Физика низких температур, 2006, т. 32, № 7, с. 816–824

Уравнения гидродинамики и коллективные моды в системе пористая среда—сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He

Ш.Е Кекутия, Н.Д. Чхаидзе

Институт кибернетики АН Грузии, ул. С. Эули, 5, г. Тбилиси, 0186, Грузия
E-mail: nikolozi1951@yahoo.com
kekuka@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 17 октября 2005 г., после переработки 11 января 2006 г.

Получены уравнения динамики для системы пористое тело—сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He. Входящие в уравнения коэффициенты упругости выражены через физически измеряемые величины. Полученные уравнения описывают все объемные моды, которые распространяются в пористой среде, насыщенной сверхтекучим раствором ^{3}He–^{4}He. Изучено распространение звуковых мод в аэрогеле, заполненном сверхтекучим раствором ^{3}He–^{4}He. Вычислены скорости продольных мод, распространяющихся в этой системе, и установлены связи между осциллирующими величинами.

Отримано рівняння динаміки для системи пористе тіло—надплинний розчин ^{3}He–^{4}He. Коефіцієнти пружності, що входять до рівняння, виражено через фізично вимірні величини. Отримані рівняння описують всі об'ємні моди, які поширюються в пористому середовищі, насиченому надплинним розчином ^{3}He–^{4}He. Вивчено поширення звукових мод в аерогелі, заповненому надплинним розчином ^{3}He–^{4}He. Обчислено швидкості поздовжніх мод, що розповсюджуються в цій системі, та установлено зв'язки між осцилюючими величинами.

PACS: **67.60.–g**, 67.60.Hr

Ключевые слова: сверхтекучий раствор, пористая среда, аэрогель, продольные волны, поперечные волны.

Исследованиям волновых процессов в системе сверхтекучая жидкость—пористая среда посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ. Это связано не только с уникальностью рассматриваемого явления, но и с тем, что акустические методы позволяют получать достаточно полную информацию о свойствах изучаемой системы.

Уникальные явления, имеющее место в сверхтекучей жидкости, во многом обусловлены своеобразной растворимостью любых посторонних примесей в жидком гелии. Например, одной из характерных особенностей жидких растворов ^{3}He–^{4}He является наличие фазового перехода первого рода — фазового расслоения, в результате которого жидкость расслаивается на более легкую концентрированную фазу, богатую ^{3}He, и разбавленную сверхтекучую фазу, богатую ^{4}He. При этом кривая фазового расслоения при $T \to 0$ стремится не к нулевому, а к конечному значению концентрации $c_0 \approx 6{,}7\%$ ^{3}He. Это означает, что при очень низких температурах и $c < c_0$ раствор ^{3}He–^{4}He является однородной квантовой жидкостью, представляющей собой раствор нормальной ферми-жидкости в сверхтекучей бозе-жидкости. Свойства такой жидкости подробно описаны в монографиях [1,2], где детально изучена ее гидродинамика. При выводе уравнений гидродинамики исходят из предположения о полном увлечении примесей нормальным движением. Для слабых растворов это предположение строго доказано.

Отличие в связи между первым и вторым звуками в сверхтекучем ^{4}He и в растворах ^{3}He–^{4}He проявляется в условиях возбуждения этих колебаний. В случае излучения звука неподвижной твердой поверхностью с периодически меняющейся температурой, как показывают оценки, периодический нагреватель излучает в растворах одновременно первый и второй звуки, интенсивность которых может иметь одинаковый порядок величины. Этот эффект одновременного возбуждения первого и второго звуков в сверхтекучих растворах ^{3}He–^{4}He был обнаружен экспериментально [3]. Эксперименты проводились на растворах с весовой концентрацией ^{3}He 4,56% и 8,52%, а также с чистым ^{4}He в интервале температур 1,4 К–T_λ. Оказалось, что нагреватель с периодически меняющейся температурой кроме второго звука излучает в растворах первый звук заметной интенсивности.

В противоположном случае, когда звук возбуждается пластинкой, совершающей механические колебания в направлении, перпендикулярном плоскости пластины, интенсивность излучаемого второго звука в растворах намного выше, чем при соответствующих условиях в ^{4}He, но все же мала по сравнению с интесивностью излучаемого при этом первого звука.

В сверхтекучих растворах, кроме уже упомянутых двух типов незатухающих колебаний первого и второго звуков, возможно распространение так называемого четвертого звука, когда имеет место полное торможение нормальной компоненты. В этом звуке даже в пренебрежении тепловым расширением осциллируют и давление, и температура, и концентрация. Однако относительная амплитуда колебаний температуры и концентрации значительно меньше, чем давления. Поэтому наблюдение четвертого звука как в ^{4}He, так и в растворах ^{3}He–^{4}He проще всего проводить, возбуждая колебания давления. Существует принципиальная возможность генерировать четвертый звук и другими способами. Экспериментально четвертый звук в сверхтекучих растворах ^{3}He–^{4}He был обнаружен авторами [4]. Звук распространялся по системе разветвленных каналов, образованных спрессованным мелкодисперсным порошком.

В последнее время большое внимание уделяется изучению поведения сверхтекучей жидкости в условиях ограниченной геометрии, например в пористых наноструктурах типа аэрогеля [5,6]. Влияние аэрогеля на свойства сверхтекучей жидкости можно рассматривать как влияние своеобразной примеси.

