Физика низких температур, 2004, т. 30, № 9, с. 920–927

Классификация состояний равновесия сверхтекучей жидкости с *d*-спариванием

А.П. Ивашин, М.Ю. Ковалевский, Н.Н. Чеканова

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: ivashin@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 января 2004 г.

Проведена классификация состояний равновесия квантовой жидкости с d-спариванием на основе концепции квазисредних. Оператор параметра порядка представлен в терминах ферми-операторов. Показано, что множество таких состояний равновесия может быть классифицировано в терминах квантового числа, соответствующего проекции орбитального момента куперовской пары на направление анизотропии. Найден явный вид трех допустимых генераторов ненарушенной симметрии и соответствующие равновесные значения параметра порядка. Проведено обобщение на возможные неоднородные равновесные структуры и найден соответствующий вид параметра порядка таких структур.

Проведено класифікацію станів рівноваги квантової рідини з d-спарюванням на основі концепції квазісередніх. Оператор параметра порядку подано в термінах фермі-операторів. Показано, що множину таких станів рівноваги може бути класифіковано в термінах квантового числа, відповідного проекції орбітального момента купервської пари на напрямок анізотропії. Знайдено явний вигляд трьох припустимих генераторів непорушеної симетрії і відповідні рівноважні значення параметра порядку. Проведено узагальнення на можливі неоднорідні рівноважні структури і знайдено відповідний вигляд параметра порядку таких структур.

PACS: **67.57.–z**, 67.57.Lm

1. Введение

Как известно, классификация состояний равновесия конденсированных сред, основанная на феноменологическом подходе Гинзбурга–Ландау, требует знания вида свободной энергии как функции параметра порядка и существенно зависит от вида рассматриваемой модели. Другой теоретико-групповой подход базируется на представлении ненарушенной симметрии вырожденного состояния равновесия как подгруппы симметрии нормальной фазы. Существенными в этом подходе являются соответствующие трансформационные свойства параметра порядка при преобразованиях симметрии гамильтониана. Это рассмотрение свободно от каких-либо модельных предположений о виде свободной энергии. Классификация однородных состояний в рамках указанных подходов проводилась для сверхтекучего ^{3}He [1–3], который описывается тензорным параметром порядка. Вопрос о возможных неоднородных сверхтекучих состояниях равновесия ^{3}He изучен в работе [4]. Другим важным примером вырожденных конденсированных сред является сверхтекучая жидкость в состоянии d-спаривания, которая также характеризуется тензорным параметром порядка [5]. Такое состояние описывает ядерную материю нейтронных звезд [6–9]. В силу сильного спин-орбитального взаимодействия имеет место $^3P_2$ спаривание нейтронов ($l = 1, S = 1; J = 2$). Такого же типа спаривание возможно для ^{3}He с $l = 2$ [10] и для ряда высокотемпературных сверхпроводников [11–13]. Параметр порядка, описывающий состояния с $J = 2$, представляет собой симметричный и бесшпуровый тензор. Классификация возможных состояний для этого вида спаривания проведена на основе феноменологического подхода в работах [5,14]. В настоящей работе предложен микроскопический подход классификации однородных состояний равновесия, который базируется на концепции квазисредних [4,15–18]. Допустимые свойства симметрии состояния равновесия квантовой жидкости и соответствующие им структуры параметра порядка находятся из условий ненарушенной и пространственной симметрии при ненулевых значениях параметра порядка.

2. Общие свойства параметра порядка и симметрия состояния равновесия

Теоретическим фундаментом статистической физики конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией является концепция квазисредних Боголюбова [15], которая обобщает распределение Гиббса на вырожденные конденсированные среды. Согласно [15], квазисреднее физической величины в состоянии статистического равновесия с нарушенной симметрией определяется формулой

$$\langle \hat{a}(x)\rangle \equiv \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \operatorname{Sp}\hat{w}_\nu \hat{a}(x),$$
$$\hat{w}_\nu \equiv \exp(\Omega_\nu - Y_a\hat{\gamma}_a - \nu\hat{F}). \qquad (1)$$

Здесь $\hat{\gamma}_a$ — аддитивные интегралы движения ($\hat{\mathcal{H}}$ — гамильтониан, $\hat{\mathcal{P}}_k$ — оператор импульса, $\hat{N}$ — оператор числа частиц, $\hat{S}_\alpha$ — оператор спина), $Y_a \equiv Y_0, Y_k, Y_4, Y_\alpha$ — соответствующие им термодинамические силы. Для удобства дальнейшего изложения полагаем, что в лабораторной системе координат в состоянии равновесия отсутствуют макроскопические потоки, т.е. $Y_k = 0$ и внутреннее магнитное поле равно нулю. Термодинамический потенциал Ω_ν определяется условием нормировки $\operatorname{Sp}\hat{w}_\nu = 1$. Оператор $\hat{F}$ обладает симметрией исследуемой фазы конденсированной среды и представляет собой линейный функционал оператора параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$

$$\hat{F} \equiv \int d^3x\,(f_a(x,t)\hat{\Delta}_a(x) + \mathrm{h.c.}). \qquad (2)$$

Индекс a характеризует тензорную размерность параметра порядка. В частности, с помощью скалярного параметра порядка $\hat{\Delta}(x) \equiv (i/2)\hat{\psi}(x)\sigma_2\hat{\psi}(x)$ можно описывать сверхтекучую ферми-жидкость с синглетным спариванием [4], векторный параметр порядка $\hat{\Delta}_\alpha(x) \equiv \hat{\psi}^+(x)\sigma_\alpha\hat{\psi}(x)$ описывает магнитные системы со спонтанным нарушением симметрии относительно вращений в спиновом пространстве, тензорный вид параметра порядка имеют жидкие кристаллы [19] и квантовые жидкости с триплетным спариванием [4]. Введенная в оператор $\hat{F}$ величина $f_a(x,t)$ есть некоторая функция координат, сопряженная оператору параметра порядка, задающая его равновесные значения в смысле квазисредних: $\Delta_a(x,t) = \langle\hat{\Delta}_a(x)\rangle$. Структура функций $f_a(x,t)$ определяется свойствами симметрии исследуемых состояний квантовой жидкости. Это дает возможность в рамках микроскопической теории ввести дополнительные термодинамические параметры в распределение Гиббса.

