Физика низких температур, 2008, т. 34, № 12, с. 1259–1265

Об особенностях бозе-эйнштейновской конденсации квазичастиц

А.И. Бугрий, В.М. Локтев

Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины
ул. Метрологическая, 14-б, г. Киев, 03680 ГСП, Украина
E-mail: abugrij@bitp.kiev.ua; vloktev@bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 19 июня 2008 г., после переработки 4 августа 2008 г.

Предпринята попытка установить различие процессов бозе-эйнштейновской конденсации частиц и квазичастиц. Получено уравнение для числа частиц в бозе-конденсате в зависимости от полного числа частиц в системе. Это уравнение записано также для случая квазичастиц с учетом их рождения внешней накачкой и наличия в системе равновесных тепловых возбуждений. Из анализа обоих уравнений найдены химический потенциал накачанных квазичастиц и их число в конденсате в зависимости от интенсивности накачки. Найдено условие, при котором процесс бозе-кондесации низкоэнергетических квазичастичных возбуждений начинается и происходит при любых, в том числе достаточно высоких, температурах.

Зроблено спробу встановити різницю між процесами бозе-ейнштейнівської конденсації частинок і квазічастинок. Отримано рівняння для числа частинок у бозе-конденсаті в залежності від загальної кількості частинок у системі. Це рівняння записано для випадку квазічастинок з урахуванням їх народження зовнішньою накачкою та присутності у системі рівноважних теплових збуджень. З аналізу обох рівнянь знайдено хімічний потенціал накачаних квазічастинок і їх кількість в конденсаті в залежності від інтенсивності накачки. Знайдено умову, при якій процес бозе-конденсації низькоенергетичних квазічастинкових збуджень починається і відбувається при будь-яких, у тому числі достатньо високих, температурах.

PACS: 05.30.Jp Бозонные системы;
75.30.Ds Спиновые волны;
75.70.–i Магнитные свойства тонких пленок, поверхностей и границ раздела;
76.60.Es Релаксационные эффекты.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновская конденсация, частицы, квазичастицы, числа заполнения, накачка.

1. Как известно, явление бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) – одно из наиболее замечательных макроскопических квантовых явлений, которое может происходить в том или ином коллективе частиц либо квазичастиц (КЧ), имеющих целочисленный спин. В настоящее время имеется ряд примеров более или менее прямого экспериментального наблюдения БЭК, среди которых, в первую очередь, необходимо упомянуть БЭК в разреженных газах бозе-атомов [1,2] (см. также обзор [3]). Ее критическая температура крайне низка ($\sim 10^{-6}$ К) вследствие как малой плотности частиц, так и относительно большой массы даже самых легких атомов. В этом смысле гораздо более привлекательными, казалось бы, должны быть КЧ, достаточно высокие плотности которых экспериментально вполне достижимы, а эффективные массы, как правило, порядка электронных (не говоря уже о существовании безмассовых КЧ [4]). Возможно, поэтому вопрос о БЭК КЧ на примере экситонов (и биэкситонов) большого радиуса был поставлен около полувека назад [5], и исследование их конденсации приобрело большую популярность особенно для непрямых экситонов либо в гетероструктурах [6]. Заслуживают также быть отмеченными и недавние эксперименты по БЭК экситонных поляритонов в микрополостях [7,8]. При этом температура конденсации, хотя и вырастает на порядки, остается достаточно низкой – около нескольких градусов или долей градуса.

Что касается дипольно-активных экситонов малого радиуса, то их конденсация оказалась практически ненаблюдаемой из-за малого времени жизни относительно радиационного распада, а следовательно, невозможности достижения необходимых для БЭК плотностей. Ограничение на высокую плотность существенно ослабевает для магнонов, которые тоже можно рассматривать как один из типов френкелевских экситонов (или, что то же самое, экситонов малого радиуса), обладающих большим временем жизни [9]. По-видимому, именно это обстоятельство помогает достигать столь высоких плотностей магнонов, так что их конденсация, как утверждается в [10], наблюдается в совершенных пленках железо-иттриевого граната при аномально высоких, сравнимых с комнатными (!), температурах. Упомянутая и последующие работы группы Демокритова [11,12], посвященных БЭК магнонов, делают необходимым проанализировать, действительно ли имеются условия, при которых БЭК КЧ становится возможной при по-настоящему высоких температурах, поскольку для частиц и экситонов ничего подобного достичь не удается.

