

# Трансформация фононов на границе раздела сверхтекучий гелий–твердое тело

И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина

E-mail: i.n.adamenko@mail.ru

Статья поступила в редакцию 4 марта 2013 г.

Получен гамильтониан взаимодействия фононов сверхтекучего гелия с осциллирующей поверхностью твердого тела. Это позволило вычислить вероятности как упругого, так и всех возможных неупругих процессов превращений фононов на границе раздела сверхтекучий гелий–твердое тело. Вычислены вклады всех процессов в поток тепла и в разности потоков тепла между сверхтекучим гелием и твердым телом. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными и результатами, полученными другими авторами.

Отримано гамільтоніан взаємодії фононів надплинного гелію з осцилюючою поверхнею твердого тіла. Це дозволило вичислити вірогідності як пружного, так і усіх можливих непружних процесів перетворень фононів на границі розподілу надплинний гелій–тверде тіло. Обчислено вклади усіх процесів в потік тепла і в різниці потоків тепла між надплинним гелієм і твердим тілом. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними та результатами, які отримані іншими авторами.

PACS: 67.25.dt Звук и возбуждения.

Ключевые слова: скачок Капицы, фононы, поток тепла.

## 1. Введение

Капица обнаружил [1] необычное явление, которое возникало при теплообмене между сверхтекучим гелием и твердым телом. При тепловом потоке  $\Delta W$  через границу раздела двух сред на границе сверхтекучий гелий–твердое тело возникал скачок температуры  $\Delta T$  (скачок Капицы), который был пропорционален  $\Delta W$ . Коэффициент пропорциональности  $R$  был назван тепловым сопротивлением Капицы, а обратная величина  $h=1/R$  — коэффициентом теплопередачи, который определяется равенством

$$\Delta W = h\Delta T. \quad (1)$$

С тех пор и до настоящего времени явление теплообмена между сверхтекучим гелием и твердым телом достаточно интенсивно исследуется как экспериментально, так и теоретически. Можно назвать, по крайней мере, три причины, которые стимулируют эти исследования.

Во-первых, необычность рассматриваемого явления, которое, как оказалось, наблюдается не только на границе раздела сверхтекучий гелий–твердое тело, но и на границах раздела других квантовых сплошных сред. Во-вторых, необходимость учета скачка Капицы

во всех низкотемпературных экспериментах. Так, согласно [1], с понижением температуры при заданном значении  $\Delta T$  поток тепла  $\Delta W$  уменьшается с понижением температуры по кубическому закону. Это обстоятельство существенно снижает эффективность работы теплообменников, находящихся в сверхтекучем гелии. И наконец, в-третьих, несмотря на достигнутый за эти годы прогресс в понимании физики теплообмена между двумя квантовыми сплошными средами, целый ряд вопросов оказался нерешенным и до настоящего времени.

Первое теоретическое объяснение скачка Капицы было предложено Халатниковым [2–4]. Согласно теории Халатникова, теплообмен между двумя квантовыми сплошными средами обусловлен переходом фононов из одной среды в другую. Эти фононы являются квантами звуковой волны, которая с трудом проходит через границу раздела двух сплошных сред с разными скоростями звука и разными плотностями. Именно такими средами являются сверхтекучий гелий и твердое тело.

В соответствии с классической акустической теорией вероятность прохождения звуковой волны из жидкости в твердое тело пропорциональна импедансу границы  $\rho_L c_L / \rho_S c_S$ , где  $c_L$  и  $c_S$  — скорости звука в жидко-

сти и твердом теле, а  $\rho_L$  и  $\rho_S$  — плотности жидкости и твердого тела. Кроме того, звуковая волна, падающая из жидкости под углом к нормали границы раздела, большим чем  $c_L/c_S$ , испытывает полное внутреннее отражение. Это значит, что из жидкости в твердое тело могут пройти только фононы, движущиеся в узком конусе с телесным углом  $(c_L/c_S)^2$ , ось которого нормальна к границе раздела жидкость–твердое тело.

Таким образом, согласно теории Халатникова [2–4], теплосоппротивление границы раздела и связанный с ним скачок Капицы обусловлены малой вероятностью прохождения фононов через границу раздела и узким конусом углов, при которых возможно прохождение фононов из жидкости в твердое тело. Эти два обстоятельства приводят к тому, что фононы, которые относительно легко движутся в каждой из двух сред, с большим трудом преодолевают границу раздела. В итоге на границе раздела и возникает скачок температуры. Первое теоретическое объяснение скачка Капицы, разработанное Халатниковым, получило название модели акустического рассогласования сред.

Теория Халатникова давала температурную зависимость для коэффициента теплопередачи  $h_{Kh} \sim T^3$ , которая совпадала с экспериментальной [1]. Что же касается численного значения  $h_{Kh}$ , то оно было меньше экспериментального  $h$  на два порядка.

Последующие эксперименты, проведенные разными авторами для различных твердых тел, давали значения коэффициента теплопередачи, которые в ряде случаев в разы отличались у разных авторов даже для одних и тех же твердых тел, граничащих со сверхтекучим гелием. При этом, численные экспериментальные значения коэффициента теплопередачи были больше  $h_{Kh}$  на один–два порядка при  $T \sim 1$  К. Что же касается температурной зависимости коэффициента теплопередачи, то показатель степени отклонялся в различных экспериментах в пределах единицы в обе стороны от кубической. Результаты таких экспериментов приведены в обзорах [5–7] и содержатся в более поздних экспериментальных работах [8–10].

Физическая интерпретация Халатниковым [2–4] скачка Капицы не вызывает сомнений и сегодня. Однако расхождение теории с экспериментом столь значительно, что экспериментальные и теоретические исследования теплообмена между сверхтекучим гелием и твердым телом ведутся вплоть до настоящего времени.

Большие экспериментальные значения коэффициента теплопередачи означают, что наряду с акустическим каналом, предложенным Халатниковым, существуют и другие возможности теплообмена между сверхтекучим гелием и твердым телом. Все последующие теоретические работы были посвящены поиску таких дополнительных возможностей. При этом следует подчеркнуть, что основой всех этих теоретических работ,

включая и настоящую работу, является физическая интерпретация Халатникова скачка Капицы.

Акустическая модель предполагает, что поверхность твердого тела, граничащая со сверхтекучим гелием, является идеально гладкой и не содержит каких-либо дефектов. Поток тепла через границу раздела, обусловленный неидеальностью поверхности твердого тела, исследовался в теоретических работах [11–13]. Было показано, что шероховатость поверхности твердого тела [11] и наличие на ней дефектов [12] приводят к тому, что из гелия в твердое тело могут с соответствующей вероятностью проходить фононы, падающие под любыми углами к границе раздела, а не только в узком конусе с телесным углом  $(c_L/c_S)^2$ . В этом случае поток тепла, обусловленный неидеальностью границы раздела, в предельном случае может быть в  $(c_S/c_L)^2$  раз больше, чем в акустической модели [2–4], которая предполагала поверхность твердого тела идеальной. Для границы раздела сверхтекучий гелий–твердое тело  $(c_S/c_L)^2 \sim 10^2$ , что в принципе может согласовать теорию с экспериментальными данными. Реально эта величина будет меньше, поскольку вероятность прохождения фононов в твердое тело, падающих в узком конусе, больше, чем вероятность прохождения при падении фононов под произвольными углами к нормали границы раздела.