Описание конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией существенно опирается на представление о параметре порядка. Сформулируем трансформационные свойства операторов параметра порядка. Условие трансляционной инвариантности имеет вид

$$i[\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\Delta}_a(x)] = -\nabla_k\Delta_a(x). \qquad (3)$$

Генератором группы фазовых преобразований является оператор числа частиц $\hat{N}$. Оператор параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуются согласно соотношениям

$$[\hat{N}, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_a\hat{\Delta}_a(x). \qquad (4)$$

Постоянные g_a зависят от тензорной размерности оператора параметра порядка.

При преобразованиях, связанных с группой внутренних симметрий с генераторами $\hat{S}_\alpha$ $(\alpha = x,y,z)$, операторы $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуются по представлениям этой группы:

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_{\alpha ab}\hat{\Delta}_b(x) \qquad (5)$$

или в компактной записи

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}(x)] = -\hat{g}_\alpha\hat{\Delta}(x),$$

где $(\hat{g}_\alpha)_{ab} \equiv g_{\alpha ab}$ — некоторые постоянные. Генераторы группы внутренней симметрии $\hat{S}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_\gamma, \qquad (6)$$

антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ имеет смысл структурных постоянных. Из формул (5), (6), используя тождество Якоби для операторов $\hat{T}$ и $\hat{\Delta}(x)$, можно получить соотношение

$$[\hat{g}_\alpha, \hat{g}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{g}_\gamma. \qquad (7)$$

При преобразованиях, связанных с группой пространственных поворотов с генераторами $\hat{\mathcal{L}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, операторы параметра порядка $\hat{\Delta}(x)$ в точке $x = 0$ преобразуются по представлениям этой группы:

$$i[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\Delta}_a(0)] = -g_{iab}\hat{\Delta}_b(0).$$

Откуда, замечая, что $[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\mathcal{L}}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{\mathcal{L}}_k$, получаем соотношения, аналогичные (7):

$$[\hat{g}_i, \hat{g}_j] = -\varepsilon_{ijk}\hat{g}_k. \qquad (8)$$

Поскольку $\hat{\Delta}_a(x) = \exp(-i\hat{\mathcal{P}}x)\hat{\Delta}_a(0)\exp(i\hat{\mathcal{P}}x)$, в силу (3) найдем

$$i[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_{iab}\hat{\Delta}_b(x) - \varepsilon_{ijk}x_k\nabla_j\hat{\Delta}_a(x). \qquad (9)$$

Из феноменологической теории известно, что для адекватного описания термодинамики неравновесных процессов в конденсированных средах с нарушенной симметрией, вообще говоря, необходимо ввести новые термодинамические параметры, не связанные с законами сохранения, а обусловленные физической природой термодинамической фазы. В случае нормальных конденсированных сред термодинамические параметры определяются только плотностями аддитивных интегралов движения. Теория многочастичных систем, описывающая равновесные свойства нормальной ферми-жидкости, основывается на статистическом операторе Гиббса

$$\hat{w} = \exp(\Omega - Y_0\hat{\mathcal{H}} - Y_4\hat{N}). \tag{10}$$

Набор термодинамических сил Y_a включает в себя $Y_0^{-1} \equiv T$ — температуру и $Y_4/Y_0 \equiv \mu$ — химический потенциал. Аддитивные интегралы движения, входящие в распределение Гиббса, приводят к определенной симметрии состояния равновесия. Свойства симметрии равновесного статистического оператора (10) имеют вид

$$[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k] = 0,\ [\hat{w}, \hat{\mathcal{H}}] = 0,\ [\hat{w}, \hat{N}] = 0,$$

$$[\hat{w}, \hat{S}_\alpha] = 0,\ [\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_k] = 0 \tag{11}$$

и отражают фазовую и пространственно-временную трансляционную инвариантности. Условия симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах означают пренебрежение слабыми дипольными и спин-орбитальными взаимодействиями при характеристике состояния равновесия. Полная группа симметрии нормального состояния равновесия ферми-жидкости имеет вид

$$G = [SO(3)]_S \times [SO(3)]_L \times [U(1)]_\varphi \times [T(3)] \times [T(1)].$$

Здесь $[SO(3)]_S$, $[SO(3)]_L$ — группы симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах, $[T(3)]$, $[T(1)]$ — трансляционные группы в пространстве и времени, $[U(1)]_\varphi$ — группа фазовой симметрии. Каждый элемент группы представляет собой унитарный оператор $U \equiv \exp\,(i\hat{G}g)$ (g — действительные и непрерывные параметры преобразования), оставляющий инвариантным распределение Гиббса:

$$U\hat{w}U^+ = \hat{w}.$$

Операторы $\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{N}, \hat{S}_\alpha, \hat{\mathcal{L}}_k, \hat{\mathcal{H}}$ являются генераторами этих преобразований. Средние вида $\mathrm{Sp}\,[\hat{w},\hat{G}]\hat{b}(x)$ обращаются в нуль при произвольном квазилокальном операторе $\hat{b}(x)$ для $\hat{G} \in (\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{N}, \hat{S}_\alpha, \hat{\mathcal{L}}_k)$. Это, в частности, справедливо для операторов $\hat{b}(x) \equiv \hat{\Delta}_a(x)$, имеющих физический смысл операторов параметра порядка и некоммутирующих с интегралами движения $\hat{G}$. Поскольку средние $\mathrm{Sp}\,\hat{w}[\hat{G}, \hat{\Delta}_a(x)]$ в силу соотношений (3), (4), (5) и (9) линейны и однородны по параметру порядка $\hat{\Delta}_a(x)$, из этого следует, что в нормальном состоянии параметр порядка обращается в нуль.