2. Прежде всего, отметим такую примечательную особенность БЭК, что будучи по существу фазовым превращением, она может происходить в идеальном газе, что позволяет вычислять многие физические характеристики и наблюдаемые величины этого процесса с большой точностью. И хотя полностью невзаимодействующие между собой объекты вряд ли существуют, понятие идеальности, возможно, даже более свойственно КЧ, которые достаточно слабо взаимодействуют и при относительно больших плотностях.

Тем не менее не идеальность (либо слабая неидеальность) лежит в основе основного отличия между частицами и КЧ бозевского типа. Принципиальная разница между ними состоит в том, что если при заданной плотности частицы характеризуются конечным значением химического потенциала μ, то для равновесных КЧ $\mu = 0$, поскольку сама их плотность определяется только температурой. Это значит, что осуществление и наблюдение БЭК КЧ требует перевода системы (например, путем специального нетеплового воздействия) в возбужденное (другими словами, неравновесное) состояние, которое поддерживается достаточно продолжительное время (во всяком случае, заметно превышающее как время установления равновесия, так и время жизни КЧ). Тогда установившееся и отвечающее БЭК (квази)равновесное распределение КЧ по состояниям спектра становится доступным для экспериментального исследования. Но, с другой стороны, из этого также следует, что при описании БЭК КЧ необходимо соблюдать известную осторожность из-за проблематичности использования термодинамического подхода и недостаточной строгости применения различных предельных переходов.

Заметим, что имеется немало попыток (см., например, [13–15]), описать кинетическое поведение неравновесного коллектива КЧ (в частности, ферромагнонов) под действием накачки того или иного вида — импульсной, шумовой и т.д., которые при этом могут конденсироваться. В подобного рода строгих подходах необходимо учитывать дополнительные сведения: о взаимодействии КЧ между собой, их взаимодействие с другими объектами — фононами или дефектами, характер накачки, временную эволюцию, что делает модель и расчеты довольно громоздкими. Все это, будучи несомненно важным, тем не менее не кажется определяющим для собственно БЭК. В полном соответствии с Бозе и Эйнштейном мы ее понимаем как явление температурного перераспределения заданного количества частиц по состояниям и накопления значительной их (частиц) части на нижайшем из них (состояний). Даже ограничившись предположением о том, что накачка лишь создала КЧ, а быстрая релаксация сделала их практически равновесными, можно поставить много вопросов, следующих из экспериментов [10–12]. При этом мы также не ставим своей целью рассмотреть когерентные проявления таким образом накопленного на нижайшем (возбужденном) состоянии коллектива КЧ, что, безусловно, является интересной и актуальной проблемой, оставляя за собой ограниченную и пока не до конца исследованную задачу изучения особенностей, позволяющих КЧ конденсироваться при столь высоких температурах, к которым в данном случае относится и комнатный диапазон.

3. Известно, что длинноволновые элементарные квазичастичные возбуждения определяют низкоэнергетическую часть спектра той или иной системы; с другой стороны, они являются и наиболее слабо взаимодействующими между собой. Это, как говорилось, позволяет в первом приближении считать подсистему КЧ идеальным газом. Определим $\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + [\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_0] \equiv \equiv \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{k})$ в качестве энергии КЧ, причем $\varepsilon_0 = \varepsilon(\mathbf{k}_0)$ соответствует нижайшему (из возбужденных) состоянию. Тогда, согласно предположению о сохранении числа КЧ вследствие внешнего воздействия, или, иными словами, наличия у них конечного химического потенциала, запишем число КЧ в $\mathbf{k}$-м квантовом состоянии при заданной температуре:

$$n(\mathbf{k}, \mu) = \frac{1}{\exp[\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu]/k_B T - 1} . \qquad (1)$$

Вместо величины μ, следуя работе [16], введем другую термодинамическую переменную

$$n_0 = \frac{1}{\exp(\varepsilon_0 - \mu)/k_B T - 1}, \qquad (2)$$

откуда $\mu = \varepsilon_0 - k_B T \ln[(n_0+1)/n_0]$. С помощью выражения (2) числа заполнения (1) легко переписываются в виде

$$n(\mathbf{k},\mu) \to n(\mathbf{k},n_0) = \frac{1}{(1+1/n_0)\exp[\varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{k})-\mu]/k_B T - 1} =$$
$$= n_{\mathbf{k}}(T)\frac{1}{1+[n_{\mathbf{k}}(T)+1]/n_0}, \qquad (3)$$