Аэрогель привлекает внимание своими уникальными акустическими, механическими и электрохимическими свойствами. Например, он обладает высокой акустической изоляцией — скорость звука через аэрогель составляет только 100 м/с [7–10]. Из-за большой площади поверхности, контролируемых размеров пор и низкой объемной плотности они перспективны для производства теплозвуковых изоляционных материалов, катализаторов, адсорбентов, сенсоров, топливных элементов, суперконденсаторов, устройств для деионизации воды и могут быть эффективными «переносчиками» лекарств.

Обычно аэрогели изготавливают при давлении и температуре выше суперкритических значений для пористой жидкости (например, 6,4 МПа и 243,1 °C для этанола). Для предотвращения разрушения структуры геля требуются дорогостоящие процессы, как, например, суперкритическое высушивание. Поскольку такие процессы неизбежно влекут за собой использование дорогих автоклавов, цены и фактор риска синтеза аэрогелей ограничивают их прикладное применение. Поэтому множество исследований посвящено поискам технологических решений для создания более выгодных и дешевых аэрогелей или подобных материалов. Возможно, сублимационная сушка — один из более экономичных и безопасных методов получения аэрогеля.

Последние годы наблюдается повышенный интерес к исследованиям конденсации примесей в сверхтекучем гелии для создания внутри жидкости пористой структуры, аналогичной аэрогелю. Такой интерес к примесь-гелиевым конденсатам как к новым пористым наноматериалам обусловлен их использованием, например, в качестве замедлителей (подразумевается примесь-гелиевые конденсаты, синтезированные на основе D_2 и D_2O) для получения ультрахолодных нейтронов [11]. Заслуживает внимания и создание новых криогенных энергоемких материалов, так как именно в примесь-гелиевых конденсатах были получены рекордные концентрации стабилизированных атомов дейтерия и азота [12]. Эти материалы применяются для изучения свойств сверхтекучих жидкостей ^{3}He и ^{4}He в неупорядоченных пористых средах и исследования наночастиц льда и их роли в атмосферных процессах и астрофизике [13].

Методика приготовления таких примесных систем основана на вдувании в сверхтекучий ^{4}He струи газообразного ^{4}He с примесью молекул или атомов исследуемого газа. К настоящему времени примесь-гелиевые образцы могут быть приготовлены из различных атомных и молекулярных примесей: Ne, Ar, Kr, D_2, N_2, H_2O, C_2H_5OH, Ba, Na [13,14] и представляют собой пористые гелеобразные структуры, образованные примесными кластерами и пропитанные сверхтекучим гелием. Возможность изменения плотности образцов примесь-гелиевых конденсатов непосредственно в ходе эксперимента путем сжатия может быть использована для изучения зависимости эффективности конверсии звука в He II от плотности примеси [15,16]. Судя по поглощению ультразвука, диапазон характерных размеров пор в этих конденсатах более широк — от 8 до 800 нм [17]. Оказалось, что в осажденном в сверхтекучий гелий конденсате звук распространяется так же, как и в пропитанном сверхтекучим жидким гелием аэрогеле. Вопросы распространения звуков в подобных системах подробно рассмотрены и изучены в [18]. Примечательное отличие примесь-гелиевых конденсатов от аэрогеля, который широко используется при изучении особенностей сверхтекучей жидкости в ограниченной геометрии, состоит в том, что их свойства могут заметно изменяться со временем или при повышении температуры He II, т.е. область существования образца ограничена низкими температурами.

Настоящая работа относится к более общему случаю, когда сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He заполняет «частично увлекаемую» в колебательном движении пористую среду. Ее частными случаями можно считать как работу [18], так и хорошо известную работу Био [19] для классических жидкостей.

Сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He представляет интерес для акустики, поскольку в нем распространяется несколько волн. Это дает возможность более детального изучения пористой среды [19], так как полную и ценную информацию о свойствах системы можно извлечь при исследовании распространения в ней колебаний.

Цель настоящей работы — получение полной линеаризованной системы уравнений, описывающих распространение звуков в пористой среде, заполненной сверхтекучим раствором ^{3}He–^{4}He. Используя методику, развитую в [18,20], с помощью единого подхода обобщенные коэффициенты упругости определены через физически измеряемые величины. Вычислены скорости распространяющихся волн в высокопористой системе — аэрогеле, заполненном сверхтекучим раствором. Найдены соотношения между величинами, которые осциллируют в этих волнах.