Покажем, как формулируются свойства симметрии состояния равновесия и вводятся дополнительные термодинамические параметры для вырожденных конденсированных сред. Рассмотрим трансляционно-инвариантные подгруппы ненарушенной симметрии $\mathcal{H}$ полной группы симметрии G. Трансляционная инвариантность означает, что равновесный статистический оператор удовлетворяет соотношению симметрии

$$[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k] = 0. \tag{12}$$

Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний в соответствии с [17] осуществим исходя из соотношения

$$[\hat{w}, \hat{T}] = 0, \tag{13}$$

где генератор ненарушенной симметрии $\hat{T}$ представляет собой линейную комбинацию интегралов движения

$$\hat{T} = a_i\hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha\hat{S}_\alpha + c\hat{N} \equiv \hat{T}(\xi) \tag{14}$$

с некоторыми действительными параметрами $(a_i, b_\alpha, c \equiv \xi)$. Унитарные преобразования образуют непрерывную подгруппу ненарушенной симметрии $U(\xi)U(\xi') = U(\xi''(\xi,\xi'))$ равновесного состояния. Из равенств

$$i\,\mathrm{Sp}\,[\hat{w}, \hat{T}(\xi)]\hat{\Delta}_a(x) = 0,\ i\,\mathrm{Sp}\,[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k]\hat{\Delta}_a(x) = 0,$$

учитывая алгебраические соотношения (3)–(5), (9) и определение (14), получаем уравнения

$$a_i g_{iab}\Delta_b + b_\alpha g_{\alpha ab}\Delta_b + igc\Delta_a = 0. \tag{15}$$

В соответствии с (14) имеем

$$T_{ab}\Delta_b = 0,\ T_{ab} \equiv a_i g_{iab} + b_\alpha g_{\alpha ab} + igc\delta_{ab}. \tag{16}$$

Условие нетривиального решения $\Delta_a \neq 0$ системы линейных уравнений (16) приводит к равенству

$$\det|T_{ab}(\xi)| = 0, \tag{17}$$

которое накладывает ограничения на допустимые значения параметров ξ, связанных с генератором ненарушенной симметрии.

Рассмотрим теперь состояния равновесия, не обладающие свойством трансляционной инвариантности (12). В сверхтекучей конденсированной среде в принципе могут существовать различные физические возможности нарушения такой инвариантности состояния равновесия. Это может произойти вследствие нарушения фазовой инвариантности (сверхтекучий импульс не равен нулю) или симметрии относительно поворотов в конфигурационном (спиновом) пространстве, когда вектор холестерической (магнитной) спирали не равен нулю. Полагаем, что пространственная симметрия такого рода состояний равновесия может быть задана соотношением

$$[\hat{w}, \hat{P}_k] = 0,\ \hat{P}_k = \hat{\mathcal{P}}_k - p_k \hat{N} - q_{k\alpha}\hat{S}_\alpha - t_{kj}\hat{\mathcal{L}}_j \equiv \hat{P}_k(\eta), \tag{18}$$

$\eta \equiv p_k, q_{k\alpha}, t_{kj}$ — некоторые действительные параметры генератора пространственной симметрии $\hat{P}_k(\eta)$. Генератор ненарушенной симметрии таких состояний будет включать в себя оператор импульса:

$$\hat{T} \equiv a_i \hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha \hat{S}_\alpha + c\hat{N} + d_i \hat{\mathcal{P}}_i,\ a_i, b_\alpha, c, d_i \equiv \xi. \tag{19}$$

Соотношения

$$\begin{gathered} i\ \mathrm{Sp}\ [\hat{w}, \hat{T}(\xi)]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \\ i\ \mathrm{Sp}\ [\hat{w}, \hat{P}_k(\eta)]\hat{\Delta}_a(x) = 0 \end{gathered} \tag{20}$$

в соответствии с (18) и (19) ведут к связи параметров ξ и η, входящих в определения генераторов ненарушенной и пространственной симметрии. Эти соотношения следует дополнить еще двумя условиями на параметры ненарушенной и пространственной симметрии, которые следуют из тождеств Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{T}, \hat{P}_k$ и $\hat{w}, P_i, \hat{P}_k$:

$$\begin{gathered} \mathrm{Sp}\ [\hat{w}, [\hat{T}(\xi), \hat{P}_k(\eta)]]\hat{\Delta}_a = 0, \\ \mathrm{Sp}\ [\hat{w}, [\hat{P}_i(\eta), \hat{P}_k(\eta)]]\hat{\Delta}_a = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Отметим, что $\hat{P}_k(\eta)$ не является оператором трансляций в обычном смысле слова, так как, вообще говоря, его пространственные компоненты не коммутируют между собой: $[\hat{P}_k, \hat{P}_i] \neq 0$.