Вклад шероховатости поверхности твердого тела в скачок Капицы экспериментально исследовался в целом ряде работ. С нашей точки зрения, результаты наиболее полных экспериментальных исследований роли шероховатости приведены в работах [8–10]. В цитируемых работах показано, что при шероховатых поверхностях величина коэффициента теплопередачи на порядок больше, чем при идеальной поверхности раздела.

В работе [13] рассмотрено влияние на скачок Капицы монослоя атомов, адсорбированных поверхностью твердого тела. В [13] показано, что наличие на поверхности твердого тела такого монослоя приводит к формированию низкочастотных квазиповерхностных и поверхностных состояний, вклад которых в теплообмен между двумя средами при некоторых температурах может быть существенным.

Указанные выше теоретические работы объясняют причину несовпадения численных значений и температурных зависимостей коэффициентов теплопередачи, полученных в экспериментах разными авторами для одних и тех же твердых тел, граничащих со сверхтекучим гелием. Дело в том, что разное качество поверхности твердого тела дает разные значения для величины и температурной зависимости коэффициента теплопередачи. Эти теоретические работы могут также объяснить слабую зависимость скачка Капицы от давления, которая не согласуется с акустической теорией [2–4] (см. обзоры [5–7]).

По мере понижения температуры характерная длина волны фонона увеличивается и уменьшается вклад соответствующих шероховатостей в скачок Капицы. Это согласуется с тем, что акустическая модель [2–4] хорошо описывает экспериментальные данные при достаточно низких температурах ( $T \leq 0,01$  К) или для относительно низкочастотных акустических волн (см. обзор [14]).

В работах [15,16] рассматривался вклад рассеяния фононов на электронах проводимости в теплопередачу через границу раздела металл–сверхтекучий гелий. В работе [17] была получена вероятность прохождения ротонов через границу раздела сверхтекучий гелий–твердое тело. Это позволило найти поток энергии, обусловленный ротонами. Из расчетов, выполненных в [17], следует, что вклад ротонов в скачок Капицы является относительно малым.

Впоследствии в разные годы выполнялись и прямые эксперименты [18–22], в которых измерялось распределение по энергиям и углам фононов, излученных нагретым твердым телом в холодный ( $T < 100$  мК) сверхтекучий гелий. Эти прямые эксперименты, проведенные на различных идеальных кристаллических поверхностях, показали наличие двух четко разделенных каналов излучения фононов в сверхтекучий гелий.

Первый канал образовывал острый пик фононов, излученных в узкий конус углов, ось которого была нормальна к поверхности твердого тела. Наблюдаемая в [18] величина телесного угла этого конуса совпадала с расчетными значениями для разных твердых тел по классической акустической теории, на которой базировалась теория Халатникова [2–4]. Этот канал излучения был назван акустическим.

Наряду с фононами, излученными в узкий конус, наблюдались также фононы, излученные во всех направлениях с косинусообразным распределением по углам. Этот канал излучения фононов получил название фоновое (background) излучение. При этом полная энергия фононов, содержащихся в фоновом излучении, была на порядок больше, чем энергия фононов, излученных в акустический канал.

Здесь следует отметить, что в настоящее время невозможно ликвидировать наношероховатости, которые существуют на любых сколь угодно идеальных поверхностях твердого тела. Наношероховатости, безусловно, будут давать вклад в фоновое излучение. Величина этого вклада зависит от конкретных экспериментальных условий.

Согласно теоретическим расчетам [23], выполненным по результатам экспериментальной работы [24], фононы, излученные нагретой достаточно шероховатой поверхностью золота в холодный ( $T < 100$  мК) сверхтекучий гелий, были также распределены по двум каналам: акустическому и фоновому. При этом основная часть энергии фононов находилась в фоновом из-

лучении и ее доля росла с увеличением температуры нагревателя — золота.

Согласно акустической теории [2–4], твердотельный фонон, падающий на границу раздела твердое тело–жидкость, с определенной вероятностью превращается в фонон жидкости. При этом энергия падающего твердотельного фонона равна энергии жидкостного фонона. Такой процесс перехода фонона из одной среды в другую называется упругим.

Большие надежды на объяснение существования фонового излучения возлагались на неупругие процессы, в которых число фононов в начальном и конечном состояниях не совпадает. В экспериментальной работе [21] содержится диаграмма такого неупругого процесса, где один твердотельный фонон превращается в два жидкостных фонона, которые могут двигаться под любыми углами к границе раздела. При этом энергия твердотельного фонона больше энергии фонона жидкости. Как отмечалось в [21], на возможность вклада в фоновое излучение неупругих процессов указывал тот факт, что фононы, образующие фоновое излучение, имеют меньшую энергию, чем фононы, сосредоточенные в узком акустическом пике.

В связи с этим представляет несомненный интерес теоретическое рассмотрение вероятностей неупругих процессов и их вклад в поток энергии через границу раздела твердое тело–сверхтекучий гелий. Один из возможных неупругих процессов, который отличался от процесса, изображенного в [21], был рассмотрен Халатниковым в [4], который показал, что вклад этого процесса в скачок Капицы является относительно малым.

В работе [25] впервые была предпринята попытка создания микроскопической теории, которая бы единым образом описывала как упругие, так и неупругие процессы на границе раздела твердое тело–сверхтекучий гелий. Работа [26] развивала подход, предложенный в [25]. Однако в [25,26] не удалось создать самосогласованный подход, который бы позволил получить результаты, совпадающие с результатами Халатникова для упругого процесса. По-видимому, с этим обстоятельством связан тот факт, что в работах [25,26] вычисления не доведены до окончательных аналитических формул и конкретных численных значений.

На конференции [27] авторами настоящей работы были представлены первые результаты построения единой самосогласованной теории, описывающей как упругие, так и неупругие процессы на границе раздела сверхтекучий гелий–твердое тело. В материалах конференции [28] были опубликованы эти первые результаты, которые сводились к получению гамильтониана границы раздела сверхтекучий гелий–твердое тело и рассмотрению упругого процесса, а также ряда неупругих процессов, дающих вклад в поток энергии от нагретого твердого тела в холодный сверхтекучий гелий.

Целью настоящей работы является исследование всех возможных неупругих процессов, которые происходят на границе раздела сверхтекучий гелий–твёрдое тело, а также получение окончательных аналитических выражений, описывающих эти неупругие процессы, и нахождение их вкладов в поток энергии от нагретого твёрдого тела в холодный сверхтекучий гелий и в скачок Капицы.

## 2. Гамильтониан взаимодействия гелий–твёрдое тело

В основе предлагаемой теории лежит гидродинамический гамильтониан тепловых возмущений во внешнем поле, созданным осциллирующей поверхностью твёрдого тела. Данный гамильтониан существенно отличается от гамильтонианов, которые использовались в работах [4,25,26], и даёт правильный результат для упругого процесса, совпадающий с результатом, полученным в теории Халатникова [3]. Для получения гамильтониана, следует вычислить плотность энергии сверхтекучего гелия в присутствии колеблющейся границы раздела.