Выражение обобщенных коэффициентов упругости через физически измеряемые величины

Авторами статьи в работе [18] изучены волновые процессы в системе пористое твердое тело—сверхтекучий ^{4}He. Были установлены соотношения между напряжениями и деформациями, возникающие в системе при выводе их из состояния равновесия. Рассмотрим случай, когда примеси полностью увлекаются нормальным движением. Как известно, при температурах порядка нескольких милликельвинов в жидком ^{3}He происходит куперовское спаривание квазичастиц в триплетном состоянии с относительным орбитальным моментом $L = 1$, которое приводит к переходу в сверхтекучее состояние. Аналогичное явление спаривания возможно и в растворах. Поэтому утверждение об участии примесей только в нормальном движении не должно распространяться на столь низкие температуры, где возможна сверхтекучесть примесей. Тогда по аналогии с [18,19] мы можем выразить восемь компонент тензора напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, s', s''$ через восемь компонент тензора деформации $e_x, e_y, e_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \varepsilon^s, \varepsilon^n$:

$$\begin{gathered}
\sigma_x = 2Ne_x + Ae + Q^s\varepsilon^s + Q^n\varepsilon^n, \\
\sigma_y = 2Ne_y + Ae + Q^s\varepsilon^s + Q^n\varepsilon^n, \\
\sigma_z = 2Ne_z + Ae + Q^s\varepsilon^s + Q^n\varepsilon^n, \\
\tau_x = N\gamma_x, \quad \tau_y = N\gamma_y, \quad \tau_z = N\gamma_z, \\
s' = Q^s e + R^s\varepsilon^s + R^{sn}\varepsilon^n, \\
s'' = Q^n e + R^n\varepsilon^n + R^{sn}\varepsilon^s,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и τ_x, τ_y, τ_z — нормальные и тангенциальные силы, действующие на элемент твердой поверхности с соответствующей ориентацией, а s' и s'' — силы, действующие на жидкостную часть, соответствующие сверхтекучей и нормальной компонентам сверхтекучего раствора. Постоянные A и N соответствуют хорошо известным коэффициентам Ламэ в теории упругости и являются положительными. $R^s(R^n)$ — мера напряжения, возникающего в сверхтекучей (нормальной) компоненте при сжатии ее единичного объема без сжатия нормальной (сверхтекучей) компоненты и пористой среды. Коэффициент R^{sn} определяет возникающее в сверхтекучей компоненте напряжение при сжатии нормальной компоненты без сжатия сверхтекучей компоненты и пористой среды и наоборот.

Если через (u_x, u_y, u_z) обозначить компоненты вектора смещения твердого тела, то

$$\begin{gathered}
e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\
\gamma_x = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_z = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Поскольку рассматриваемая система представляет собой пористую структуру, мы считаем, что размеры единичного элемента (куба) намного больше размеров пор. Вектор смещения $\mathbf{u}$ определяется как смещение твердого тела, усредненного по объему элемента.

Таким же образом можно определить средний вектор смещения $\mathbf{U}$ жидкостной части куба, который определяет поток жидкости. Из-за того, что в сверхтекучем растворе возможны два типа движения, $\mathbf{U}$ распадается на сумму двух частей

$$\mathbf{U} = \frac{\rho^s}{\rho}\mathbf{U}^s + \frac{\rho^n}{\rho}\mathbf{U}^n, \tag{3}$$

соответствующих смещению сверхтекучей и нормальной компонент. Здесь ρ^s, ρ^n — плотности сверхтекучей и нормальной компонент сверхтекучей жидкости, ρ — плотность жидкости. Таким образом, деформацию жидкости можно определить следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\rho^s}{\rho}\nabla \mathbf{U}^s + \frac{\rho^n}{\rho}\nabla \mathbf{U}^n \ . \tag{4}$$

Поскольку сверхтекучую и нормальную части в сверхтекучей жидкости физически разделить нельзя и не имеет смысла говорить о принадлежности отдельных атомов жидкости к свертекучей или нормальной компонентам, должно выполняться соотношение

$$Q^s\varepsilon^s + Q^n\varepsilon^n = Q\varepsilon \ , \tag{5}$$

коэффициент Q введен Био [19].

Рассмотрим гипотетические эксперименты, которые позволят определить обобщенные упругие коэффициенты через физически измеряемые коэффициенты объемного модуля жидкости K_f, твердого тела $K_{\rm sol}$, объемного K_b и сдвигового N модулей «сухого» образца. Такой подход в случае классической и сверхтекучей жидкостей был предложен в работах [18,20].

В первом эксперименте представим, что пористый образец помещен в сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He, к которому приложено давление P'. Под воздействием давления раствор полностью проникает в поры, и измеряются величины e и ε. Следовательно, $K_{\rm sol}$ и K_f можно определить следующим образом:

$$\frac{1}{K_{\rm sol}} = -\frac{e}{P'}\ ; \qquad \frac{1}{K_f} = -\frac{\varepsilon}{P'}\ . \tag{6}$$

Отметим, что из выражения для химического потенциала раствора можно найти силы, действующие на жидкостную часть:

$$s' = -\Phi\frac{\rho^s}{\rho}(1+\beta)P'; \quad s'' = -\Phi\frac{\rho^n}{\rho}\left(1-\frac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)P', \tag{7}$$

где $\beta = (c/\rho)(\partial\rho/\partial c)$, Φ — пористость. Примем во внимание условие $\varepsilon^s = \varepsilon^n = \varepsilon$. Так что из (6), (7) получаем

$$\left(\frac{2}{3}N + A\right)\frac{1}{K_{\rm sol}} + (Q^s + Q^n)\frac{1}{K_f} = 1 - \Phi,$$

$$Q^s\frac{1}{K_{\rm sol}} + (R^s + R^{sn})\frac{1}{K_f} = \Phi\frac{\rho^s}{\rho}(1+\beta)\ ,$$

$$Q^n\frac{1}{K_{\rm sol}} + (R^n + R^{sn})\frac{1}{K_f} = \Phi\frac{\rho^n}{\rho}\left(1-\frac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right). \tag{8}$$