Применим изложенный подход к исследованию равновесных свойств квантовой жидкости с d-спариванием. Оператор параметра порядка d-спаривания $\hat{\Delta}_{ik}(x)$ определим в терминах операторов рождения и уничтожения ферми-частицы в точке x:

$$\hat{\Delta}_{ik}(x) \equiv \nabla_i \hat{\psi}(x)\sigma_2 \nabla_k \hat{\psi}(x) + \nabla_k \hat{\psi}(x)\sigma_2 \nabla_i \hat{\psi}(x) - \\ - \frac{2}{3}\delta_{ik}\nabla_j \hat{\psi}(x)\sigma_2 \nabla_j \hat{\psi}(x), \tag{22}$$

где σ_2 – матрица Паули. Этот оператор симметричен по индексам i и k и обладает свойством $\hat{\Delta}_{ii} = 0$. Аналогичный вид параметра порядка рассматривался при классификации состояний равновесия в жидких кристаллах [19], где параметр порядка представлен в виде эрмитового, симметричного и бесшпурового тензора. Операторы числа частиц $\hat{N}$, импульса $\hat{\mathcal{P}}_k$, спина $\hat{S}_\alpha$ и орбитального момента $\hat{\mathcal{L}}_k$ имеют вид

$$\begin{gathered} \hat{N} = \int d^3x \hat{n}(x), \quad \hat{S}_i = \int d^3x \hat{s}_i(x), \\ \hat{\mathcal{P}}_i = \int d^3x \hat{\pi}_i(x), \quad \hat{\mathcal{L}}_i = \int d^3x \hat{l}_i(x), \end{gathered} \tag{23}$$

где соответствующие плотности интегралов движения $\hat{n}(x)$, $\hat{s}_i(x)$, $\hat{\pi}_i(x)$ и $\hat{l}_i(x)$ в терминах операторов рождения $\hat{\psi}^+(x)$ и уничтожения $\hat{\psi}(x)$ определяются выражениями

$$\begin{gathered} \hat{n}(x) = \hat{\psi}^+_\sigma(x)\hat{\psi}_\sigma(x), \\ \hat{s}_\alpha(x) = \hat{\psi}^+_\sigma(x)(s_\alpha)_{\sigma,\sigma'}\hat{\psi}_{\sigma'}(x), \\ \hat{\pi}_i(x) = -\frac{i}{2}[\hat{\psi}^+_\sigma(x)\nabla_i \hat{\psi}_\sigma(x) - \nabla_i \hat{\psi}^+_\sigma(x)\hat{\psi}_\sigma(x)], \\ \hat{l}_i(x) = \varepsilon_{ikl} x_k \hat{\pi}_l(x). \end{gathered} \tag{24}$$

Используя явные выражения для интегралов движения и параметра порядка в терминах полевых операторов (22)–(24), получаем операторную алгебру:

$$\begin{gathered} [\hat{N}, \hat{\Delta}_{ik}(x)] = -2\hat{\Delta}_{ik}(x), [\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_{ik}(x)] = 0, \\ i[\hat{\mathcal{P}}_l, \hat{\Delta}_{ik}(x)] = -\nabla_l \hat{\Delta}_{ik}(x), \\ i[\hat{\mathcal{L}}_l, \hat{\Delta}_{ik}(x)] = -\varepsilon_{lij}\hat{\Delta}_{jk}(x) - \\ -\varepsilon_{lkj}\hat{\Delta}_{ij}(x) - \varepsilon_{luv} x_u \nabla_v \hat{\Delta}_{ik}(x). \end{gathered} \tag{25}$$

Среднее значение параметра порядка $\Delta_{ik}(x, \hat{\rho}) = \mathrm{Sp}\ \hat{\rho}\hat{\Delta}_{ik}(x)$, где $\hat{\rho}$ – произвольный статистический оператор, обладает свойствами $\Delta_{ik}(x, \hat{\rho}) = \Delta_{ki}(x, \hat{\rho})$, $\Delta_{ii}(x, \hat{\rho}) = 0$ и поэтому содержит десять независимых величин. Выберем параметризацию величины Δ_{ik} в форме

$$\begin{gathered} \Delta_{ik}(x, \hat{\rho}) \equiv Q_{ik}(x, \hat{\rho}) + i\underline{Q}_{ik}(x, \hat{\rho}), \\ Q_{ik} \equiv A[n_i n_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}] + B[m_i m_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}], \\ \underline{Q}_{ik} \equiv C(n_i n_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}) + D(m_i m_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}) + \\ + E(m_i n_k + m_k n_i) + F(n_i l_k + n_k l_i) + G(l_i m_k + l_k m_i). \end{gathered} \tag{26}$$

Здесь $A, B, .., G$ — модули параметра порядка, $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l}$ — оси анизотропии, единичные и взаимно ортогональные векторы: $\mathbf{n}^2 = \mathbf{m}^2 = \mathbf{l}^2 = 1$, $\mathbf{nm} = 0$, $\mathbf{ml} = 0$, $\mathbf{nl} = 0$. Вид параметра порядка (22), (26) и операторная алгебра (25) совместно с (20), (21) позволяют провести анализ равновесных состояний квантовой жидкости с d-спариванием.