Колебания стенки возбуждают в жидкости колебания плотности  $\rho_i$  и скорости  $\mathbf{v}_i$ , наряду с присутствующими в жидкости собственными колебаниями  $\rho$  и  $\mathbf{v}$ . Запишем плотность энергии в виде

$$E = \frac{1}{2} \rho_L + \rho + \rho_i \quad \mathbf{v} + \mathbf{v}_i \quad ^2 + E_p \quad \rho_L + \rho + \rho_i \quad , \quad (2)$$

где  $E_p$  — функционал плотности. В целях упрощения задачи ограничимся только продольными фононами в твёрдом теле. Учет поперечных фононов не вызывает принципиальных трудностей. Однако все расчеты становятся более громоздкими. При этом учет поперечных фононов приводит к появлению в конечных результатах множителя  $F$ , который зависит от упругих констант твёрдого тела. Для разных твёрдых тел  $F$  из-

меняется в небольших пределах, оставаясь численно порядка двух. Выражение (2) приводим к виду, представляющему собой разложение с точностью до кубических членов по малым параметрам  $\rho_i$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\rho$  и  $\mathbf{v}$ . При этом вклад во взаимодействие гелия и стенки будут давать слагаемые, которые содержат одновременно параметры, характеризующие и твёрдое тело, и жидкость. В этом случае энергия взаимодействия примет следующий вид:

$$E_{\text{int}} = \rho_L \mathbf{v} \mathbf{v}_i + \frac{c_L^2}{\rho_L} \rho \rho_i + \frac{\rho}{2} (2 \mathbf{v} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^2) + \frac{\rho_i}{2} (2 \mathbf{v} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}^2) + \frac{c_L^2}{2\rho_L^2} 2u - 1 \quad \rho \rho_i \quad \rho + \rho_i \quad , \quad (3)$$

где  $u = (\rho_L / c_L)(\partial c_L / \partial \rho_L)$  — постоянная Грюнайсена, которая для гелия равна 2,84. В (3) два первых слагаемых описывают двухфононные взаимодействия, а остальные слагаемые — трехфононные (в терминах вторичного квантования).

Поскольку в данной задаче скорости и плотности фононов твёрдого тела и жидкости заданы на полупространстве, возникают трудности с разложением их в ряды Фурье и дальнейшим применением метода вторичного квантования. Для преодоления этих трудностей предлагается следующий способ аналитического продолжения решений, который позволил бы применить разложение в ряды Фурье и метод вторичного квантования. Исходя из граничных условий для плотности и скорости жидкости, а также для скорости колебания границы твёрдого тела, операторы возмущения плотности и скорости гелия, а также скорости колебания границы раздела, нормированные на полупространстве, примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \rho_L \sum_{k_z=0}^{+\infty} \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \frac{i}{c_L} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\rho_L V_L}} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ + \hat{a}_{-\mathbf{k}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \right] \left( \frac{e^{ik_z z} + e^{-ik_z z}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}} , \\ \hat{v}_z &= \sum_{k_z=0}^{+\infty} \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\rho_L V_L}} i \frac{k_z}{k} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ + \hat{a}_{-\mathbf{k}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \right] \left( \frac{e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}} , \\ \hat{v}_{iz} &= \sum_{q_z=0}^{+\infty} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}} \sqrt{\frac{\hbar \Omega}{2\rho_S V_S}} i \frac{q_z}{q} \left[ \hat{b}_{\mathbf{q}} - \hat{b}_{-\mathbf{q}}^+ + \hat{b}_{-\mathbf{q}} - \hat{b}_{\mathbf{q}}^+ \right] \left( \frac{e^{iq_z z} + e^{iq_z z}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}} , \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$  — волновые векторы фононов сверхтекучего гелия и твёрдого тела,  $\omega$  и  $\Omega$  — частоты фононов сверхтекучего гелия и твёрдого тела,  $V_L$  и  $V_S$  — объёмы, занимаемые жидкостью и твёрдым телом,  $\hat{a}_{\mathbf{q}}^+$  ( $\hat{a}_{\mathbf{q}}$ ) и  $\hat{b}_{\mathbf{q}}^+$  ( $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ ) — операторы рождения (уничтожения) фоно-

нов гелия и твёрдого тела; ось  $z$  направлена перпендикулярно границе раздела, а  $\mathbf{k}_{\parallel}$  и  $\mathbf{q}_{\parallel}$  — тангенциальные составляющие волновых векторов фононов сверхтекучего гелия и твёрдого тела.

Выражения (3) и (4) позволяют представить оператор Гамильтона

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int_0^L dz \int dS E_{\text{int}} \quad (5)$$

в терминах вторичного квантования. В (5) интегрирование проводится по объему жидкости  $V_L = LS$ , где  $S$  — площадь границы раздела твердое тело–сверхтекучий гелий. Гамильтониан (5) описывает рождение и уничтожение фононов на границе раздела He II–твердое тело, которые обусловлены колебанием границы раздела.

После проделанных процедур гамильтониан (5), с точностью до кубических членов, будет иметь следующий вид:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}_{\text{int}}^2 + \hat{H}_{\text{int}}^3. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}}^3 = & \frac{\hbar^{3/2} S}{c_L V_L \sqrt{V_S \rho_S}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \sqrt{\omega_1 \omega_2 \Omega} \frac{k_{2z}}{k_2} \frac{q_z}{q} \frac{k_{2z}}{k_{2z}^2 - k_{2z}^2} \delta_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{2\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}, 0} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}_1} - \hat{a}_{-\mathbf{k}_1}^+ + \hat{a}_{-\mathbf{k}_1} - \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^+ \right] \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}_2} + \hat{a}_{-\mathbf{k}_2}^+ + \hat{a}_{-\mathbf{k}_2} + \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+ \right] \times \\ & \times \left[ \hat{b}_{\mathbf{q}} - \hat{b}_{-\mathbf{q}}^+ + \hat{b}_{-\mathbf{q}} - \hat{b}_{\mathbf{q}}^+ \right] + \frac{\hbar^{3/2} \sqrt{\rho_L} S}{c_L V_L \sqrt{V_S \rho_S}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \sqrt{\omega \Omega_1 \Omega_2} \frac{1}{k} \frac{q_{1z}}{q_1} \frac{q_{2z}}{q_2} \delta_{\mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q}_{2\parallel} + \mathbf{k}_{\parallel}, 0} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ + \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \right] \times \\ & \times \left[ \hat{b}_{\mathbf{q}_1} - \hat{b}_{-\mathbf{q}_1}^+ + \hat{b}_{-\mathbf{q}_1} - \hat{b}_{\mathbf{q}_1}^+ \right] \left[ \hat{b}_{\mathbf{q}_2} - \hat{b}_{-\mathbf{q}_2}^+ + \hat{b}_{-\mathbf{q}_2} - \hat{b}_{\mathbf{q}_2}^+ \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где  $\omega_{1,2}$  и  $\mathbf{k}_{1,2}$  — частоты и волновые вектора фононов сверхтекучего гелия, а  $\Omega_{1,2}$  и  $\mathbf{q}_{1,2}$  — частоты и волновые вектора фононов твердого тела. Выражение (8) описывает процессы, в которых в начальном и конечном состоянии находится различное число фононов. Такие процессы будем называть неупругими фононными процессами.