где введено обозначение для числа частиц

$$n_{\mathbf{k}}(T) = \frac{1}{\exp[\varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{k})/k_B T]-1}, \qquad (4)$$

которое, как видно из его определения, не зависит от щели в спектре КЧ. Заменой (2), исключающей из рассмотрения химический потенциал КЧ, облегчается исследование наиболее интересной и важной ситуации, когда общепринятому условию БЭК $\mu \to \varepsilon_0$ отвечает нефизическая асимптотика $n_0 \to \infty$.*

При достаточно больших значениях $n_0 (>> n_{\mathbf{k}}(T))$, что, вообще говоря, и должно соответствовать режиму БЭК, становится справедливым разложение

$$n_{\mathbf{k}}(T,n_0) = n_{\mathbf{k}}(T)\left\{1-\left(\frac{n_{\mathbf{k}}(T)+1}{n_0}\right)+\left(\frac{n_{\mathbf{k}}(T)+1}{n_0}\right)^2-\cdots\right\}, \qquad (5)$$

которое прямо свидетельствует, что введенная выше величина $n_{\mathbf{k}}(T)$ есть ни что иное, как максимально возможное (отвечающее формальному условию $n_0 \to \infty$) число заполнения соответствующего состояние для данной T.

Разложение (5) удобно использовать и при записи термодинамически равновесных величин. В частности, полное (среднее) число частиц приобретает вид

$$N = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k},n_0) =$$
$$= n_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0} g_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k},n_0) \equiv n_0 + N_{\text{exc}}(T,n_0), \qquad (6)$$

где $g_{\mathbf{k}}$ — вырождение состояния с волновым вектором $\mathbf{k}$, а величина

$$N_{\text{exc}}(T,n_0) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0} g_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(T) \times$$
$$\times \left\{1-\left(\frac{n_{\mathbf{k}}(T)+1}{n_0}\right)+\left(\frac{n_{\mathbf{k}}(T)+1}{n_0}\right)^2-\cdots\right\} \approx$$
$$\approx N_{\text{exc}}(T) - \frac{\delta N_{\text{exc}}(T)}{n_0} \qquad (7)$$

соответствует полному числу КЧ на возбужденных состояниях. Из него в последнем равенстве выделено число

$$N_{\text{exc}}(T) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0} g_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(T), \qquad (8)$$

которое задает максимальное (достигаемое при том же (см. выше) условии $n_0 \to \infty$) количество всех тепловых возбуждений, и коэффициент

$$\delta N_{\text{exc}}(T) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0} g_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(T)[n_{\mathbf{k}}(T)+1] \qquad (9)$$

при первой по $1/n_0$ поправке, определяющийся тепловыми флуктуациями величины (8). Можно отметить, что независимо от конкретного вида закона дисперсии $\varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{k})$ КЧ величины $N_{\text{exc}}(T)$ и $\delta N_{\text{exc}}(T)$ являются монотонно растущими функциями температуры, что легко видно из их определений, поскольку с ростом T растут все числа заполнения.

Подставляя (7) в (6) при учете величин (8), (9) и в предположении $N >> 1$ (и, соответственно, $n_0 >> 1$), легко получить уравнение

$$N \simeq n_0 + N_{\text{exc}}(T) - \frac{\delta N_{\text{exc}}(T)}{n_0} \qquad (10)$$

для отыскания количества n_0 бозе-сконденсированных КЧ. Из этого уравнения находим, что поведение искомого числа

$$n_0 \equiv n_0(T) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{N - N_{\text{exc}}(T) + \sqrt{[N-N_{\text{exc}}(T)]^2 + 4\delta N_{\text{exc}}^2(T)}\right\} \qquad (11)$$

при больших N и малых $\delta N_{\text{exc}}(T)/N^2$ достаточно резко меняется при пересечении температурой некоторого значения T_c, являющегося решением уравнения

$$N_{\text{exc}}(T_c) = N. \qquad (12)$$

Уравнение (12) прямо показывает, что вводимая таким образом критическая температура зависит от полного числа частиц в системе и конкретного вида функции $N_{\text{exc}}(T)$. Явное же выражение для последней

* Заметим, что в работе [17] при теоретическом изучении флуктуаций бозе-конденсата ультрахолодных атомов химический потенциал также исключался из выражения для числа частиц, однако по-другому, а потому отмеченная расходимость величины сохранялась.

(как, собственно, и для величины T_c) определяется спектром, размерностью и даже формой системы, а также условиями на ее границах.