3. Трансляционно-инвариантные состояния равновесия сверхтекучей жидкости с d-спариванием

Рассмотрим трансляционно-инвариантные состояния равновесия сверхтекучего состояния и установим возможные равновесные структуры параметра порядка. Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний осуществим исходя из соотношений (12), (13). Согласно (13),

$$\mathrm{Sp}\,[\hat{w},\hat{T}]\hat{\Delta}_{ik}(x)=0$$

или, учитывая (14) и (25),

$$a_m(\varepsilon_{mij}\Delta_{jk}+\varepsilon_{mkj}\Delta_{ij})+2ic\Delta_{ik}=0.$$

В результате приходим к системе линейных и однородных уравнений

$$F^{ik}_{jl}\Delta_{jl}=0, \tag{27}$$

где $a_l(\varepsilon_{lij}\delta_{kl}+\varepsilon_{lkj}\delta_{il})+2ic\delta_{kl}\delta_{ji}\equiv F^{ik}_{jl}$.

Переходя в формуле (27) от двойного суммирования к одинарному, при котором индексы суммирования пробегают значения $\alpha,\beta{:}11\equiv 1,\,12\equiv 2,\ldots 33\equiv 9$, получаем уравнения

$$F^{\beta}_{\alpha}\Delta_{\alpha}=0,\ \det|F^{\beta}_{\alpha}|=0. \tag{28}$$

Соотношение $\det|F^{\beta}_{\alpha}|=0$ есть условие существования нетривиального решения системы линейных и однородных уравнений (28). Три решения уравнения $\det|F^{\beta}_{\alpha}|=0$ имеют вид

$$c=0,c=\pm\frac{1}{2}a,c=\pm a.$$

Следовательно, генераторы ненарушенной симметрии состояния равновесия сверхтекучей жидкости с d-спариванием могут быть записаны в виде

$$T=\frac{a_i}{a}\hat{\mathcal{L}}_i-\frac{m}{2}\hat{N}.$$

Здесь $m\equiv 2c/a$ — квантовое число, принимающее значения $0,\pm 1,\pm 2$. Используя определение (26), из (27) получаем уравнения, определяющие явный вид параметра порядка в равновесии:

$$\begin{aligned}&\frac{a_i}{a}(\varepsilon_{iuj}\underline{Q}_{jv}+\varepsilon_{ivj}\underline{Q}_{ju})-mQ_{uv}=0,\\&\frac{a_i}{a}(\varepsilon_{iuj}Q_{jv}+\varepsilon_{ivj}Q_{ju})+m\underline{Q}_{uv}=0.\end{aligned} \tag{29}$$

При решении этой системы уравнений разложим вектор $\mathbf{a}$ по указанному реперу $\mathbf{q}\equiv\mathbf{a}/a=\alpha\mathbf{n}+\beta\mathbf{m}+\gamma\mathbf{l}$. Величины α,β,γ связаны равенством $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Положим в (29) $m=0$ и рассмотрим следующие случаи:

1. $\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$. При этом амплитуды параметра порядка $A=0,B=0$ и, следовательно, $\Delta_{uv}=i\underline{Q}_{uv}$:

$$\Delta_{uv}=\frac{iE}{\alpha\beta}\left(q_uq_v-\frac{1}{3}\delta_{uv}\right). \tag{30}$$

2. $\gamma=0,\beta\neq 0,\alpha\neq 0$ (случаи $\beta=0,\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$ и $\alpha=0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$ эквивалентны рассматриваемому). В этом случае также имеем $A=0,B=0$ и $\Delta_{uv}=i\underline{Q}_{uv}$:

$$\Delta_{uv}=\frac{i\tilde{C}}{\alpha^2}\left(q_uq_v-\frac{1}{3}\delta_{uv}\right). \tag{31}$$

3. $\alpha\neq 0,\beta=\gamma=0$ (решения $\beta\neq 0,\alpha=\gamma=0$ и $\gamma\neq 0$, $\beta=\alpha=0$ эквивалентны рассматриваемому случаю). При этом $A\neq 0,C\neq 0$, т.е. вещественная и мнимая части параметра порядка отличны от нуля: $\Delta_{uv}=Q_{uv}+i\underline{Q}_{uv}$:

$$\Delta_{uv}=(A+iC)\left(q_uq_v-\frac{1}{3}\delta_{uv}\right). \tag{32}$$

Во всех трех случаях мы получили структуру параметра порядка, подобную одноосному жидкому кристаллу с комплексной амплитудой.

При $m\neq 0$ решение уравнений (29) имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_{uv}=&A(n_un_v-\frac{1}{3}\delta_{uv})+B(m_um_v-\frac{1}{3}\delta_{uv})+\\&+i[E(m_vn_u+m_un_v)+F(l_vn_u+l_un_v)+\\&+G(l_vm_u+l_um_v)],\end{aligned} \tag{33}$$

где $E=(\gamma/m)(B-A)$, $G=-(\alpha/m)B$, $F=(\beta/m)A$.

Так же как и для случая $m=0$, рассмотрим всевозможные значения коэффициентов α,β,γ.

1. $\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$. В этом случае амплитуды параметра порядка $A=0,B=0$ и, следовательно, $\Delta_{uv}=0$ (нет нетривиального решения).

2. $\gamma=0,\beta\neq 0,\alpha\neq 0$ (случаи $\beta=0,\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$ и $\alpha=0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$ эквивалентны рассматриваемому). В этом случае имеем $A\neq 0,B\neq 0$. При таких значениях параметров существует только решение для $m=\pm 1$:

$$\begin{aligned}\Delta_{uv}=&A(n_un_v-m_um_v)\pm\frac{iA}{\sqrt{2}}(l_v(n_u+m_u)+\\&+l_u(n_v+m_v)),\end{aligned} \tag{34}$$

при этом $\beta^2=\alpha^2=1/2$.