### 3. Теплообмен между твердым телом и жидким гелием

Чтобы вычислить поток тепла из твердого тела в жидкость либо из жидкости в твердое тело, следует записать вероятность процесса превращения фононов на границе раздела твердое тело–жидкий гелий. Как будет показано в дальнейшем, наряду с одним упругим процессом возможны четыре трехфононных неупругих процесса. Нумеровать эти процессы будем индексом  $k$ , который равен нулю для упругого процесса и 1–4 для четырех возможных неупругих процессов. Вероятность  $k$ -го процесса  $w_k$ , которая определяется матричным элементом  $M_{fi}^{(k)} = \langle f | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle$  перехода из начального состояния  $i$  в конечное состояние  $f$  в конкретном процессе, обусловленным гамильтонианом (6), имеет вид

$$w_k = \frac{2\pi}{\hbar S} \left| M_{fi}^{(k)} \right|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (9)$$

Здесь первое слагаемое

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}}^2 = & i c_L \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_S}} \frac{\hbar S}{\sqrt{V_L V_S}} \times \\ & \times \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \frac{q_z}{q} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ \right] \left[ \hat{b}_{-\mathbf{q}} - \hat{b}_{\mathbf{q}}^+ + \hat{b}_{\mathbf{q}} - \hat{b}_{-\mathbf{q}}^+ \right] \delta_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{q}_{\parallel}} \quad (7) \end{aligned}$$

содержит один оператор уничтожения (рождения) фонона жидкости и один оператор рождения (уничтожения) фонона твердого тела. Таким образом  $\hat{H}_{\text{int}}^2$  описывает превращение фонона жидкости (твердого тела) в фонон твердого тела (жидкости) на границе раздела твердое тело–сверхтекучий гелий. При таком переходе фонон сохраняет свою энергию. Такой процесс будем называть упругим. Второе слагаемое в (6) имеет следующий вид:

Здесь  $E_f$  и  $E_i$  — полная энергия фононов в конечном и начальном состояниях. Величина (9) представляет собой вероятность того, что фононы перейдут из  $i$ -состояния в  $f$ -состояние за единицу времени на единице площади поверхности раздела.

Выражение для потока тепла в единицу времени через единицу площади границы раздела в выбранной нами нормировке операторов на энергию одного фонона для  $k$ -го процесса будет иметь следующий вид:

$$W^k = \int_{\mathbf{w}_f} \sum_f \varepsilon_f \cos \theta_f \prod_f 1 + n(\varepsilon_f) d\Gamma_f \prod_i n(\varepsilon_i) d\Gamma_i, \quad (10)$$

где сумма берется по всем конечным фононам, а произведения  $\prod_f$  и  $\prod_i$  по всем конечным и начальным фононам,  $\varepsilon_f$  и  $\varepsilon_i$  — энергии конечного и начального фонона соответственно,  $n(\varepsilon)$  — функция распределения Бозе,  $d\Gamma = d^3 p d^3 r / (2\pi\hbar)^3$  — число квантовых состояний в элементе фазового объема,  $\theta_f$  — угол вылета конечного фонона с энергией  $\varepsilon_f$ . Здесь и далее все углы отсчитываются от нормали к границе раздела сверхтекучий гелий–твердое тело.

Для разности потоков тепла между твердым телом и жидким гелием, которая обусловлена  $k$ -ым процессом, имеем:

$$\Delta W^{(k)} = W_{S \rightarrow L}^{(k)}(T_S, T_L) - W_{L \rightarrow S}^{(k)}(T_L, T_S). \quad (11)$$



Зависимость слагаемых в правой части (11) от температур твердого тела  $T_S$  и сверхтекучего гелия  $T_L$  обусловлена тем, что в выражении разности потоков тепла содержатся функции распределения как начальных фононов, так и конечных. В случае близости температур гелия и твердого тела будем использовать следующие обозначения:  $T_S = T + \Delta T$  и  $T_L = T$ .

#### 4. Вклад в поток тепла, обусловленный различными процессами

##### 4.1. Упругий процесс

Гамильтониан  $\hat{H}_{int}^2$  (7) содержит слагаемые с произведением двух операторов  $\hat{b}^+ \hat{a}$  и эрмитово сопряженные слагаемые с  $\hat{a}^+ \hat{b}$ , которые описывают прямой и обратный процессы. В прямом процессе фотон жидкости на границе раздела превращается в фотон твердого тела, а в обратном процессе фотон твердого тела превращается в фотон жидкости. На рис. 1 изображена диаграмма прямого процесса. Диаграмма обратного процесса получается заменой на диаграмме прямого процесса направлений всех стрелок на противоположные.

Матричный элемент прямого процесса равен

$$M_{fi}^0 = \frac{2ic_L \hbar S}{\sqrt{V_L V_S}} \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_S}} \frac{q_z}{q} \delta_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{q}_{\parallel}}. \quad (12)$$

Матричный элемент обратного процесса получается путем комплексного сопряжения матричного элемента прямого процесса.

Для потока тепла из твердого тела с температурой  $T_S$  в сверхтекучий гелий, который находится при нулевой температуре, исходя из соотношений (9), (10) и (12), получим

$$W^0 = \frac{4\pi^4}{15} \frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S^3} \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} k_B T_S^4. \quad (13)$$

Из законов сохранения энергии и тангенциальной компоненты импульса фононов следует, что в упругом процессе весь поток тепла (13) будет заполнять в жид-

кости узкий конус с телесным углом  $(c_L/c_S)^2$ , ось которого нормальна к границе раздела.

В работах [18–22] измерялось распределение по энергии и углам фононов, излученных нагретым твердым телом в холодный ( $T_L < 100$  мК) сверхтекучий гелий. Эти эксперименты, проведенные на различных идеальных кристаллических поверхностях, показали наличие острого пика фононов, излученных в узкий конус, телесный угол которого совпадал для разных твердых тел с расчетными значениями исходя из законов сохранения энергии и тангенциальной компоненты импульса фононов.

Для разности потоков тепла, обусловленной упругим процессом, выражения (11) и (12) дают:

$$\Delta W^0 = \frac{16\pi^4}{15} \frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S^3} \frac{1}{3(2\pi)^2 \hbar^3} (k_B T)^3 k_B \Delta T. \quad (14)$$

Выражение (14) совпадает с результатом, полученным в [3] с помощью классической акустической теории, если ограничиться только продольными фононами твердого тела. Учет поперечных фононов приводит к появлению в (14) дополнительного множителя  $F$ , величина которого близка к двум. Такое совпадение дает нам основание надеяться на правильность нашего общего подхода, который позволяет получить потоки тепла через границу раздела твердое тело–сверхтекучий гелий, обусловленные не только упругим процессом, но и всеми возможными неупругими процессами.

##### 4.2. Первый неупругий процесс

В гамильтониане  $\hat{H}_{int}^3$  (8) содержатся слагаемые с произведением трех операторов  $\hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{b}$  и эрмитово сопряженные слагаемые  $\hat{b}^+ \hat{a} \hat{a}$ , которые описывают прямой и обратный процессы. В прямом процессе фотон твердого тела на границе раздела превращается в два фотона жидкости, а в обратном процессе два фотона жидкости превращаются в один фотон твердого тела. Диаграмма прямого процесса изображена на рис. 2. Диаграмма обратного процесса получается заменой на диаграмме прямого процесса направлений всех стрелок на противоположные.

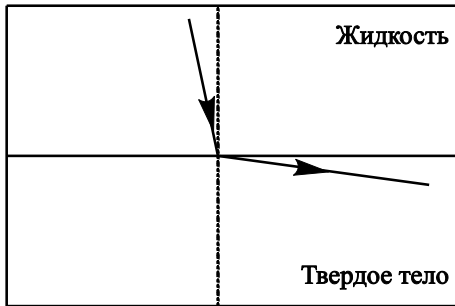


Рис. 1. Диаграмма прямого упругого процесса превращения фононов на границе раздела твердое тело–сверхтекучий гелий.