Если теперь ввести безразмерную плотность $n_{BEC}(T) \equiv n_0(T)/N$ бозе-конденсата, то в пределе $\delta N_{\text{exc}}(T)/N^2 \to 0$ она становится неаналитической функцией температуры:

$$n_{BEC}(T) = \left[1 - \frac{N_{\text{exc}}(T)}{N}\right] \theta\left[1 - \frac{N_{\text{exc}}(T)}{N}\right], \quad (13)$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция. Такое поведение плотности (13) позволяет ее трактовать как параметр порядка процесса БЭК в заданном коллективе частиц или КЧ. Мы на этом останавливаться не будем, сосредоточившись на поставленном выше вопросе об особенностях, отличающих КЧ от частиц.

4. Действительно, до сих пор рассмотрение в одинаковой мере могло относиться к обоим этим объектам, поскольку из него был исключен химический потенциал. Если же говорить о КЧ, то для них, как хорошо известно и уже упоминалось, $\mu = 0$, а потому при конечной T в любой системе присутствует то или иное — термически возбужденное — их количество (ср. (1)):

$$n_{\mathbf{k}}^{\text{th}}(T) = \frac{1}{\exp[\varepsilon(\mathbf{k})/k_B T] - 1}. \quad (14)$$

В полной аналогии с (2) можно выделить также равновесную тепловую заселенность нижайшего состояния

$$n_0^{\text{th}}(T) \equiv n_0^{\text{th}} = \frac{1}{\exp(\varepsilon_0/k_B T) - 1}, \quad (15)$$

которая есть заданная (и также возрастающая) функция температуры.

С помощью (15) можно без труда преобразовать числа (14) к виду, аналогичному (3):

$$n_{\mathbf{k}}^{\text{th}}(T) \to n_{\mathbf{k}}^{\text{th}}(T, n_0^{\text{th}}) \equiv n_{\mathbf{k}}(T) \frac{1}{1 + \dfrac{n_{\mathbf{k}}(T) + 1}{n_0^{\text{th}}}}, \quad (16)$$

где обозначение $n_{\mathbf{k}}(T)$, что замечательно, тождественно совпадает с введенным выше числом заполнения (4). Формально выражение (16) является точным, однако число термических возбуждений, вообще говоря, не имеет использованного при разложении (7) количественного преимущества перед (по крайней мере, ближайшими) числами заполнения $n_{\mathbf{k}}(T)$ (либо тем более числами $n_{\mathbf{k}}^{\text{th}}(T)$), как n_0 перед $n_{\mathbf{k}}(T)$ в режиме БЭК. Однако можно предполагать, что ввиду экспоненциального уменьшения чисел заполнения возбужденных состояний ошибка при разложении в ряд по $1/n_0^{\text{th}}$ не будет значительной.* Разумеется, в случае малых n_0^{th} разница между частицами и КЧ становится мало заметной. Если же оставаться в рамках предположения о достаточно высоких исходных температурах (либо относительно низкоэнергетических элементарных возбуждениях), то можно приближенно записать разложение (ср. (7))

$$n_{\mathbf{k}}^{\text{th}}(T, n_0^{\text{th}}) = n_{\mathbf{k}}(T)\left\{1 - \left(\frac{n_{\mathbf{k}}(T) + 1}{n_0^{\text{th}}}\right) + \left(\frac{n_{\mathbf{k}}(T) + 1}{n_0^{\text{th}}}\right)^2 - \dots\right\}, \quad (17)$$

и немедленно следующее из него уравнение

$$N_{\text{th}} \simeq n_0^{\text{th}} + N_{\text{exc}}(T) - \frac{\delta N_{\text{exc}}(T)}{n_0^{\text{th}}}, \quad (18)$$

в котором, как говорилось, величины $N_{\text{exc}}(T)$ и $\delta N_{\text{exc}}(T)$ не изменяются, даже если в системе присутствуют нетепловые (в частности, накачанные) КЧ.