3. $\gamma=0,\beta=0,\alpha=1$ (случаи $\beta=0,\alpha=0,\gamma=1$ и $\alpha=0,\gamma=0,\beta=1$ эквивалентны рассматриваемому), имеется решение только для $m=\pm 2$:

$$\Delta_{uv}=A(m_um_v-l_ul_v)\mp iA(l_vm_u+l_um_v). \tag{35}$$

Для того чтобы сравнить полученные результаты с результатами работ [5,14], введем среднее

$$\Delta\equiv k_i\Delta_{ij}k_j, \tag{36}$$

где единичный вектор **k** определен равенством

$$\mathbf{k} \equiv \sin\theta\sin\varphi\mathbf{m} + \cos\theta\mathbf{n} + \sin\theta\cos\varphi\mathbf{l}. \quad (37)$$

Для решений (31), (32) и (33) при $m = 0$ в соответствии с (36), (37) найдем

$$\Delta_1^{(0)} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}\left[(\beta k_y + \alpha k_z + \gamma k_x)^2 - \frac{1}{3}\right],$$

$$\Delta_2^{(0)} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}\left[(\beta k_y + \alpha k_z)^2 - \frac{1}{3}\right],$$

$$\Delta_3^{(0)} = (A + iC)\left(k_z^2 - \frac{1}{3}\right), \quad (38)$$

где $A^2 + C^2 = 3/2$. Эти решения соответствует состоянию «real», полученному в работе [5].

Решение (34) для $m = \pm 1$ в силу (36), (37) приводит к равенству

$$\Delta^{(1)} = A(k_x + k_y)(\pm i\sqrt{2}k_z + k_y - k_x), \quad (39)$$

где $A^2 = 1/4$.

Наконец, для решения (35) ($m = \pm 2$) получим

$$\Delta^{(2)} = A(k_x \pm ik_y)^2,$$

где $A^2 = 1/4$. Это решение в точности соответствуют состоянию «axial» работы [5].

Сравнивая полученные выражения для параметра порядка с результатами работ [5,14], видим, что эквивалентности в решениях для «cyclic» состояния (39) нет. Причиной этого является тот факт, что в отличие от подхода работы [20] мы рассматриваем только спонтанное нарушение непрерывной симметрии и не учитываем нарушение дискретной симметрии. Поэтому природа возникновения решений (39) и «cyclic» состояния работы [14] разная. Анализ состояний равновесия сверхтекучих систем, учитывающий возможность дискретного нарушения симметрии, требует отдельного рассмотрения.

4. Неоднородные состояния равновесия сверхтекучих фаз квантовой жидкости с *d*-спариванием

При классификации неоднородных состояний рассмотрим вначале подгруппы пространственной симметрии, генератор которых состоит из двух операторов. Пусть

$$[\hat{w}, \hat{P}_k] = 0,$$

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N}. \quad (40)$$

Согласно (40) и алгебре (25), для параметра порядка получим уравнение

$$\nabla_i\Delta_{qk}(x) = 2ip_i\Delta_{qk}(x), \quad (41)$$

решение которого имеет вид

$$\Delta_{qk}(x) = \exp(2i\varphi(x))\underline{\Delta}_{qk}(0),\ \varphi(x) = \varphi + \mathbf{px}, \quad (42)$$

здесь $\underline{\Delta}_{qk}(0)$ — однородная часть параметра порядка, которая не зависит от координаты. В силу явного вида генератора ненарушенной симметрии (19) и уравнения (41) справедливы равенства

$$a_k(\varepsilon_{kil}\Delta_{ql} + \varepsilon_{kql}\Delta_{li} + \varepsilon_{kuv}x_u\nabla_v\Delta_{qi}) + 2i\underline{c}\Delta_{qi} = 0,$$

где $\underline{c} \equiv c + \mathbf{pd}$. Из требования зануления линейного по координате слагаемого в этом уравнении следуют соотношения, определяющие равновесную структуру параметра порядка:

$$a_k(\varepsilon_{kil}\underline{\Delta}_{ql} + \varepsilon_{kql}\underline{\Delta}_{li}) + 2i\underline{c}\,\underline{\Delta}_{qi} = 0, \mathbf{a}\times\mathbf{p} = 0.$$

Видим, что для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{qk}(0)$ (42) справедлива процедура классификации, изложенная выше.

Исследуем теперь пространственную симметрию, определяемую равенством

$$[\hat{w}, \hat{P}_k] = 0,\ \hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - t_{kj}\hat{\mathcal{L}}_j. \quad (43)$$

Условие пространственной симметрии (43) и алгебра (25) приводят к системе уравнений

$$\nabla_i\Delta_{qk}(x) = t_{ij}(\varepsilon_{jkl}\Delta_{ql}(x) +$$

$$+ \varepsilon_{jql}\Delta_{lk}(x) + \varepsilon_{juv}x_u\nabla_v\Delta_{qk}(x)),$$

$$t_{ij}\varepsilon_{juv}\nabla_v\Delta_{qk}(x) = 0, \quad (44)$$

откуда получим условие на допустимую структуру параметра t_{ij}:

$$t_{ij}\varepsilon_{juv}t_{v\lambda}(\varepsilon_{\lambda kl}\Delta_{ql}(x) + \varepsilon_{\lambda ql}\Delta_{lk}(x)) = 0. \quad (45)$$

