями и знаменателями не приведены (заменены черточками). Пустые клеточки соответствуют состояниям, которые не описываются соотношениями (4) и (5).

Таблица 2. Основные дробные значения $\nu = q/k$ для $m = 5$*.

r \ p	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
2	1	9/13	5/9	11/23	3/7	—	7/19	—	1/3	—	—	—	5/17
3		2/3	—	—	—	—	—	—	4/13	—	—	—	—
4			1/2	7/17	4/11	1/3	5/16	—	6/21	—	—	5/19	—
5				2/5	—	—	—	—	4/15	—	—	—	—
6					1/3	5/17	3/11	—	1/4	—	5/21	—	3/14
7						2/7	—	—	4/17	—	—	2/9	—
8							1/4	3/13	2/9	5/23	3/14	—	4/19
9								2/9	4/19	—	—	—	—
10	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	0/0	1/5	1/5	1/5	1/5
11	—	—	—	—	—	—	—	—	4/21	2/11			
12	—	—	—	—	4/21	—	3/16	—	2/11	3/17	1/6		
13	—	—	—	—	—	2/11	—	—	4/23	—	—	2/13	
14	2/11	—	—	—	3/17	—	—	—	1/6	—	3/19	—	1/7

Примечание: * — в области $2 \le r \le 10$ и $p \ge 2r$ дроби получены с помощью (4), а в области $11 \le r \le 14$ и $p < 2r$ — с помощью (5). Горизонталь $r = 10$ − состояние с $\nu = 1/5$. Диагональ — состояния с $\nu = 2/r$ $(r \ge 2)$.

ной дроби: $l_1 = 1$, $r_1 = 5$, $p_1 = 12$; $l_2 = 4$, $r_2 = 4$, $p_2 = 20$; $l_3 = 9$, $r_3 = 3$, $p_3 = 36$; $l_4 = 16$, $r_4 = 2$, $p_4 = 60$. Кроме того, дробь $4/11$ реализуется при $m = 5$, $l = 4$, $r = 4$ и $p = 12$. Заметим, что наблюдавшаяся в [3] дополнительная к $\nu = 4/11$ за счет электрон-дырочной симметрии спектра дробь $\nu = 7/11$ не может быть получена с помощью соотношений (23) и (24).

Следующая дробь $\nu = 4/13$ реализуется при $m = 5$, $l = 7$, $r = 3$ и $p = 20$, а дробь $\nu = 5/13$ — при $m = 7$, $l = 2$, $r = 4$ и $p = 14$. Заметим, что дополнительная дробь $\nu = 9/13$ реализуется при $m = 5$, $l = 2$, $r = 2$ и $p = 6$, а дробь $\nu = 8/13$ не удовлетворяет соотношениям (23) и (24).

Дроби $5/17$ и $6/17$ дублируются по параметрам: $\nu = 5/17$ реализуются при $m_1 = 5$, $l_1 = 2$, $r_1 = 6$, $p_1 = 14$ и при $m_2 = 7$, $l_2 = 8$, $r_2 = 2$, $p_2 = 20$, а $\nu = 6/17$ — при $m_1 = 3$, $l_1 = 1$, $r_1 = 5$, $p_1 = 14$ и $m_2 = 7$, $l_2 = 4$, $r_2 = 4$, $p_2 = 12$ (см. табл. 1, 2, 3).