Во втором эксперименте образец пористого твердого тела заключен в тонкую непроницаемую оболочку и подвергается действию давления жидкости P'. Для обеспечения постоянного давления внутри жидкости она должна вытекать по трубке во внешний резервуар. Так что K_b определяется как

$$\frac{1}{K_b} = -\frac{e}{P'}\ , \tag{9}$$

и в этом эксперименте выполняются равенства

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P';\ \varepsilon^s = \varepsilon^n = \varepsilon;\ s' = s'' = 0. \tag{10}$$

Поэтому имеем три соотношения

$$\left(\frac{2}{3}N + A\right)e + (Q^s + Q^n)\varepsilon = -P'\ ,$$

$$Q^s e + (R^s + R^{sn})\varepsilon = 0\ , \tag{11}$$

$$Q^n e + (R^n + R^{sn})\varepsilon = 0\ .$$

Из (8) и (11) следует

$$Q = \frac{\Phi K_{\rm sol}\left(1-\Phi-\dfrac{K_b}{K_{\rm sol}}\right)}{1-\Phi+\Phi\dfrac{K_{\rm sol}}{K_f}-\dfrac{K_b}{K_{\rm sol}}}\ , \tag{12}$$

$$\frac{2}{3}N + A = K_{\rm sol}\,\frac{(1-\Phi)\left(1-\Phi-\dfrac{K_b}{K_{\rm sol}}\right)+\Phi\dfrac{K_b}{K_f}}{1-\Phi+\Phi\dfrac{K_{\rm sol}}{K_f}-\dfrac{K_b}{K_{\rm sol}}}\ , \tag{13}$$

$$R^n + R^{sn} = K_f\,\frac{\rho^n}{\rho}\left(\Phi-\frac{Q}{K_{\rm sol}}\right)\left(1-\frac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right), \tag{14}$$

$$R^s + R^{sn} = K_f\,\frac{\rho^s}{\rho}\left(\Phi-\frac{Q}{K_{\rm sol}}\right)(1+\beta)\ . \tag{15}$$

В последнем эксперименте связь с резервуаром обеспечивается через сверхщель, пропускающую только сверхтекучую компоненту, поэтому

$$\left(\frac{2}{3}N + A\right)e + Q^s\varepsilon^s + Q^n\varepsilon^n = -(1-\Phi)P'\ ,$$

$$Q^s e + R^s\varepsilon^s + R^{sn}\varepsilon^n = 0\ , \tag{16}$$

$$Q^n e + R^n\varepsilon^n + R^{sn}\varepsilon^s = -\Phi P'\ .$$

В этом эксперименте нет очевидной связи между ε^s и ε^n. В данном случае ее можно получить, используя закон сохранения массы и энтропии, тогда

$$(\varepsilon^s - \varepsilon^n)\frac{\tilde{\sigma}^2}{\partial\sigma/\partial T}\frac{\rho^s}{\rho} = \frac{1+\beta}{\rho}P', \tag{17}$$

где $\tilde{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2 + c^2\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{Z}{\rho}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial T}$; $\bar{\sigma} = \sigma - c\frac{\partial\sigma}{\partial c}$.

Величина $Z = \rho(\mu_3 - \mu_4)$ определена через химические потенциалы μ_3, μ_4 атомов ^{3}He, ^{4}He.

Уравнения (16), (17) совместно с уравнениями (12)–(15) дают

$$R^{sn} = \frac{\rho^s\rho^n}{\rho^2}(1+\beta)\left(1 - \frac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)R - \frac{(\rho^s)^2\tilde{\sigma}^2 T\Phi}{\rho C_{\mathrm{He}}}, \tag{18}$$

$$R^n = \frac{(\rho^n)^2}{\rho^2}\left(1 - \frac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)^2 R + \frac{(\rho^s)^2\tilde{\sigma}^2 T\Phi}{\rho C_{\mathrm{He}}}, \tag{19}$$

$$R^s = \frac{(\rho^s)^2}{\rho^2}(1+\beta)^2 R + \frac{(\rho^s)^2\tilde{\sigma}^2 T\Phi}{\rho C_{\mathrm{He}}}, \tag{20}$$

где

$$R = \frac{\Phi^2 K_{\mathrm{sol}}}{1 - \Phi + \Phi\dfrac{K_{\mathrm{sol}}}{K_f} - \dfrac{K_b}{K_{\mathrm{sol}}}} \quad - \tag{21}$$

коэффициент Био–Уиллиса [20], C_{He} — теплоемкость на единицу массы раствора.