Введем их количество согласно очевидному определению:

$$n_{\mathbf{k}}(T, n_0) = n_{\mathbf{k}}^{\text{th}}(T, n_0^{\text{th}}) + n_{\mathbf{k}}^{\text{pump}}(T) \quad (19)$$

для каждого **k**. Тогда согласно (7) и (17) нетрудно убедиться, что для всех $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$

$$n_{\mathbf{k}}^{\text{pump}}(T) = n_{\mathbf{k}}(T)[n_{\mathbf{k}}(T) + 1]\left[\frac{1}{n_0^{\text{th}}(T)} - \frac{1}{n_0(T)}\right] \times$$
$$\times \left[1 + \frac{n_{\mathbf{k}}(T) + 1}{n_0(T)}\right]^{-1} \left[1 + \frac{n_{\mathbf{k}}(T) + 1}{n_0^{\text{th}}(T)}\right]^{-1}. \quad (20)$$

Последнее выражение существенно упрощается, если принять во внимание предполагаемое (и реально осуществленное в экспериментах [10–12]) соотношение между параметрами системы, а именно: $k_B T \gg \varepsilon_0, \mu$. Действительно из (20) с учетом определения (2) находим, что в этом случае прирост количества возбуждений, рожденных накачкой, во всех состояниях, за исключением нижайшего, может быть представлен в достаточно простом виде:

* Здесь мы неявно предполагаем, что имеет место неравенство $n_0^{\text{th}} \gg 1$, которое может быть справедливым лишь при очевидном условии $k_B T \gg \varepsilon_0$ и которое с запасом выполняется, например, в экспериментах с БЭК ферромагнонов [10–12]. В то же время для экситонов, или КЧ с большой щелью, практически всегда $n_0^{\text{th}} \sim \exp(-\varepsilon_0/k_B T) \ll 1$, из чего следует, что их тепловое количество описывается распределением Больцмана. При этом (см. (16)) имеет место неравенство $n_{\mathbf{k}}^{\text{th}}(T) \approx n_{\mathbf{k}}(T)\exp(-\varepsilon_0/k_B T) \ll n_{\mathbf{k}}(T)$.

$$n_{\mathbf{k}}^{\text{pump}}(T) \approx \frac{\mu}{k_B T} n_{\mathbf{k}}(T)[n_{\mathbf{k}}(T)+1]. \qquad (21)$$

Иными словами, исходные заселенности благодаря накачке несколько подрастают, но очень мало вследствие появляющегося «фактора температурного подавления» $\mu/k_B T << 1$.

В то же время плотность накачанных КЧ в бозе-конденсате ведет себя совершенно иначе (см. (2) и (15)):

$$n_0^{\text{pump}}(T) = n_0(T) - n_0^{\text{th}}(T) \approx \frac{k_B T}{\varepsilon_0} \frac{\mu}{(\varepsilon_0 - \mu)}, \qquad (22)$$

или может быть сколь угодно большой ввиду возможности любого сближения $\mu \to \varepsilon_0$ (кроме точного равенства $\mu = \varepsilon_0$). Обращает на себя внимание и то обстоятельство, что в отличие от всех $n_k(T)$ с $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$ заселенность $n_0^{\text{pump}}(T)$, наоборот, дополнительно увеличивается, благодаря (ср. (21)) «фактору температурного усиления» $k_B T/\varepsilon_0 >> 1$.

5. Роль накачки прозрачна и состоит в создании определенного числа КЧ, но какова ее связь с химическим потенциалом? Чтобы ответить на этот вопрос, примем во внимание (см. (6)), что полное число N КЧ в системе также может быть разбито на два вклада — определяемого температурой равновесного их количества N_{th} и задаваемого накачкой числа N_{pump}: $N = N_{\text{th}} + N_{\text{pump}}$. Как известно [18], в условиях действия электромагнитной накачки с интенсивностью I_{pump} это число изменяется в соответствии с простейшим уравнением баланса $dN/dt = I_{\text{pump}} - (N - N_{\text{th}})/\tau_{\text{rel}}$, где τ_{rel} — некоторое эффективное время установления равновесия после ее выключения (более точное рассмотрение приведено в Приложении). Из этого уравнения немедленно следует, что вследствие очевидного равенства* $dN_{\text{th}}/dt = 0$ оно фактически преобразуется к виду $dN_{\text{pump}}/dt = I_{\text{pump}} - N_{\text{pump}}/\tau_{\text{rel}}$ и что стационарным (при временах $t >> \tau_{\text{rel}}$, когда $dN/dt = 0$) является полное число накачанных частиц, равное $N_{\text{pump}}^{\text{st}} = I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}}$. Предполагая при этом, что основное количество (22) последних накапливается именно в нижайшем состоянии, или что $n_0^{(\text{pump})}(T) \approx N_{\text{pump}}^{\text{st}}$, легко приходим к равенству

$$I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}} = \frac{k_B T}{\varepsilon_0} \frac{\mu}{(\varepsilon_0 - \mu)}, \qquad (23)$$