Наконец, наиболее экзотические новые дроби из наблюдающихся в [3] с четными знаменателями $\nu = 3/8$ и $\nu = 3/10$ реализуются — первая при $m = 3$, $l = 4$, $r = 4$ и $p = 16$ для соотношений (4), (23), (24) (дробь $\nu = 5/8$ — дополнительная), а вторая при $m = 3$, $l = 4$ и $r = p = 8$, но на основе второго соотношения (19), или формулы (5), для которых r и p определяются выражениями

$$r = 2m + \sqrt{l(k - mq)} > 2m\ , \tag{26}$$

$$p = (4r - 4m - lq) < 2r\ . \tag{27}$$

Заметим, что дроби $\nu = 4/13$ и $\nu = 5/17$ также могут быть получены с помощью соотношений (5), (26), (27). Так, при $m = 3$ значению $\tilde{\nu} = 4/13$ соответствуют $l = 1$, $r = 7$, $p = 12$ либо $l = 4$, $r = 8$, $p = 4$, а значение $\tilde{\nu} = 5/17$ получается при $l = 2$, $r = 8$, $p = 10$ (см. табл. 1). Этими же соотношениями определяются известные дроби $\nu = 2/7$ и $\nu = 2/9$, которым при $m = 3$ соответствуют $l = 4$, $r = 8$, $p = 12$ либо $l = 9$, $r = 9$, $p = 6$ (для $\tilde{\nu} = 2/7$) и $l = 12$, $r = p = 12$ (для $\tilde{\nu} = 2/9$). При $m = 5$ дробь $\nu = 2/9$ реализуется с помощью (4), (23), (24) при $l = 9$, $r = 7$, $p = 26$ и $l = 9$, $r = 8$, $p = 20$, а дробь $\nu = 2/11$ при $m = 5$ определяются соотношениями (5), (26), (27) для $l = 4$, $r = 12$, $p = 20$, либо $l = 9$, $r = 13$, $p = 14$, либо $l = 16$, $r = 14$, $p = 4$ (см. табл. 2).

По мере увеличения числителя q и знаменателя k и приближения дроби $\nu = q/k$ к значению $\nu = 1/2$, предельному для первой серии дробей в модели КФ [1], наблюдается тенденция к уменьшению параметров l, r и p. Так, например, дробь $\nu = 8/17$ реализуется с помощью соотношений (4), (23), (24) при $m = 3$ для $l = 7$, $r = 13$, $p = 96$, а при $m = 5$ для $l = 23$, $r = 33$, $p = 296$. В то же время наиболее близкие из наблюдаемых дробей [3] к $\nu = 1/2$ значения $\nu = 9/19$ и $\nu = 10/21$ реализуются при $m = 3$ с помощью (4), (23), (24): первая при $l = 2$, $r = 2$, и $p = 14$, а вторая при $l = 1$, $r = 3$, $p = 10$ (дробь $\nu = 10/19$ является дополнительной к $\nu = 9/19$, и сама по себе не удовлетворяет соотношениям (23) и (26)).

Таким способом можно получить в рамках данной модели любую известную или наперед заданную правильную дробь, в том числе все дроби, следующие из модели КФ [1], а также все новые наблюдаемые «аномальные» дроби [3], не уклады-

Таблица 3. Основные дробные значения $\nu = q/k$ для $m = 7$*.

r \ p	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
2	1	13/19	7/13	5/11	2/5	—	1/3	—	5/17	—	—	—	1/4
3		2/3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4			1/2	—	6/17	—	—	3/11	—	—	—	—	2/9
5				2/5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6					1/3	—	5/19	—	3/13	—	—	—	1/5
7						2/7	—	—	—	—	—	—	—
8							1/4	—	—	1/5	—	—	2/11
9								2/9	—	—	—	—	—
10									1/5	—	3/17	—	1/6
11										2/11	—	—	—
12											1/6	3/19	2/13
13												2/13	—
14	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	0/0

Примечание: * — все дроби в области $2 \le r \le 14$ и $p \ge 2r$ получены с помощью соотношения (4).

вающиеся в стандартную схему [1] (как ЦКЭХ для КФ), либо в усовершенствованную схему [10] (как ДКЭХ для КФ на высших УЛ).

Интересно проследить за формированием простых дробей $\nu = 1/m$, помимо «тривиальных» лафлиновских состояний при $r = 2m$ и $N = 0$ или специальных гальпериновских состояний $\nu = 2/r$ с $r = 2(2n + 1)$ при $p = 2r$ и $M = 0$ (т.е. при $T = 0$).