Для составления искомых уравнений движения системы надо определить кинетическую энергию, выбрав обобщенные координаты. Предполагаем, что физической точкой является область, размер которой намного больше размеров пор и намного меньше характерных длин задачи (например, длины волны при рассмотрении волновых процессов). В качестве обобщенных координат системы выбираем девять компонент векторов смещения жидкости и твердого тела, усредненных по объему области выбранной физической точки: $u_x, u_y, u_z, U_x^s, U_y^s, U_z^s, U_x^n, U_y^n, U_z^n$. Тогда по аналогии с [18,19,22] для распространяющихся волн получаем уравнения

$$N\nabla^2\mathbf{u} + (A+N)\,\mathrm{grad}\,e + Q^s\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^s + Q^n\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^n =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\mathbf{u} + \rho_{12}^s\mathbf{U}^s + \rho_{12}^n\mathbf{U}^n) + bF(w)\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{U}^n),$$
$$Q^s\,\mathrm{grad}\,e + R^s\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^s + R^{sn}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^n =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}^s\mathbf{u} + \rho_{22}^s\mathbf{U}^s),$$
$$Q^n\,\mathrm{grad}\,e + R^n\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^n + R^{sn}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^s =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}^n\mathbf{u} + \rho_{22}^n\mathbf{U}^s) - bF(w)\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{U}^n), \tag{22}$$

где ρ_{11} представляет собой полную эффективную плотность твердого тела, движущегося в растворе ^{3}He–^{4}He. Массовые параметры ρ_{12}^s, ρ_{12}^n характеризуют увеличение инертной массы, и, как обычно, это приращение инертной массы называют присоединенной массой. По Берриману, тензор присоединенных масс определяется следующим образом [23]: $\rho_{12}^{s(n)} = -(\alpha_\infty - 1)\,\Phi\rho^{s(n)}$, где $\alpha_\infty \ge 1$ — чисто геометрическая величина, не зависящая ни от плотности твердого тела, ни от плотности жидкости, и может меняться от единицы (для плоскопараллельных капиляров) до бесконечности (для изолированных пор).

Комплексная функция $F(w)$ отражает отклонение от пуазейлевского течения и учитывает геометрические особенности пористого материала. Коэффициент $b = \eta\varphi^2/k_0$ — отношение полной силы трения к усредненной скорости нормальной компоненты относительно твердого тела, где η — вязкость жидкости, k_0 — проницаемость пористой среды. В работе [21] проведен теоретический анализ возможностей использования акустики сверхтекучей жидкости для изучения различных параметров пористых материалов. Для этой цели функция $F(w)$ выражена через ключевые параметры данной проблемы, которыми являются коэффициент извилистости и проницаемости, а также динамический параметр размерности длины и пористость. Некоторые из них получены из решения задачи об электропроводности заполненной проводящей жидкостью среды, состоящей из изоляционного пористого материала. Вычислена реакция жесткой пористой среды. Полученные результаты позволяют рассмотреть особенности двухжидкостной гидродинамики He II в жесткой пористой среде и определить параметры среды из экспериментальных данных о скорости и поглощении первого, второго и четвертого звуков. Особенно следует заметить, что система, состоящая из пористого твердого тела, заполненного сверхтекучей жидкостью, привлекательна тем, что ее составляющие являются взаимно зондирующими.

Распространение звука в неограниченной геометрии и аэрогеле

Из (22) нетрудно получить уравнения движения упругой среды и уравнения гидродинамики сверхтекучего раствора. Для первого случая мы полагаем $\Phi = 0$ и, пренебрегая жидкостной частью, из (22) запишем

$$N\nabla^2\mathbf{u} + (A + N)\,\mathrm{grad}\, e = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_{\mathrm{sol}}\mathbf{u}\,. \tag{23}$$

Из этого уравнения следует, что упругая волна представляет собой, по существу, две независимо распространяющиеся волны [24]. В одной из них смещение направлено вдоль распространения самой волны, скорость которой равна

$$C_l = \sqrt{\frac{A + 2N}{\rho_{\mathrm{sol}}}}\,, \tag{24}$$

эта волна называется продольной. Здесь ρ_{sol} — плотность твердого тела. В другой волне смещение направлено в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, — это поперечная волна, распространяющаяся со скоростью

$$C_t = \sqrt{\frac{N}{\rho_{\mathrm{sol}}}}\,. \tag{25}$$

Если положить $\alpha_\infty = \Phi = 1$, тем самым пренебрегая частью уравнения твердого тела, то из (22) получаем уравнения движения сверхтекучего раствора ^{3}He–^{4}He

$$\begin{aligned} R^s\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^s + R^{sn}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^n &= \rho^s\,\frac{\partial^2\mathbf{U}^s}{\partial t^2}\,,\\ R^n\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^n + R^{sn}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon^s &= \rho^n\,\frac{\partial^2\mathbf{U}^n}{\partial t^2}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

При этих же условиях

$$\begin{aligned} R^s &= \frac{(\rho^s)^2}{\rho^2}(1+\beta)^2 K_f + \frac{(\rho^s)^2\tilde{\sigma}^2 T}{\rho C_{\mathrm{He}}}\,,\\ R^n &= \frac{(\rho^n)^2}{\rho^2}\left(1 - \frac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)^2 K_f + \frac{(\rho^s)^2\tilde{\sigma}^2 T}{\rho C_{\mathrm{He}}}\,,\\ R^{sn} &= \frac{\rho^s\rho^n}{\rho^2}(1+\beta)\left(1 - \frac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right) K_f - \frac{(\rho^s)^2\tilde{\sigma}^2 T}{\rho C_{\mathrm{He}}}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Используя общепринятую методику для безграничного сверхтекучего раствора ^{3}He–^{4}He, получаем дисперсионное уравнение, которое соответствует объемным волнам, распространяющимся в нем:

$$C^4\rho^s\rho^n - C^2(\rho^s R^n + \rho^n R^s) + R^s R^n - (R^{sn})^2 = 0. \tag{28}$$

Уравнение (28) имеет два корня:

$$C_1^2 = \frac{K_f}{\rho}\left(1 + \frac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2\right);\quad C_2^2 = \frac{\rho^s}{\rho^n}\frac{\tilde{\sigma}^2 T}{C_{\mathrm{He}}\left(1 + \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2\right)}\,, \tag{29}$$

которые соответственно относятся к первому и второму звукам в сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He [1].