позволяющему записать химический потенциал накачанных (и только) КЧ:

$$\mu = \varepsilon_0 \frac{I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}}}{(k_B T/\varepsilon_0 + I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}})}. \qquad (24)$$

Полученное выражение свидетельствует, что при относительно слабых накачках, когда $I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}} << k_B T/\varepsilon_0$, химпотенциал КЧ $\mu \approx \varepsilon_0^2 I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}} / k_B T$, а при больших, когда $I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}} >> k_B T/\varepsilon_0 (>> 1)$, — его значение стремится (см. (24)) к своему предельному значению ε_0, всегда удовлетворяя физически необходимому требованию $\mu < \varepsilon_0$. При этом нетрудно убедиться, что разность

$$\varepsilon_0 - \mu \approx \frac{k_B T}{N_{\text{pump}}^{st}} \to \frac{k_B T}{n_0^{\text{pump}}(T)} \approx \frac{k_B T}{I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}}}, \qquad (25)$$

и в результате, как прямо следует из (23) и (25), термодинамические свойства коллектива конденсированных вследствие явления БЭК КЧ должны зависеть лишь от отношения $I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}}/k_B T$. Представляется, что подобное скейлинговое поведение можно проверить экспериментально.

Используя, наконец, уравнения (7) и (18) путем вычитания второго из первого, можно получить уравнение

$$n_0 - n_0^{\text{th}} + \frac{n_0 - n_0^{\text{th}}}{n_0 n_0^{\text{th}}} \delta N_{\text{exc}}(T) = I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}}, \qquad (26)$$

где неизвестным является полное число $n_0(T)$ КЧ в конденсате, (или, что одно и то же, число $n_0^{(\text{pump})}(T)$). Видно, что в отсутствие накачки $n_0(T) = n_0^{\text{th}}(T)$. Из (26), кроме того, находим, что, в частности, при слабой накачке, когда $n_0^{(\text{pump})}(T) << n_0^{\text{th}}(T)$, число КЧ на нижайшем уровне растет согласно зависимости

$$n_0(T) \approx n_0^{\text{th}}(T) + \left(1 - \frac{\varepsilon_0^2}{(k_B T)^2} \delta N_{\text{exc}}(T)\right) I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}}. \qquad (27)$$

В случае сильной накачки и достижения неравенства $n_0^{(\text{pump})}(T) >> n_0^{\text{th}}(T)$ число КЧ на нижайшем уровне описывается формулой

$$n_0(T) \approx n_0^{\text{pump}}(T) = I_{\text{pump}}\tau_{\text{rel}} - \frac{\varepsilon_0}{k_B T} \delta N_{\text{exc}}(T).$$

И хотя видно, что последнее число нарастает тоже пропорционально интенсивности накачки, имеет место «переход» с одной прямой на другую, смещенную ниже начала координат, что также допускает проверку опытным путем.

Если, однако, пренебречь найденными небольшими поправками к линейному поведению зависимости числа КЧ в бозе-конденсате как функции интенсивности накачки, что именно и предполагалось при нахождении значения химического потенциала, то имеет место парадоксальный, на первый взгляд, результат: накачанные низкочастотные КЧ *всегда* нахо-

* При, разумеется, пренебрежении некоторым возможным изменением температуры, относительная величина которого в области 10^2 К не может быть большой.

дятся в режиме БЭК. При этом, однако, необходимо помнить, что так называемые любые температуры должны удовлетворять выше приведенному неравенству $k_B T >> \varepsilon_0$,

Можно сказать и иначе: рассчитанное изменение чисел заполнения квазичастичных состояний (в экспериментах [10–12] — это ферромагнитная пластина, находящаяся под воздействием мощной накачки) свидетельствует, что исходные — термически равновесные — КЧ «препятствуют» накоплению новых во всех состояниях, кроме нижайшего (см. (21) и (22)). Поэтому рожденным накачкой КЧ как бы ничего не остается, как собираться почти исключительно на нем. Это, как следует из рассмотрения, и будет происходить на всех временах (порядка действия импульса накачки) независимо от величины температуры, коль скоро, повторим, $k_B T >> \varepsilon_0$. Тем самым, выполнение такого неравенства делает температуру фактором, не только не препятствующим (если не принимать во внимание усиление релаксационных процессов, уменьшающих $\tau_{\rm rel}$), а даже, в известной мере, способствующим БЭК. Разумеется, последнее утверждение опирается, как говорилось, на предположение о постоянстве температуры, стабильность которой в реальном эксперименте требует специального внимания. Следует, однако, повторить, что при достаточно высоких значениях температуры ее относительное возрастание вследствие процессов облучения не должно быть слишком существенным.