Прежде всего заметим, что для дроби $\nu = q/k = 1/m$ комбинация чисел $qm - k$ тождественно равна нулю, так что такие дроби для любых m удовлетворяют соотношениям (4), (23), (24) при любом четном $l = 2n$ для обеспечения четности числа p. Это означает, что кратность этих состояний ограничена только полным числом $2D$ электронов N_e. В частности, при четном числе электронов в $2D$ системе все электроны (или пары) могут одновременно участвовать в формировании лафлиновских состояний $\nu = 1/m$, чем объясняется их максимальная стабильность («несжимаемость»). Именно эти квантовые состояния, соответствующие макроскопической когерентности большего числа частиц, характеризуются наиболее глубокими (вплоть до нуля) и широкими минимумами в магнитосопротивлении R_{xx} и, соответственно, широким плато в холловском сопротивлении $R_H = R_{xy}$.

Заметим, что дроби $\nu = 1/m$ могут реализоваться и при других параметрах. Например, дроби $\nu = 1/3$ при $m = 5$ соответствуют трем наборам параметров в соотношениях (4), (23), (24): $l_1 = 8$, $r_1 = 8$, $p_1 = 14$; $l_2 = 18$, $r_2 = 6$, $p_2 = 12$; $l_3 = 32$, $r_3 = 4$, $p_3 = 14$, а при $m = 7$ — двум наборам $l_1 = = 16$, $r_1 = 6$, $p_1 = 12$ и $l_2 = 36$, $r_2 = 2$, $p_2 = 16$.

В то же время многочисленные дроби с большими, но не кратными (несоизмеримыми) числителями и знаменателями, которые следуют из соотношений (19), или (4) и (5), являются ненаблюдаемыми (виртуальными) из-за неустойчивости соответствующих им состояний (случайных конфигураций частиц и квантов потока).

Наконец, рассмотрим возникновение простых дробей с четными знаменателями $\nu = 1/2n$ (помимо гальпериновских дробей $\nu = 2/r$ при $r = 4n$ и при $M = 0$). Дробь $\nu = 1/2$ возникает, например, при $m = 3$, $l = 16$, $r = 2$, $p = 12$, согласно (4), (23), (24), а дробь $\nu = 1/4$ при $m = 3$, $l = 16$, $r = 10$, $p = 12$, согласно (5), (26), (27), или при $m = 5$, $l = 16$, $r = 6$, $p = 20$, согласно (4), (23), (24), тогда как дробь $\nu = 1/6$ соответствует соотношениям (5), (26), (27) при $m = 5$ для $l = 16$, $r = 14$, $p = 20$ либо $l = 36$, $r = 16$, $p = 8$ (см. табл. 1 и 2).

Как видим, эти состояния также обладают высокой кратностью ($l >> 1$). Тот факт, что экспериментально наблюдаемые минимумы R_{xx} при $\nu = 1/2$, $1/4$, $1/6$ не достигают нуля, связан с возрастающей (по мере приближения к $\nu = 1/2n$) плотностью «леса» других состояний с близкими значениями ν, особенности которых ослабляются и становятся неразрешимыми даже при достигнутой рекордной экспериментальной точности [3], сливаясь в «море» неразличимых состояний.

Ничем иным квантовые состояния с $\nu = 1/2n$ в данной модели не выделены по сравнению с другими дробями с высокой кратностью, в отличие от модели КФ [1], где состояния $1/2n$ являются особыми точками, в которых КФ ведут себя как квазичастицы в ферми-жидкости в нулевом магнитном поле [14].