Также из (26) можно получить хорошо известное выражение для четвертого звука в сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He, если предположить $\mathbf{U}^n = 0$:

$$C_4^2 = \frac{\rho^n}{\rho}\frac{(1+\beta)^2}{1 + (\rho^s/\rho^n)\beta^2}C_1^2 + \frac{\rho^n}{\rho}\left(1 + \frac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2\right)C_2^2. \tag{30}$$

В работах [4,25] распространение четвертого звука в сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He было изучено исходя из уравнений гидродинамики Халатникова [1].

Нас заинтересовал случай, рассмотренный авторами работы [5], которые развили теорию распространения звуковых мод в аэрогеле, заполненном сверхтекучим He II. Ими был рассмотрен низкочастотный случай. Поскольку в пределе низкой частоты глубина проникновения вязкой волны становится большой, нормальная компонента сверхтекучей жидкости полностью прилипает к матрице твердого тела, вследствие чего скелет твердого тела и нормальная жидкость движутся вместе со скоростью $\mathbf{V}^n \neq 0$. Чтобы рассмотреть эту ситуацию, естественно, нужно исключить силу трения, которая содержится в уравнениях (22), и в оставшихся двух уравнениях положить $\mathbf{U}^n = \mathbf{u}$. Тогда

$$\begin{gathered} -(A + 2N + 2Q^n + R^n)k^2U^n - (Q^s + R^{sn})k^2U^s = \\ = -\omega^2[(\rho_{11} + 2\rho_{12}^n + \rho_{22}^n)U^n + \rho_{12}^s U^s] - \\ -(Q^s + R^{sn})k^2U^n - R^s k^2 U^s = -\omega^2(\rho_{12}^s U^n + \rho_{22}^s U^s). \end{gathered} \tag{31}$$

Отсюда для продольных волн получаем следующее уравнение:

$$\begin{gathered} \rho^s[\rho^a + \rho^n]\,C^4 - C^2[R^s(\rho^a + \rho) + \\ + \rho^s(A + 2N + 2Q + R) - 2\rho^s(Q^s + R^s + R^{sn})] + \\ + R^s(A + 2N + 2Q + R) - (Q^s + R^s + R^{sn})^2 = 0\,. \end{gathered} \tag{32}$$

Два решения этого уравнения — это скорости быстрой и медленной волн в низкочастотном пределе. Для аэрогелей или, что эквивалентно, для открытой геометрии $\Phi \approx 1$ и $K_b << K_{\mathrm{sol}}$. В этих условиях дисперсионное уравнение (32) совпадает с дисперсионным уравнением для He II, полученным в [5,6,18] при $\beta = 0$.

Это уравнение можно выразить через значения объемных скоростей (29), (30), тогда дисперсионное уравнение для скоростей двух продольных звуковых мод принимает вид

$$\left(1+\frac{\rho^a}{\rho^n}\right)C^4 - C^2\left\{C_1^2+\left(1+\frac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2\right)C_2^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho^a}{\rho^n}(C_a^2+C_4^2)\right\}+C_1^2C_2^2+\frac{\rho^a}{\rho^n}C_a^2C_4^2=0, \quad (33)$$

где $C_a^2=[K_b+(4/3)N]/\rho^a$ — квадрат скорости распространения продольного звука в сухом аэрогеле. Первое решение является комбинацией первого и четвертого звуков в растворе сверхтекучего ^{3}He–^{4}He

$$C_{14}^2=\frac{C_1^2+(\rho^a/\rho)C_4^2}{1+(\rho^a/\rho^n)} \quad (34)$$

и соответствует быстрой моде.

Второе решение соответствует медленной моде и является комбинацией второго звука (29) и звука, распространяющегося по сухому аэрогелю:

$$C_{2a}^2=\frac{C_2^2+\dfrac{\rho^a\rho^s}{\rho^n\rho}\dfrac{(1+\beta)^2}{1+(\rho^s/\rho^n)\beta^2}C_a^2}{1+\dfrac{\rho^a\rho^s}{\rho^n\rho}\dfrac{(1+\beta)^2}{1+(\rho^s/\rho^n)\beta^2}}. \quad (35)$$

МакКенна и др. [5] модифицировали общеизвестную двухжидкостную гидродинамическую модель, учитывая связь нормальной компоненты свертекучей жидкости как с плотностью аэрогеля, так и с его упругостью. Уравнения в [5] в отличие от полученных нами не содержат тензор сдвигового напряжения. Поэтому они справедливы только для продольных волн и не содержат решения, соответствующие поперечным волнам. В этих продольных волнах колеблется одновременно как давление, так и температура. В сверхтекучем ^{4}He в объемных звуках колеблется или давление (первый звук), или температура (второй звук). Следует заметить, что значения C_1^2, C_2^2 и C_4^2 в выражениях (34), (35) совпадают с выражениями (29), (30). При этом связь между колеблющимися величинами P' и T' в модах, распространяющихся в рассмотренной нами системе, отличается от связи, имеющей место как в системе сверхтекучий ^{4}He—аэрогель, так и в сверхтекучих растворах ^{3}He–^{4}He. Эти вопросы рассмотрены нами ниже.