Величину t_{kj} будем искать в виде $t_{kj} = t\delta_{kj} + t_i\varepsilon_{ikj} + t_{kj}^s$, где t_{kj}^s — симметричный и бесшпуровый тензор. Подставим это выражение в (45) и учтем, что это соотношение справедливо при любых значениях индексов. Сворачивая его с тензором $(\delta_{ki}\delta_{lu} - \delta_{ku}\delta_{li})$, получаем уравнения связи на параметры матрицы t_{kj}

$$6t^2 - t_n^2 - t_{i\lambda}^s t_{i\lambda}^s = 0. \quad (46)$$

Сворачивая соотношения (46) с тензором ε_{klu}, приходим к уравнению

$$t_j(t\delta_{ij} + t_{ij}^s) = 0. \quad (47)$$

Следствием уравнений (46), (47) будет равенство $t_j = 0$. Обратимся теперь к тождеству Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{P}_i, \hat{P}_k$. В соответствии с явным видом (43) найдем условия на структуру элементов матрицы t_{ij}:

$$t_{ii}t_{kl}^2 - t_{ik}t_{kl}t_{li} = 0, \quad t_{ik}t_{ki} - t_{ii}t_{kk} = 0. \qquad (48)$$

Нетрудно получить явный вид матрицы t_{ij}, удовлетворяющей уравнениям (46)–(48):

$$t_{ik} = tl_i l_k. \qquad (49)$$

Пространственно-неоднородная часть параметра порядка может быть найдена из уравнения (44) с учетом (49). Решение имеет вид

$$\Delta_{qi}(x) = a_{qv}(\mathbf{l}\psi(x))a_{ik}(\mathbf{l}\psi(x))\underline{\Delta}_{vk}(0), \qquad (50)$$

здесь $a_{ik}(\mathbf{l}\psi(x))$ — ортогональная матрица поворота в конфигурационном пространстве вокруг оси $\mathbf{l}$ на угол $\psi(x) = \psi + t\mathbf{lx}$. Это решение описывает геликоидальную структуру. Величина $2\pi t^{-1}$ определяет шаг геликоида, направление которого задано единичным вектором $\mathbf{l}$.

Условие ненарушенной симметрии (13),(19), с учетом (43),(50), приводит к уравнению

$$\underline{a}_k(\varepsilon_{kil}\Delta_{ql} + \varepsilon_{kql}\Delta_{li} + \varepsilon_{kuv}x_u\nabla_v\Delta_{qi}) + 2ic\Delta_{qi} = 0, \qquad (51)$$

где $\underline{a}_i \equiv a_i + tl_i\mathbf{ld}$. Отсюда получим соотношение $\underline{\mathbf{a}} \times \mathbf{l} = 0$, ограничивающее структуру параметра порядка, которое возникает из требования отсутствия линейного слагаемого по координате в уравнении (51), и уравнение для однородной части параметра порядка

$$\underline{a}_k(\varepsilon_{kil}\underline{\Delta}_{ql} + \varepsilon_{kql}\underline{\Delta}_{li}) + 2ic\underline{\Delta}_{qi} = 0.$$

Общая структура оператора пространственной симметрии, согласно (40), (43), имеет вид

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N} - tl_j l_k \hat{\mathcal{L}}_j. \qquad (52)$$

Условие пространственной симметрии состояния равновесия рассматриваемой ферми-жидкости следует дополнить условием ненарушенной симметрии состояния равновесия (13), где генератор $\hat{T}$ определяется равенством (19). В соответствии с этими условиями симметрии запишем равенства

$$i\,\mathrm{Sp}\,[\hat{w},\hat{T}]\hat{\Delta}_{qk}(x) = 0, \quad i\,\mathrm{Sp}\,[\hat{w},\hat{P}_i]\hat{\Delta}_{qk}(x) = 0.$$

Отсюда получим уравнения, устанавливающие равновесную структуру параметра порядка, и найдем ограничения на параметры a_i, b_α, c, d_i генератора $\hat{T}$ и параметры p_k, t, l_k оператора пространственной симметрии $\hat{P}_k$:

$$\underline{a}_i(\varepsilon_{ikl}\Delta_{ql}(x) + \varepsilon_{iql}\Delta_{lk}(x) +$$
$$+\varepsilon_{iuv}x_u\nabla_v\Delta_{qk}(x)) + 2i\underline{c}\Delta_{qk}(x) = 0,$$
$$\nabla_i\Delta_{qk}(x) = 2ip_i\Delta_{qk}(x) + tl_i l_j[\varepsilon_{jkm}\Delta_{qm}(x) +$$
$$+\varepsilon_{jqm}\Delta_{mk}(x) + \varepsilon_{juv}x_u\nabla_v\Delta_{qk}(x)]. \qquad (53)$$

Параметры $\underline{a}_i, \underline{c}$ связаны с величинами a_i, c соотношениями

$$\underline{a}_i \equiv a_i + tl_i\mathbf{ld}, \ \underline{c} \equiv c + \mathbf{pd}.$$

Требование отсутствия линейных по координате слагаемых в уравнениях (53) приводит к соотношениям

$$l_j\varepsilon_{juv}[2ip_v\Delta_{qk}(x) + tl_v l_r(\varepsilon_{rkm}\Delta_{qm}(x) +$$
$$+\varepsilon_{rqm}\Delta_{mk}(x))] = 0,$$
$$\underline{a}_j\varepsilon_{juv}[2ip_v\Delta_{qk}(x) + tl_v l_m(\varepsilon_{mkn}\Delta_{qn}(x) +$$
$$+\varepsilon_{mqn}\Delta_{nk}(x))] = 0, \qquad (54)$$

которые позволяют связать направления векторов $\mathbf{p}, \mathbf{l}$ между собой и с вектором $\underline{\mathbf{a}}$. Уравнения (53),(54) служат основой анализа классификации равновесных состояний сверхтекучих фаз квантовой жидкости с d-спариванием с генератором пространственной симметрии (52). Решение второго уравнения в (53) имеет вид

$$\Delta_{qi}(x) = e^{2i\varphi(x)}a_{qv}(\mathbf{l}\psi(x))a_{ik}(\mathbf{l}\psi(x))\underline{\Delta}_{vk}(0). \qquad (55)$$