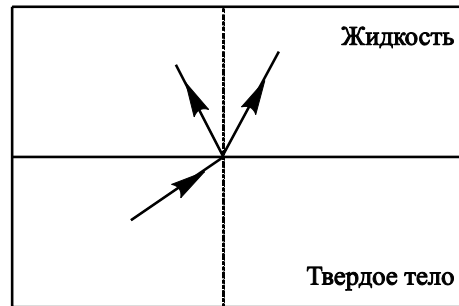


Рис. 2. Диаграмма прямого первого неупругого процесса.

Матричный элемент, соответствующий переходу из состояния с одним фононом твердого тела в состояние с двумя фононами жидкости, вычисляется из (8) стандартным образом и дается равенством

$$M_{fi}^1 = \frac{2\sqrt{2}\hbar^2 S}{c_L V_L \sqrt{V_S \rho_S}} \sqrt{\omega_1 \omega_2 \Omega} \times \left[ \frac{k_{2z}^2}{k_2(k_{2z}^2 - k_{1z}^2)} - \frac{k_{1z}^2}{k_1(k_{1z}^2 - k_{2z}^2)} \right] \frac{q_z}{q} \delta_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{2\parallel}, \mathbf{q}_{\parallel}}. \quad (15)$$

Вычисления, исходя из соотношений (9), (10) и (15), для потока тепла из твердого тела с температурой  $T_S$  в жидкий гелий с нулевой температурой дают

$$W^{(1)}(S \rightarrow L) = \frac{8}{(2\pi)^4 \rho_S c_L^4 c_S^3 \hbar^6} (k_B T_S)^8 \times \int dx dy \sin \theta d\theta \sin \theta_1 d\theta_1 \cos^2 \theta \frac{1}{e^x - 1} \left( y \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} + x - y \right) \times y^3 x^3 (x - y) \left[ \frac{(x - y) \cos^2 \theta_2 + y \cos^2 \theta_1}{(x - y)^2 \cos^2 \theta_2 - y^2 \cos^2 \theta_1} \right]^2, \quad (16)$$

где  $x = \hbar\Omega / k_B T_S$ ,  $y = \hbar\omega_1 / k_B T_S$  и  $\hbar\omega_2 / k_B T_S = x - y$  из закона сохранения энергии,  $\theta_{1,2}$  — углы вылета фононов жидкости,  $\theta$  — угол падения фонона твердого тела. Численное значение безразмерного интеграла (16) не зависит от температуры, однако зависит от отношения скоростей звука в твердом теле и жидкости.

Следует отметить, что в интегралах (16) и аналогичных им далее интегрирование по азимутальному углу для простоты заменялось умножением на  $2\pi$ . Пределы интегрирований в таких интегралах и функция переменных интегрирования  $\theta_2 = \theta_2(\theta, \theta_1, x, y)$  определяются из законов сохранения энергии и тангенциальной компоненты импульса фононов. Здесь и далее для отношения скоростей звука будет использовано значение  $c_L / c_S = 0,1$ . Численное значение интеграла, содержащегося в (16), оказывается равным  $4,78 \cdot 10^2$ . Значение безразмерного интеграла в (16) и далее в аналогичных интегралах слабо зависит от отношения скоростей.

В отличие от упругого процесса в рассматриваемом неупругом процессе рожденные в жидкости фононы будут двигаться во всех направлениях относительно нормали к поверхности раздела. Тогда в угловом распределении фононов, излученных нагретым твердым телом в холодный сверхтекучий гелий, наряду с острым акустическим пиком, обусловленным упругим процессом, должны наблюдаться также фононы, излученные во всех направлениях.

Такое угловое распределение фононов было зарегистрировано в экспериментах [18–22], в которых наблюдалось наличие двух четко разделенных каналов

излучения фононов нагретым твердым телом в холодный ( $T_L < 100$  мК) сверхтекучий гелий. Отношение потоков тепла, обусловленное упругим и первым неупругим процессами:

$$\frac{W^0}{W^1} = \frac{1}{1,08 \cdot 10^4} \frac{\pi^6 \rho_L c_L^5 \hbar^3}{(k_B T_S)^4}. \quad (17)$$

Согласно (17), при  $T_S = 5$  К поток тепла через границу раздела твердое тело–сверхтекучий гелий, обусловленный первым неупругим процессом, в 2,3 раза больше, чем поток тепла за счет упругого процесса. Эта величина в четыре раза меньше относительного значения фонового излучения, наблюдаемого в экспериментах [18–22]. При  $T_S = 1$  К вклад в поток тепла, обусловленный первым неупругим процессом, в 272 раз меньше вклада упругого процесса. Отсюда следует, что первый неупругий процесс не может полностью объяснить относительно большое значение фонового излучения, которое наблюдалось в экспериментах [18–22].

Следует отметить, что в фоновое излучение будут давать также вклад и поверхностные волны Рэлея. Согласно расчетам, выполненным в [4,16], волны Рэлея дают в поток тепла вклад, сравнимый с  $W^{(0)}$ . При этом вклад волн Рэлея и вклад первого неупругого процесса не могут полностью объяснить эксперименты [18–22], в которых наблюдаемая полная энергия в фоновом канале была на порядок больше, чем энергия в акустическом канале. Для получения потока тепла, обусловленного волнами Рэлея, в нашей методике необходимо учесть не только продольные, но и поперечные фононы твердого тела. В этом случае существенно более громоздкие формулы и расчеты, очевидно, дадут уже известные результаты, приведенные [4,16]. Поэтому в настоящей работе учтены только продольные фононы твердого тела.

Исходя из соотношений (10) и (11) разность потоков тепла между твердым телом и жидким гелием, обусловленную первым процессом, можно записать в виде

$$\Delta W^1 = \int w_1 \hbar\Omega \cos \theta - \hbar\omega_1 \cos \theta_1 - \hbar\omega_2 \cos \theta_2 \times \left[ n_{\varepsilon, T + \Delta T} - 1 + n(\varepsilon_1, T) - 1 + n(\varepsilon_2, T) - n_{\varepsilon_1, T} + n(\varepsilon_2, T) + 1 + n(\varepsilon, T + \Delta T) \right] d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma_2, \quad (18)$$

где  $\varepsilon = \hbar\Omega$ , а  $\varepsilon_{1,2} = \hbar\omega_{1,2}$ . В случае малых разностей температур твердого тела и жидкого гелия выражение в квадратных скобках в (18) примет следующий вид:

$$n_{\varepsilon, T + \Delta T} - 1 + n(\varepsilon_1, T) - 1 + n(\varepsilon_2, T) - n(\varepsilon_1, T)n(\varepsilon_2, T) + 1 + n(\varepsilon, T + \Delta T) = \frac{\Delta T}{T} \frac{\varepsilon}{k_b T} \left[ e^{\varepsilon_1/k_b T} - 1 \quad e^{\varepsilon_2/k_b T} - 1 \quad 1 - e^{-\varepsilon/k_b T} \right]^{-1}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и учитывая соотношения (9) и (15), для разности потоков тепла окончательно получим:

$$\Delta W^{(1)} = \frac{4\hbar^2}{\pi^4 \rho_S c_L^4 c_S^3} \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^8 \frac{\Delta T}{T} \times \int dx dy \sin \theta_1 d\theta_1 \sin \theta d\theta \left( y \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} + x - y - x \frac{\cos \theta}{\cos \theta_2} \right) \times \times y^3 x^2 x - y \left( \frac{x - y \cos^2 \theta_2 + x \cos^2 \theta_1}{x - y^2 \cos^2 \theta_2 - x^2 \cos^2 \theta_1} \right) \times \times \cos^2 \theta \left[ (1 - e^{-x})(e^y - 1)(e^{x-y} - 1) \right]^{-1}. \quad (20)$$

Безразмерный интеграл, содержащийся в правой части равенства (20), численно равен  $4,81 \cdot 10^2$ .