Распространение тепловой волны впервые изучено Пешковым [26]. Вторую моду как тепловой импульс в системе He II—аэрогель наблюдали в работах [5,6,15,16]. Согласно экпериментальным данным, $C_a^2 \gg C_2^2$ и из (35) следует, что $C_{2a}^2 \gg C_2^2$. Следовательно, скорость медленной волны намного больше, чем скорость температурной волны в свободном сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He.

Из уравнений непрерывности массы и энтропии можно определить связь колебания плотности и энтропии с вектором смещения:

$$\frac{\rho'}{\sigma'}=\frac{\rho}{\sigma}\frac{1+(\rho^n/\rho^s)(U^n/U^s)}{(U^n/U^s)-1}. \quad (36)$$

Отношение среднего нормального смещения к среднему сверхтекучему смещению найдем из уравнения (31):

$$\frac{U^n}{U^s}=-\frac{C^2\rho_{22}^s-R^s}{C^2\rho_{12}^s-(Q^s+R^{sn})}, \quad (37)$$

тогда отношение (36) в случае аэрогеля принимает вид

$$\frac{\rho'}{\sigma'}=\frac{\rho}{\sigma\rho^s}\frac{\rho^nC^2-\rho^s\beta\dfrac{1+\beta}{1+(\rho^s/\rho^n)\beta^2}C_1^2-\rho^n\left(1+\dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2\right)C_2^2}{C^2-\dfrac{1+\beta}{1+(\rho^s/\rho^n)\beta^2}C_1^2}. \quad (38)$$

Колебания давления и температуры связаны между собой следующим образом:

$$\frac{T'}{P'}=\frac{\bar\sigma(\partial\rho/\partial P)}{\partial\sigma/\partial T}\frac{1}{\sigma\left(\dfrac{\rho'}{\sigma'}\right)-\rho\beta}=\frac{\rho^s\bar\sigma(\partial\rho/\partial P)}{\rho^n\rho(\partial\sigma/\partial T)}\frac{C^2-\dfrac{1+\beta}{1+(\rho^s/\rho^n)\beta^2}C_1^2}{\left(1-\dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)C^2\left(1-\dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)C_2^2}. \quad (39)$$

Выражение (39) в приближении $C_2^2/C_1^2 \ll 1$ для первой моды имеет вид

$$\left(\frac{T'}{P'}\right)_{14} = -\frac{\bar{\sigma}(\partial\rho/\partial P)}{\partial\sigma/\partial T}\,\frac{\dfrac{\rho^s}{\rho^n\rho}\left[\beta + \dfrac{\rho^a}{\rho}(1+\beta)\right]}{1 + \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2 + \dfrac{\rho^a\rho^s}{\rho^n\rho}(1+\beta)^2}\,. \tag{40}$$

Из формулы (40) следует, что в первой моде колебание давления сопровождается колебанием температуры. Здесь надо заметить, что для некоторого значения β или ρ^a/ρ колебание температуры в данной волне обращается в нуль. Такое отличие от случая сверхтекучего раствора ($\rho^a/\rho = 0$), когда колебание температуры пропорционально коэффициенту β, и от случая He II — аэрогель ($\beta = 0$), когда та же величина пропорциональна ρ^a/ρ, обусловлено одновременным присутствием и атомов ^{3}He, и аэрогеля.

Сейчас мы можем определить колебание давления, которое может возникнуть при колебаниях температуры во второй моде:

$$\left(\frac{P'}{T'}\right)_{2a} = -\frac{\rho\rho^s\tilde{\sigma}^2}{\bar{\sigma}\rho^n}\left[\beta - \frac{\rho^a}{\rho}\,\frac{\left(1 - \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)(1+\beta)}{1 + \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2}\,\frac{C_a^2}{C_2^2}\right]\times$$

$$\times\left[1 + \frac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2 + \frac{\rho^a\rho^s}{\rho^n\rho}(1+\beta)^2\right]^{-1}. \tag{41}$$

Как следует из выражения (41), одновременное присутствие атомов ^{3}He и аэрогеля усиливает связь между колеблющимися величинами. Соотношения (40) и (41) будут полезными для изучения эффекта конверсии звука в сверхтекучих жидкостях, заполняющих разного рода пористые образования.