В связи с этим обратим внимание на «загадочное» состояние $\nu = 5/2$, наблюдаемое в области ЦКЭХ, но обладающее всеми свойствами состояние ДКЭХ [15–17]. В частности, в холловском сопротивлении R_{xy} в окрестности $\nu = 5/2$ наблюдается плато, а в спектре возбуждений — энергетическая щель, соответствующая «несжимаемому» основному состоянию. Следует подчеркнуть, что неправильная дробь $\nu = 5/2$ не содержится в соотношениях (4), (23), (24) или (5), (26), (27), которые описывают только правильные дроби $\nu = q/k < 1$ (подстановка в них $q = 5$ и $k = 2$ приводит к отрицательным значениям r или к нечетным значениям p).

Однако, как было показано в [18,19], данное состояние может быть представлено как $\nu = 2 + 1/2$, т.е. как половинное заполнение высшего УЛ, ничем не отличающееся от состояния $\nu = 1/2$, что подтверждает сделанный нами выше вывод.

4. Заключение

Таким образом, на основе единственного предположения о существовании в $2D$ системах в режиме ДКЭХ, наряду со свободными электронами, также связанных электронных пар [11] удается построить трехпараметрические соотношения (19), или (4) и (5), для вычисления дробных значений фактора заполнения $\nu = N_e/N_\Phi$ нижайшего УЛ, которые включают в себя как частный случай модель Лафлина [2], иерархическую модель энионов [4,5] и стандартную модель КФ [1], а также ее модификации [3,10].

Возможность образования связанных пар обсуждалась ранее в [20], а в [12] был предложен конкретный механизм «куперовского» спаривания $2D$ электронов за счет ЭФВ с поверхностными $2D$ фононами, локализованными в плоскости интерфейса в полупроводниковых гетероструктурах. Заметим, что такие «интерфейсные» оптические фононы наблюдались с помощью рамановского рассеяния света в полупроводниковых сверхрешетках в [21].

Соотношения (4) и (5), или (19), позволяют описать абсолютно все экспериментально наблюдаемые дробные значения фактора заполнения в области $\nu < 1$, а также, возможно, предсказать некоторые новые, пока не наблюдавшиеся экзотические дроби, например, $\nu = 5/14$ (при $m = 3$, $l = 4$, $r = 4$, $p = 24$), $\nu = 5/16$ (при $m = 5$, $l = 4$, $r = 4$, $p = 16$) или $\nu = 3/20$ (при $m = 7$, $l = 4$, $r = 12$, $p = 32$).

При этом следует учитывать, что интенсивность наблюдаемой особенности (глубина и ширина минимума R_{xx}, ширина плато R_{xy}) при прочих равных условиях (одинаковые концентрации электронов n_e и их подвижности μ_e, равные температуры T) увеличивается с ростом степени кратности l числителя и знаменателя соответствующей дроби $\nu = q/k$, вычисляемой на основе соотношений (4), (23), (24) или (5), (26), (27). Это обусловлено тем, что кратность l определяет число когерентных композиций из q электронов и k квантов потока, которые формируют данные квантовые состояния. Так, например, максимально возможной кратностью, ограниченной только полным числом электронов в $2D$ системе, обладают лафлиновские дроби $\nu = 1/m = 1/(2n+1)$. Это соответствует максимально устойчивым «несжимаемым» макроскопически когерентным квантовым состояниям, которые не могут быть численно рассчитаны с помощью методов диагонализации ни на сфере [9,10], ни на диске [22] из-за макроскопически большого числа электронов и квантов магнитного потока, участвующих в их формировании.

Рассмотренная в настоящей работе модель сосуществования и суперпозиции $2D$ электронов и связанных электронных пар в термодинамическом пределе ($N_e \to \infty$) описывает полностью поляризованные по спину состояния с любым числом частиц и квантов потока и не отдает предпочтения состояниям с четным числом квантов потока в расчете на один электрон (т.е. состояния типа КФ [1]) перед состояниями с нечетным числом квантов на один электрон (типа Лафлиновских состояний [2]). В частности, здесь простые дроби с четными знаменателями $\nu = 1/2n$ не выделяются в особый класс, в отличие от модели КФ [1,14]. Разумеется, предлагаемая модель требует дальнейшей теоретической разработки, а ее выводы и предсказания нуждаются в экспериментальной проверке.