Выражения (14) и (20) дают следующее отношение для разностей потоков тепла, обусловленное упругим и первым неупругим процессами,

$$\frac{\Delta W^{(0)}}{\Delta W^{(1)}} = \frac{1}{2,16 \cdot 10^4} \frac{\pi^6 \rho_L c_L^5 \hbar^3}{(k_B T_S)^4}. \quad (21)$$

Отношение (21) равно 8,45 при  $T = 2$  К, а затем быстро возрастает, достигая значения 135 при  $T = 1$  К. Таким образом, несмотря на то, что первый неупругий процесс в отличие от упругого идет при всех углах движения фононов в жидком гелии, его вклад в коэффициент теплопередачи оказывается малым при всех температурах ниже  $\lambda$ -точки. Такой результат объясняется малой вероятностью первого неупругого процесса по сравнению с упругим.

#### 4.3. Второй неупругий процесс

В гамильтониане  $\hat{H}_{int}^{(3)}$  (8) содержатся произведения операторов  $\hat{a}^+ \hat{b}^+ \hat{a}$  и эрмитово сопряженное  $\hat{a}^+ \hat{b} \hat{a}$ , которые соответственно описывают прямой и обратный процессы. В прямом процессе фотон жидкости на границе раздела превращается в фотон твердого тела и в новый фотон жидкости. Диаграмма этого процесса изображена на рис. 3. В обратном процессе фотон твердого тела и фотон жидкости превращаются в новый фотон жидкости. Диаграмма обратного процесса получается из диаграммы прямого процесса путем изменения направления всех стрелок на обратные.

Матричный элемент второго процесса будет равен:

$$M_{fi}^{(2)} = \frac{2\sqrt{2}\hbar^2 S}{c_L V_L \sqrt{V_S \rho_S}} \sqrt{\omega_1 \omega_2 \Omega} \times \times \left[ \frac{k_{2z}^2}{k_2(k_{2z}^2 - k_{1z}^2)} - \frac{k_{1z}^2}{k_1(k_{1z}^2 - k_{2z}^2)} \right] \frac{q_z}{q} \delta_{\mathbf{k}_{||}, \mathbf{k}_{2||} + \mathbf{q}_{||}}. \quad (22)$$

В экспериментах [18–22] исследовалось распределение по энергиям и углам потока тепла, излученного

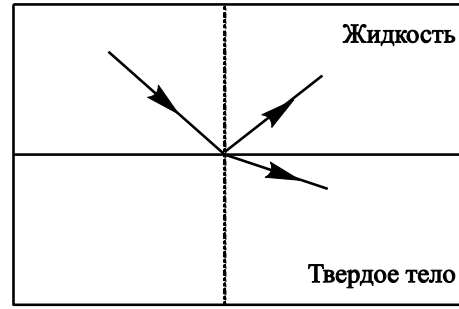


Рис. 3. Диаграмма прямого второго неупругого процесса.

нагретым твердым телом в холодный ( $T_L < 100$  мК) сверхтекучий гелий. Второй обратный процесс не может дать вклад в этот поток тепла, поскольку в гелии при столь низкой температуре практически отсутствуют фононы, которые необходимы для реализации второго процесса. При этом прямой процесс дает вклад в поток тепла из нагретого гелия в твердое тело, которое находится при почти нулевой температуре. Согласно (9), (10) и (22), выражение для такого потока будет иметь следующий вид:

$$W^{(2)}(L \rightarrow S) = \frac{8}{(2\pi)^4 \rho_S c_L^4 c_S^3 \hbar^6} (k_B T_L)^8 \times \times \int dx dy \sin \theta d\theta \sin \theta_1 d\theta_1 \cos^2 \theta \frac{1}{e^x - 1} \left( x \frac{\cos \theta}{\cos \theta_2} + (y - x) \right) \times \times y^3 x^3 (y - x) \left[ \frac{(y - x) \cos^2 \theta_2 + y \cos^2 \theta_1}{(y - x)^2 \cos^2 \theta_2 - y^2 \cos^2 \theta_1} \right]^2, \quad (23)$$

где  $x = \hbar\Omega / k_B T_L$ ,  $y = \hbar\omega_1 / k_B T_L$  и  $\hbar\omega_2 / k_B T_L = y - x$  из закона сохранения энергии. В (23) безразмерный интеграл численно равен  $2,26 \cdot 10^2$ .

Исходя из соотношений (9)–(11) и (22) для разности потоков тепла, обусловленной вторым неупругим процессом, получим

$$\Delta W^{(2)} = \frac{4\hbar^2}{\pi^4 \rho_S c_L^4 c_S^3} \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^8 \frac{\Delta T}{T} \times \times \int dx dy \sin \theta_1 d\theta_1 \sin \theta d\theta \left( x \frac{\cos \theta}{\cos \theta_2} + y - x - y \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \times \times y^3 x^3 (y - x) \left( \frac{(y - x) \cos^2 \theta_2 + y \cos^2 \theta_1}{(y - x)^2 \cos^2 \theta_2 - y^2 \cos^2 \theta_1} \right)^2 \times \times \cos^2 \theta \left[ (e^y - e^{y-x})(1 - e^{-y}) - 1 - e^{-(y-x)} \right]^{-1}. \quad (24)$$

Численное значение интеграла в выражении (24) равно  $2,28 \cdot 10^2$ . Результат (24), с учетом сделанных в [4] приближений, совпадает с общим выражением,



приведенным в [4]. Однако в [4] при приведении в общем выражении интеграла к безразмерному виду была допущена неточность. А именно, в подынтегральном выражении (51.26) из [4] содержится множитель  $1/(x+y)$ , а должен быть множитель  $1/(x+y)^2$ . В итоге численное значение безразмерного интеграла, содержащегося в (51.25) из [4], оказалось на порядок больше численного значения безразмерного интеграла в правой части выражения (24).

Множители, стоящие перед безразмерными интегралами в (24) и в (51.25) из [4], совпадают, если ограничиться только продольными фононами твердого тела. Учет в [4] поперечных фононов приводит к появлению в (51.25) из [4] дополнительного множителя  $F$ , который зависит от упругих констант твердого тела. Однако для разных твердых тел он изменяется в небольших пределах, оставаясь численно порядка двух.

Согласно результатам (20) и (24), вклад в коэффициент теплопередачи первого процесса в два раза больше вклада второго процесса.