Доля колебаний температуры и давления определяется отношением их относительных колебаний:

$$\left(\frac{T'/T}{P'/P}\right)_{14} = -\frac{\bar{\sigma}PC_2^2\left(1 + \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2\right)^2\left[\beta + \dfrac{\rho^a}{\rho}(1+\beta)\right]}{T\rho\tilde{\sigma}C_1^2\left[1 + \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2 + \dfrac{\rho^a\rho^s}{\rho^n\rho}(1+\beta)^2\right]}, \tag{42}$$

$$\left(\frac{P'/P}{T'/T}\right)_{2a} = \frac{\rho^s\rho T\tilde{\sigma}^2}{P\bar{\sigma}\rho^n}\,\frac{\beta - \dfrac{\rho^a}{\rho}\,\dfrac{\left(1 - \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta\right)(1+\beta)}{1 + (\rho^s/\rho^n)\beta^2}\,\dfrac{C_a^2}{C_2^2}}{1 + \dfrac{\rho^s}{\rho^n}\beta^2 + \dfrac{\rho^a\rho^s}{\rho^n\rho}(1+\beta)^2}, \tag{43}$$

где P и T — равновесные значения давления и температуры. Из полученных нами результатов следует, что в системе пористая среда — сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He имеет место качественная модификация звуков, или, что то же самое, изменяется природа звуков, распространяющихся в само́й сверхтекучей жидкости. Определяющими параметрами этих изменений служат β и ρ^a/ρ.

Таким образом, нами получены уравнения динамики для системы пористое тело — сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He, с помощью которых возможно проанализировать все моды, распространяющиеся в пористой среде, заполненной сверхтекучим раствором ^{3}He–^{4}He. Входящие в уравнения коэффициенты упругости выражены через физически измеряемые величины. Вычислены скорости продольных мод, распространяющихся в системе сверхтекучий ^{3}He–^{4}He — аэрогель. В этих волнах установлены связи между колеблющимися величинами.

1. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
2. Б.Н. Есельсон, В.И. Григорьев, В.Г. Иванцов, Э.Я. Рудавский, Д.Г. Саникидзе, И.А. Сербин, *Растворы квантовых жидкостей* ^{3}He–^{4}He, Наука, Москва (1973).
3. А.С. Дикина, Э.Я. Рудавский, И.А. Сербин, *ЖЭТФ* **58**, 843 (1970).
4. Б.Н. Есельсон, Н.Е. Дюмин, Э.Я. Рудавский, И.А. Сербин, *ЖЭТФ* **51**, 1064 (1968).
5. M.J. McKenna, T. Slawecki, and J.D. Maynard, *Phys. Rev. Lett*. **66**, 1878 (1991).
6. A. Golov, D.A. Geller, and J.M. Parpia, *Phys. Rev. Lett*. **82**, 3492 (1999).
7. S. Kistler, *Nature* **17**, 741 (1931).
8. R.W. Pekala, *J. Mat. Science* **24**, 3221 (1989).
9. C. Schmitt, H. Probstle, and J. Fricke, *J. Non-Cryst. Solids* **225**, 277 (1998).
10. V. Schmidt and F. Schwertfeyer, *J. Non-Cryst. Solids* **225**, 364 (1998).
11. В.В. Несвижевский, *Ядерная физика* **65**, 126 (2002).
12. B.B. Palasztwski, L.S. Ianovski, and P. Carrick, *J. Prop. and Power* **14**, 641 (1998).
13. А.М. Кокотин, Л.П. Межов-Деглин, *ФНТ* **28**, 235 (2002).
14. S.I. Kiselev, V.V. Khmelenko, D.M. Lee, V. Kiryukhin, R.E. Boltnev, E.B. Gordon, and B. Keimer, *Phys. Rev.* **B65**, 024517 (2002).

15. G. Lawes, E. Nazaretski, and P.N. Brusov, *Low Temp. Phys*. **126**, 691 (2002).
16. Peter Brusov, Paul Brusov, G. Lawes, C. Lee, A. Matsubara, O. Ishikawa, and P. Majumbar, *Phys. Lett*. **A310**, 311 (2003).
17. S.I. Kiselev, V.V. Khmelenko, and D.M. Lee, *Fiz. Nizk. Temp*. **26**, 874 (2000).
18. Ш. Кекутия, Н. Чхаидзе, *ФНТ* **28**, 1115 (2002).
19. M.A. Biot, *J. Acoust. Soc. Am*. **28**, 168 (1956); *ibid*. 179 (1956).
20. M.A. Biot and D.G. Willis, *J. Appl. Mech*. **24**, 594 (1957).
21. D.L. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen, *J. Fluid Mech*. **176**, 379 (1987).
22. T. Buishvili, Sh. Kekutia, O. Tkeshelashvili, and L. Tkeshelashvili, *Phys. Lett*. **A300**, 1115 (2002).
23. J.G. Beriman, *Appl. Phys. Lett.* **37**, 382 (1980).
24. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1965).
25. Д.Г. Саникидзе, Д.М. Черникова, *ЖЭТФ* **46**, 1123 (1964).
26. В.П. Пешков, *ЖЭТФ* **16**, 1000 (1946).

Equations of hydrodynamics and collective modes in a porous medium—superfluid ^{3}He–^{4}He solution system

Sh.E. Kekutia and N.D. Chkhaidze

Equations of dynamics for a porous medium filled with the superfluid ^{3}He–^{4}He solution are obtained. The elastic coefficients in the equations are expressed in terms of physically measurable quantities. The equations describe all volume modes which propagate through a porous medium saturated with the superfluid solution ^{3}He–^{4}He. The propagation of sound modes in aerogel filled with the superfluid ^{3}He–^{4}He solution is studied. The velocities of longitudinal propagating modes in this system are calculated. The connection between oscillating quantities is established.

Keywords: superfluid solution, porous media, aerogel, longitudinal wave, transverse wave.