Соотношения (54) выполняются, если векторы $\mathbf{p}, \mathbf{l}$, и $\underline{\mathbf{a}}$ коллинеарны. В этом случае первое уравнение (53) позволяет свести уравнение для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{vk}(0)$ к виду

$$\underline{a}_i(\varepsilon_{ikl}\underline{\Delta}_{ql}(0) + \varepsilon_{iql}\underline{\Delta}_{lk}(0)) + 2i\underline{c}\,\underline{\Delta}_{qk}(0) = 0.$$

Изучим условие стационарности сверхтекучих состояний квантовой жидкости с d-спариванием. Зависимость $\Delta = \Delta(x,t)$ от времени обусловлена тем, что введение источника F нарушает инвариантность равновесного статистического оператора $\hat{w}$ по отношению к трансляциям во времени, т.е. $[\hat{w},\hat{\mathcal{H}}] \neq 0$. Равновесный статистический оператор удовлетворяет уравнению фон Неймана, вследствие чего

$$\exp(-i\hat{\mathcal{H}}\tau)\hat{w}(t)\exp(i\hat{\mathcal{H}}\tau) = \hat{w}(t+\tau).$$

Для равновесного статистического оператора Гиббса справедливо соотношение

$$[\hat{w},\hat{H}] = 0, \ \hat{H} = \hat{\mathcal{H}} + p_0\hat{N}, \ p_0 = Y_4/Y_0.$$

Уравнение фон Неймана совместно с условием стационарности позволяет определить временную зависимость равновесных средних. В частности, для параметра порядка получим

$$\mathrm{Sp}\ \hat{w}(t)\hat{\Delta}_{qk}(x) =$$
$$= \mathrm{Sp}\ \hat{w}(0)\exp(i\hat{N}p_0t)\hat{\Delta}_{qk}(x)\exp(-i\hat{N}p_0t),$$

откуда

$$\Delta_{qk}(x,t) = \exp(2ip_0t)\ \mathrm{Sp}\ \hat{w}(0)\hat{\Delta}_{qk}(x). \qquad (56)$$

Соотношения (55) и (56) определяют пространственно-временную зависимость параметра порядка в состоянии равновесия.

Заключение

В работе на основе концепции квазисредних проведено обобщение классификации состояний равновесия квантовой жидкости с d-спариванием на неоднородные равновесные состояния. Найдены допустимые условия ненарушенной и пространственной симметрии. Показана возможность существования жидкокристаллического упорядочения в таких квантовых жидкостях.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (Грант N 03–02–17695) и фондом INTAS (Грант N 00–00577).

1. G. Barton and M. Moore, *J. Phys.* **C7**, 4220 (1974).
2. H.W. Capel, *Proc. 5th Intern. Symp. Selected Topics in Statistical Mechanics*, World Scientific, 73 (1990).
3. D. Vollhardt and P. Wolfle, *Taylor and Francis* (eds.), London–New York–Philadelphia (1990).
4. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, Н.Н. Чеканова, *ФНТ* **28**, 327 (2002).
5. Н.Д. Мермин, Сборник статей «Сверхтекучесть гелия-3», 110 (1977).
6. D. Pines and A. Alpar, *Nature* **316**, 27 (1985).
7. M. Baldo, J. Cugnon, A. Lejeune, and U. Lombardo, *Nuclear Physics* **A536**, 349 (1992).
8. V.C. Schaab, F. Weber, M.Weigel, and N. Glendenning, *Nuclear Physics* **A605**, 531 (1996).
9. O. Elgaroy, L. Engvik, M. Hjorth-Jensen, and E. Osnes, *Nuclear Physics* **A607**, 425 (1996).
10. N.D. Mermin and C. Stare, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1135 (1973).
11. D.J. Van Harlingen, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 515 (1995).
12. C.C. Tsuei and J.R. Kirtley, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 969 (2000).
13. H. Won and K. Maki, *Phys. Rev.* **B49**, 1397 (1994).
14. T.L. Ho and S.S. Yip, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 247 (1999).
15. N. Bogolyubov, *Proc. Steklov Institute of Mathematics* **2**, 3 (1988).
16. Н.Н. Боголюбов (мл.), М.Ю. Ковалевский, А.М. Курбатов, С.В. Пелетминский, А.Н. Тарасов, *УФН* **159**, 585 (1989).
17. V.P. Mineev, *Sov. Scien. Rev. Sec.* **A2**, 173 (1980).
18. М.Ю. Ковалевский, А.А. Рожков, *ТМФ* **113**, 313 (1997).
19. М.Ю. Ковалевский, Н.Н. Чеканова, *Вестник Харьковского университета*, № 541, сер. физическая «Ядра, частицы, поля», вып. 4(16), 59 (2001).
20. C. Bruder and D. Vollhardt, *Phys. Rev.* **B34**, 131 (1986).

Classification of equilibrium states of superfluid liquid with d-pairing

A.P. Ivashin, M.Y. Kovalevsky, and N.N. Chekanova

The equilibrium states with d-pairing are classified on the basis of the quasi-average concept. The order parameter is represented in terms of the Fermi-operators. It is shown that a set of such equilibrium states could be classified in terms of the quantum number which corresponds to the projection of of the Cooper pair orbital momentum on the anisotropy direction. An explicit form of three admissible generators of unbroken symmetry and relevant equilibrium values of the order parameter are obtained. The unbroken symmetry condition is generalised to inhomogeneous equilibrium states. The order parameter for these structures is derived.