#### 4.4. Третий неупругий процесс

В гамильтониане  $\hat{H}_{\text{int}}^{(3)}$  (8) содержатся произведения операторов  $\hat{b}^+ \hat{a}^+ \hat{b}$  и эрмитово сопряженное  $\hat{b}^+ \hat{a} \hat{b}$ , которые соответственно описывают прямой и обратный процессы. В прямом процессе на границе раздела фотон твердого тела превращается в фотон жидкости и в новый фотон твердого тела. Диаграмма, отвечающая прямому процессу, приведена на рис. 4. В обратном процессе фотон твердого тела и фотон жидкости превращаются в новый фотон твердого тела. Диаграмма обратного процесса получается из диаграммы прямого процесса, на которой следует заменить направления всех стрелок на обратные.

Матричный элемент третьего процесса равен:

$$M_{fi}^3 = \frac{2\sqrt{2}\hbar^2 \sqrt{\rho_L} S}{c_L V_S \sqrt{V_S} \rho_S} \frac{1}{k} 2 \begin{pmatrix} q_{1z} q_{2z} \\ q_1 q_2 \end{pmatrix} \sqrt{\omega \Omega_1 \Omega_2} \delta_{\mathbf{q}_{1\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{2\parallel}}. \quad (25)$$

Из (9), (10) и (25) для потока тепла из нагретого твердого тела в сверхтекучий гелий, который находится при нулевой температуре, получим

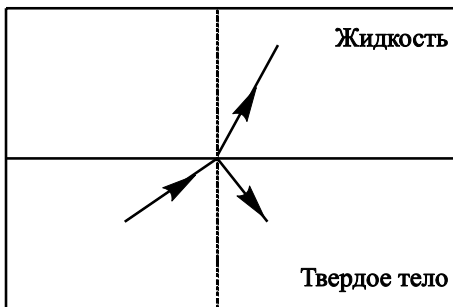


Рис. 4. Диаграмма прямого третьего неупругого процесса.

$$W^{(3)}(S \rightarrow L) = \frac{32\rho_L}{(2\pi)^4 \rho_S^2 c_S^4 \hbar^6} (k_B T_S)^8 \times \int dx dy \sin \theta d\theta \sin \theta_1 d\theta_1 \frac{1}{e^x - 1} y^2 x^3 (x-y) \cos \theta \cos \theta_2 \cos^2 \theta_1, \quad (26)$$

где  $x = \hbar\Omega_1 / k_B T_S$ ,  $y = \hbar\omega / k_B T_S$  и  $\hbar\Omega_2 / k_B T_S = x - y$  из закона сохранения энергии. Безразмерный интеграл, содержащийся в (26), численно равен  $6,23 \cdot 10^3$ . Отношение вкладов от первого и третьего неупругих процессов имеет следующий вид:

$$\frac{W^{(3)}}{W^{(1)}} = 5,21 \frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что для сверхтекучего гелия и твердого тела вклад в поток тепла через границу раздела от третьего процесса примерно в 20 раз меньше, чем вклад от первого процесса.

Согласно (9)–(11) разность потоков тепла, обусловленную третьим процессом, можно записать в виде

$$\Delta W^{(3)} = \int w_3 (\hbar\omega \cos \theta + \hbar\Omega_2 \cos \theta_2 - \hbar\Omega_1 \cos \theta_1) \times [n_{\varepsilon_1, T+\Delta T} + n(\varepsilon_2, T+\Delta T) + n(\varepsilon, T) - n_{\varepsilon, T} - n(\varepsilon_2, T+\Delta T) - n(\varepsilon_1, T+\Delta T)] d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma_2, \quad (28)$$

где  $\varepsilon_{1,2} = \hbar\Omega_{1,2}$ , а  $\varepsilon = \hbar\omega$ .

В случае малых разностей температур твердого тела и жидкого гелия (28) примет следующий вид:

$$\Delta W^{(3)} = \frac{16\hbar^2 \rho_L}{\pi^4 \rho_S^2 c_S^4} \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^8 \frac{\Delta T}{T} \times \int dx dy \sin \theta_1 d\theta_1 \sin \theta d\theta \cos^2 \theta_1 \cos \theta \cos \theta_2 \times y^2 x^3 (x-y) [(1-e^{-y})(1-e^{-x})(e^{x-y}-1)]^{-1}. \quad (29)$$

Численное значение интеграла в выражении (29) равно  $6,31 \cdot 10^2$ .

Отношение  $\Delta W^{(1)}$  к  $\Delta W^{(3)}$  будет следующим:

$$\frac{\Delta W^{(3)}}{\Delta W^{(1)}} = 5,24 \frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S}. \quad (30)$$

Согласно равенству (30), вклад третьего процесса в коэффициент теплопередачи примерно в 20 раз меньше, чем вклад от первого процесса.

#### 4.5. Четвертый неупругий процесс

В гамильтониане  $\hat{H}_{\text{int}}^{(3)}$  (8) содержатся произведения операторов  $\hat{a}^+ \hat{b} \hat{b}$  и эрмитово сопряженное  $\hat{b}^+ \hat{b}^+ \hat{a}$ , которые описывают прямой и обратный процессы. В прямом процессе два твердотельных фотона на границе раздела превращаются в фотон жидкости, а в обратном — фотон жидкости превращается в два фотона

твердого тела. Диаграмма прямого процесса приведена на рис. 5. Диаграмма обратного процесса получается из диаграммы прямого процесса заменой направлений всех стрелок на противоположные.

Матричный элемент четвертого процесса отличается от матричного элемента третьего процесса только символом Кронекера  $\delta_{\mathbf{q}_{1\parallel}+\mathbf{q}_{2\parallel},\mathbf{k}_{\parallel}}$ , который отвечает закону сохранения тангенциальной компоненты импульса фононов, т.е.

$$M_{fi}^{(4)} = \frac{2\sqrt{2}\hbar^2\sqrt{\rho_L}S}{c_L V_S \sqrt{V_S} \rho_S} \frac{1}{k} 2 \left( \frac{q_{1z} q_{2z}}{q_1 q_2} \right) \sqrt{\omega \Omega_1 \Omega_2} \delta_{\mathbf{q}_{1\parallel}+\mathbf{q}_{2\parallel},\mathbf{k}_{\parallel}}. \quad (31)$$

Четвертый процесс дает вклад как в поток тепла из твердого тела с температурой  $T_S$  в гелий, который находится при нулевой температуре, так и в поток тепла из гелия с температурой  $T_L$  в твердое тело, которое находится при нулевой температуре. Выражения для этих потоков тепла будут совпадать с точностью до замены температуры твердого тела на температуру жидкости. Запишем выражение для потока тепла из твердого тела в жидкий гелий:

$$W^{(4)} = \frac{32\rho_L}{(2\pi)^4 \rho_S^2 c_S^4 c_L^3 \hbar^6} (k_B T_S)^8 \times \int dx dy \sin \theta d\theta \sin \theta_1 d\theta_1 \frac{1}{e^x - 1} \frac{1}{e^{y-x} - 1} y^2 x^3 \times (y-x) \cos \theta \cos \theta_2 \cos^2 \theta_1, \quad (32)$$

где использованы такие же обозначения, как и в (26). В (32) безразмерный интеграл равен  $8,45 \cdot 10^3$ . Отношение вкладов от первого и четвертого неупругих процессов имеет следующий вид:

$$\frac{W^{(4)}}{W^{(1)}} = 7,07 \frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S}. \quad (33)$$

Для разности потоков тепла получим

$$\Delta W^{(4)} = \frac{16\hbar^2 \rho_L}{\pi^4 \rho_S^2 c_S^4 c_L^3} \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^8 \frac{\Delta T}{T} \times$$