Выражаю искреннюю благодарность и признательность д-ру Walter Appel за плодотворные дискуссии и предоставленную информацию, позволившие выполнить эту работу во время моего пребывания в Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), Braunschweig (Германия). Я благодарен и признателен Немецкому исследовательскому обществу (DFG) за финансирование моего пребывания в PTB и лично доктору Michael Weyrauch за приглашение и организацию моего визита в PTB, за поддержку, помощь и полезные научные дискуссии.

1. J.K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989).
2. R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983), *Science* **242**, 525 (1988).
3. W. Pan, H.L. Stormer, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, K.W. Baldwin, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 016801 (2003).
4. F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1144 (1982); **49**, 957 (1982).
5. F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605 (1983).
6. F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2090 (1995).
7. A. Wojs and J.J. Quinn, *Phys. Rev.* **B61**, 2846 (2000).
8. K. Park and J.K. Jain, *Phys. Rev.* **B62**, 13274 (2000).
9. S.S. Mandial and J.K. Jain. *Phys. Rev.* **B66**, 155302 (2002).
10. C.-C. Chang and J.K. Jain, *Cond-mat /0404079*.
11. B.I. Halperin, *Helvetica Physica Acta* **56**, 75 (1983); *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1583 (1984).
12. Э.А. Пашицкий, *ФНТ* **25**, 920 (1999); **27**, 1069 (2001).
13. Ю.А. Бычков, *ФТТ* **31** (7), 56 (1989).
14. B.I. Halperin, P.A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev.* **B47**, 7312 (1993).
15. R. Willett, J.P. Eisenstein, H.L. Stormer, P.C. Tsui, A.C. Gossard, and J.M. English, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1776 (1987).
16. J.P. Eisenstein et al, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1776 (1987).
17. J.P. Eisenstein et al, *Surf. Sci.* **229**, 31 (1990).
18. R. Morf and N. d'Ambrumenil, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5116 (1995).
19. R. Morf, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1505 (1998).
20. F.D.M. Haldane and E.H. Rezayi, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 956 (1988); **60** (1988).
21. B. Trallero-Giner, F. Garcia-Moliner, V.R. Velasu, and M. Cardona, *Phys. Rev.* **B45**, 11944 (1992).
22. M. Kasper and W. Appel, *Ann. Phys.* **3**, 433 (1944).

On new quantum states in the regime of fractional quantum Hall effect

E.A. Pashitskii

It is shown that the new fractional values of the filling factor $\nu = 4/11$, $4/13$, $5/13$, $5/17$, $6/17$, $3/8$, $3/10$ (as well as the additional fractions $5/8$ and $7/11$) observed in the regime of fractional quantum Hall effect (FQHE), and not described by the standard model of composite fermions (CF) may be accounted for in the framework of an extended classification of quantum states of the FQHE. This new classification is based on the Halperin original idea on the coexistence of free electrons and coupled electron pairs in two-dimensional ($2D$) systems in the thermodynamic limit. The possibility of the exis-

tence of the coupled triplet Cooper pairs in the fully polarized state on the lowest Landau spin level arises from the electron-phonon interaction of $2D$ electrons with $2D$ surface acoustic and optical phonons, localized near the interface in the semiconducting heterostructures. The proposed extended classification includes, as individual cases, the Laughlin model, the early hierarchic models of the FQHE and the CF model with some of its generalizations, and describes absolutely all observed fractional values of v, including the fractions with even denominators (in particular, $\nu = 3/8$ and $3/10$). It also predicts the possibility of the existence of new «exotic» fractional values (for example, $\nu = 5/14$, $5/16$, $3/20$).