6. Полученные результаты свидетельствуют, что некоторые типы КЧ, в частности, с малыми величинами энергии активации (или же при температурах, их превышающих) в условиях внешней накачки могут (вернее, должны) накапливаться лишь в нижайшем из возможных состояний, что полностью соответствует явлению БЭК. Причем такое накопление сопровождает процесс релаксации из сильно неравновесного состояния в термически (квази)равновесное, которое оказывается неотличимым об бозе-конденсированного. Представляется, что экспериментальная верификация (в том числе, с помощью измерения спектров мандельштам-бриллюэновского рассяния света [10–12,19]) выводов проделанных в работе расчетов могла бы показать, что между БЭК частиц (например, бозе-атомов легких металлов) и низкочастотных КЧ имеется существенное различие. Оно, в первую очередь, может проявиться даже в такой ее (БЭК) важнейшей характеристике, как критическая температура. Рассмотрение других особенностей (в частности, когерентных и флуктуационных свойств) БЭК для КЧ разной природы, с разными дисперсионными законами и в системах разной размерности будет показано отдельно.

Один из нас (А.И.Б.) благодарен М.И. Горенштейну за полезные и стимулирующие дискуссии по вопросам БЭК. Мы также выражаем признательность С.А. Демокритову и Г.А. Мелкову за поддержку и интерес, связанный с желанием постановки проверочных экспериментов, а также советы и замечания. Наконец, работа частично поддержана проектом № 10/07-Н целевой программы НАН Украины «Наноразмерные системы, наноматериалы, нанотехнологии».

Приложение

Необходимо сказать, что в целях упрощения изложения использованное выше уравнение баланса для определения числа накачанных КЧ было записано в виде, из которого следует лишь прямая пропорциональность между величиной $N^{\rm st}_{\rm pump}$ и поглощаемой мощностью $I_{\rm pump}\tau_{\rm rel}$, а также отсутствуют слагаемые, обеспечивающие возникновение порога по величине интенсивности накачки, в окрестности которого, на самом деле, $N_{\rm pump} \sim \sqrt{I_{\rm pump}}$ [12,20].

В связи с этим напомним, что в условиях параметрического электромагнитного возбуждения экспоненциальный рост числа магнонов в системе обеспечивается превышением скорости рождения этих КЧ над скоростью их уничтожения, определяющим каналом которого являются парные столкновения [21]. Тогда для учета этих обстоятельств запишем балансовое уравнение в виде (см. [19])

$$\frac{dN}{dt} = I_{\rm pump}(N+1) - \frac{N - N_{\rm th}}{\tau^{(1)}_{\rm rel}} - \frac{(N-N_{\rm th})^2}{\tau^{(2)}_{\rm rel}},$$

или в соответствии с принятыми обозначениями

$$\frac{dN_{\rm pump}}{dt} = \widetilde{I}_{\rm pump} + (I_{\rm pump} - \frac{1}{\tau^{(1)}_{\rm rel}})N_{\rm pump} - \frac{N^2_{\rm pump}}{\tau^{(2)}_{\rm rel}}, \tag{П.1}$$

где $\widetilde{I}_{\rm pump} \equiv I_{\rm pump}(N_{\rm th}+1)$, а $\tau^{(1)}_{\rm rel}$ и $\tau^{(2)}_{\rm rel}$ — времена жизни магнонов по отношению к одно- и двухчастичным процессам.

Из уравнения (П.1) нетрудно убедиться, что пороговое поведение числа накачанных КЧ полностью определяется знаком второго слагаемого в правой части этого уравнения, а ограничение роста их количества – последним слагаемым. При этом именно равенство $I_{\rm pump} = 1/\tau^{(1)}_{\rm rel}$ задает величину искомого порога, как это имеет место в S-теории параметрического резонанса [21].