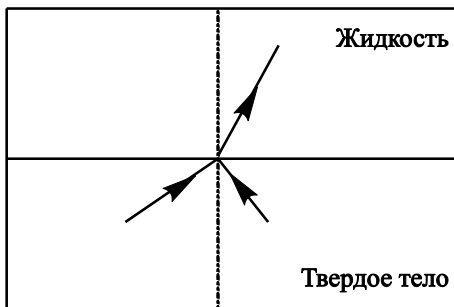


Рис. 5. Диаграмма прямого четвертого неупругого процесса.

$$\times \int dx dy \sin \theta_1 d\theta_1 \sin \theta d\theta \cos^2 \theta_1 \cos \theta \cos \theta_2 \times y^2 x^3 (y-x) \left[ (1-e^{-y})(e^x-1)(e^{x-y}-1) \right]^{-1}, \quad (34)$$

где  $x = \hbar\Omega_1/k_B T$ ,  $y = \hbar\omega/k_B T$  и  $\hbar\Omega_2/k_B T = y-x$  из закона сохранения энергии. Численное значение безразмерного интеграла в (34) равно  $8,53 \cdot 10^3$ . Для отношения  $\Delta W^{(4)}$  к  $\Delta W^{(3)}$ , в соответствии с (30) и (34), имеем

$$\frac{\Delta W^{(4)}}{\Delta W^{(3)}} = 1,35. \quad (35)$$

Таким образом, согласно (33) и (35), третий и четвертый процессы дают вклады одного порядка в коэффициент теплопередачи, и этот вклад более чем на порядок меньше, чем вклады от первого процесса.

### 5. Заключение

В настоящей работе получен гамильтониан (6) взаимодействия фононов сверхтекучего гелия с колеблющейся поверхностью твердого тела. Выполнено квантование фононного поля в полупространстве, что позволило записать указанный гамильтониан в терминах операторов рождения и уничтожения фононов сверхтекучего гелия и твердого тела.

Полученный гамильтониан дал возможность в едином подходе вычислить вероятности как упругого, так и всех возможных неупругих процессов уничтожения и рождения фононов сверхтекучего гелия и твердого тела на границе их раздела.

Определены вклады всех процессов в поток тепла и в разности потоков тепла между сверхтекучим гелием и твердым телом. Выражение для разности потоков тепла (14), обусловленной упругим процессом, совпадает с результатом, приведенным в [3], который был получен методами классической акустики.

Разность потоков тепла за счет всех неупругих процессов оказалась малой и не объясняет столь большое значение коэффициента теплопередачи границы раздела твердое тело–сверхтекучий гелий, наблюдаемое в экспериментах по скачку Капицы.

Показано, что из всех неупругих процессов максимальный вклад в поток тепла через границу раздела твердое тело–сверхтекучий гелий дает первый неупругий процесс, в котором один фонон твердого тела превращается в два фонона жидкости. Диаграмма этого процесса приведена на рис. 2.

Поток тепла (17) из нагретого до 5 К твердого тела в холодный сверхтекучий гелий, обусловленный первым неупругим процессом, оказывается в 2,3 раза больше, чем поток тепла за счет упругого процесса. Это значение уменьшается как  $T^4$  при понижении температуры. Полученные величины для потоков тепла за счет перво-

го неупругого процесса могут только частично объяснить относительно большое значение фонового излучения, которое наблюдалось в экспериментах [18–22].

Авторы выражают искреннюю благодарность А.Ф.Г. Wyatt за полезные дискуссии, которые инициировали выполнение этой работы.

1. П.Л. Капица, *ЖЭТФ* **11**, 1 (1941).
2. И.М. Халатников, *ЖЭТФ* **22**, 687 (1952).
3. И.М. Халатников, *Введение в теорию сверхтекучести*, Наука, Москва (1965) [I.M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, Addison-Wesley, Redwood (1989)].
4. И.М. Халатников, *Теория свехтекучести*, Наука, Москва (1971).
5. L.J. Challis, *J. Phys. C* **7**, 481 (1974).
6. A.F.G. Wyatt, in: *Nonequilibrium Superconductivity, Phonons, and Kapitza Boundaries*, K.E. Gray (ed.), Plenum, New York/London (1981), p. 31.
7. E.T. Swartz and R.O. Pohl, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 605 (1989).
8. J. Amrit and M.X. Francois, *J. Low Temp. Phys.* **128**, 113 (2002).
9. J. Amrit and J.P. Thermeau, *J. Phys. Conf. Ser.* **150**, 032002 (2009).
10. J. Amrit, *Phys. Rev. B* **81**, 054303 (2010).
11. И.Н. Адаменко, И.М. Фукс, *ЖЭТФ* **59**, 2071 (1970).
12. И.М. Халатников, И.Н. Адаменко, *ЖЭТФ* **63**, 745 (1972).
13. И.М. Гельфгат, Е.С. Сыркин, *ФНТ* **4**, 141 (1978) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **4**, 69 (1978)].
14. К.Н. Зиновьева, *ФНТ* **23**, 485 (1997) [*Low Temp. Phys.* **23**, 355 (1997)].
15. А.Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **43**, 358 (1962).
16. А.Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **43**, 1535 (1962).
17. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, and I.V. Tanatarov, *Phys. Rev. B* **77**, 174510 (2008).
18. G.J. Page, R.A. Sherlock, A.F.G. Wyatt, and K.R.A. Ziebeck, in: *Phonon Scattering in Solids*, L.J. Challis *et al.* (eds.), Plenum press, New York (1976).
19. R.A. Sherlock, A.F.G. Wyatt, N.G. Mills, and N.A. Lockerbie, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1299 (1972).
20. R.A. Sherlock, N.G. Mills, and A.F.G. Wyatt, *J. Phys. C* **8**, 300 (1975).
21. A.F.G. Wyatt and G.N. Crisp, *J. Phys. Colloq.* **39**, C6-244, Suppl. 8 (1978).
22. A.F.G. Wyatt, R.A. Sherlock, and D.R. Allum, *J. Phys. C* **15**, 1897 (1982).
23. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko, and A.F.G. Wyatt, *J. Low. Temp. Phys.* **157**, 509 (2009).
24. D.H.S. Smith and A.F.G. Wyatt, *Phys. Rev. B* **76**, 224519 (2007).
25. F.W. Sheard, R.M. Bowley, and G.A. Tombs, *Phys. Rev. A* **6**, 3135 (1973).
26. A. Zhukov, *Phys. Scr.* **69**, 59 (2004).
27. QFS2012: *International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 15–21 August 2012*, S.N. Fisher and G.R. Pickett (Co-chairs), Physics Department, Lancaster University, UK (2012).
28. I.N. Adamenko and E.K. Nemchenko, *J. Low. Temp. Phys.* **171**, 266 (2013).

#### Phonon transformation at the superfluid helium–solid interface

I.N. Adamenko and E.K. Nemchenko

The Hamiltonian that describes the interaction of superfluid helium phonons with oscillating surface of the solid is obtained. This allows us to calculate the probabilities of both elastic and all inelastic processes of phonon transformation at the superfluid helium–solid interface. The contributions to heat flow between superfluid helium and solid due to all the processes are calculated. The results are compared with the experimental data and the results obtained by other authors.

PACS: 67.25.dt Sound and excitations.

Keywords: Kapitza gap, phonons, heat flow.