Что касается стационарного количества накачанных магнонов, то как следует из того же уравнения (П.1), в области слабых накачек $N^{st}_{\rm pump} \sim \widetilde{I}_{\rm pump}\tau^{(1)}_{\rm rel}$, что имело место и выше; в области порога, когда $I_{\rm pump}\tau^{(1)}_{\rm rel} \sim 1$, поведение меняется и величина $N_{\text{pump}}^{\text{st}} \sim \sqrt{\widetilde{I}_{\text{pump}} \tau_{\text{rel}}^{(2)}}$; наконец, если $I_{\text{pump}} >> 1/\tau_{\text{rel}}^{(1)}$, число $N_{\text{pump}}^{\text{st}} \approx I_{\text{pump}} \tau_{\text{rel}}^{(2)}/2 + \sqrt{(I_{\text{pump}} \tau_{\text{rel}}^{(2)}/2)^2 + \widetilde{I}_{\text{pump}} \tau_{\text{rel}}^{(2)}}$, т.е. описывается зависимостью, снова близкой к линейной. Именно такая картина качественно наблюдается в эксперименте, где функция $N_{\text{pump}}^{\text{st}}(I_{\text{pump}}) \approx n_0^{\text{pump}}(I_{\text{pump}})$ изменяется от линейной к корневой и снова к линейной [20]. При необходимости соответствующие изменения легко внести в формулы (23)–(26), смысл которых полностью сохраняется.

1. M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
2. K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Keterle, *Phys. Rev. Lett*. **75**, 3969 (1995).
3. F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys*. **71**, 463 (1999).
4. Н.Б. Брандт, В.А. Кульбачинский, *Квазичастицы в физике конденсированных сред*, Физматлит, Москва (2005).
5. С.А. Москаленко, *ФТТ* **4**, 276 (1962).
6. В.Б. Тимофеев, *УФН* **175**, 315 (2005).
7. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, J.M.J. Keeling, F.M. Marchetti, M.H. Szymanska, R. Andre, J.L. Staehli, V. Savona, P.B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, *Nature* **443**, 409 (2006).
8. D. Snoke, *Nature* **443**, 403 (2006).
9. Ю.Б. Гайдидей, В.М. Локтев, А.Ф. Прихотько, *ФНТ* **3**, 549 (1977).
10. S.O. Demokritov, V.E. Demidov, O. Dzyapko, G.A. Melkov, A.A. Serga, B. Hillebrands, and A.N. Slavin, *Nature* **443**, 430 (2006).
11. V.E. Demidov, O. Dzyapko, S.O. Demokritov, G.A. Melkov, and A.N. Slavin, *Phys. Rev. Lett*. **99**, 037205 (2007).
12. V.E. Demidov, O. Dzyapko, S.O. Demokritov, G.A. Melkov, and A.N. Slavin, *Phys. Rev. Lett*. **100**, 047205 (2008).
13. Ю.Д. Калафати, В.Л. Сафонов, *Письма в ЖЭТФ* **50**, 149 (1989).
14. G.A. Melkov, V.L. Safonov, A.Yu. Taranenko, and S.V. Sholom, *J. Magn. Magn. Mater*. **132**, 180 (1994).
15. Yu.E. Lozovik, A.G. Semenov, and M. Willander, *Pisma ZhETF* **84**, 176 (2006).
16. А.И. Бугрий, В.М. Локтев, *ФНТ* **33**, 51 (2007).
17. H.D. Politzer, *Phys. Rev*. **A54**, 5048 (1996).
18. В.М. Файн, Я.Н. Ханин, *Квантовая радиофизика*, Сов. Радио, Москва (1965).
19. В.М. Локтев, *ФНТ* **34**, 231 (2008).
20. S.O. Demokritov, V.E. Demidov, O. Dzyapko, G.A. Melkov, and A.N. Slavin. *New J. Phys*. **10**, 045029 (2008).
21. В.Е. Захаров, В.С. Львов, С.С. Старобинец, *УФН* **114**, 609 (1974).

The peculiarities of Bose–Einstein condensation of quasi-particles

A.I. Bugrij and V.M. Loktev

An attempt is made to consider the difference between the processes of the Bose–Einstein condensation of particles and quasi-particles. An equation for particles a number of the Bose-condensate as a function of the total number of particles in the system is obtained. This equation is also written for the case of quasi-particles with taking into account their creation by pumping and the existence of equilibrium thermal excitations in the system. From the analysis of both these equations the chemical potential of pumped quasi-particles and their number in the condesate a function of pumping intensity are found. It is shown that for low energy quasi-particle excitations the process of Bose-condensation begins and proceeds at arbitrary temperatures high enough included.

PACS: 05.30.Jp Boson systems;
75.30.Ds Spin waves;
75.70.–i Magnetic properties of thin films, surfaces, and interfaces;
76.60.Es Relaxation effects.

Keywords: Bose–Einstein condensation, particles, quasi-particles, numbers filling, pumping.