

Задача Крамерса с аккомодационными граничными условиями для квантовых ферми-газов

А.А. Костиков

МАТИ — Российский государственный технологический университет, ул. Оршанская, 3, г. Москва, 121552, Россия
E-mail: alkostikov@yandex.ru

А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет, ул. Радио, 10а, г. Москва, 105005, Россия
E-mail: avlatyshev@mail.ru,
yushkanov@inbox.ru

Статья поступила в редакцию 10 декабря 2007 г., после переработки 23 апреля 2008 г.

Аналитически решена задача Крамерса об изотермическом скольжении квантового ферми-газа с аккомодационными граничными условиями Черчиньяни. Получена скорость изотермического скольжения как функция коэффициента аккомодации и приведенного химического потенциала — отношения химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру. В явном виде представлена функция распределения молекул.

Аналітично вирішено задачу Крамерса про ізотермічне ковзання квантового фермі-газу з акомодационними граничними умовами Черчиньяні. Отримано швидкість ізотермічного ковзання як функція коефіцієнта акомодациї та зведеного хімічного потенціалу — відношення хімічного потенціалу до добутку сталої Больцмана на абсолютну температуру. У явному вигляді представлено функцію розподілу молекул.

PACS: 05.20.Dd Кинетическая теория;
05.30.Fk Фермионные системы и электронный газ.

Ключевые слова: задача Крамерса, аккомодационные граничные условия, аналитическое решение, ферми-газ, изотермическое скольжение.

1. Введение

Кинетические явления в разреженных газах — предмет теоретического изучения со времен Максвелла и Больцмана (история вопроса и соответствующие ссылки см. в [1–4]). При этом большая часть работ по данной тематике посвящена изучению поведения классических газов. Квантовые газы изучались главным образом в рамках рассмотрения кинетики электронов в полупроводниках и металлах (см., например, [5]), а также кинетики фононов в конденсированных средах [6].

Однако и электроны в твердых телах, и фононы относятся к квазичастицам, чье поведение в ряде важных деталей отличается от поведения свободных частиц, а электроны, кроме того, обладают зарядом, так что в этом случае мы имеем дело с кинетикой плазмы.

В то же время постоянный теоретический интерес представляет изучение влияния квантовых эффектов на кинетические процессы в нейтральных газах, особенно при низких температурах. Наибольшее влияние эти эффекты должны оказывать на поведение легких газов, таких как водород и гелий.

Граничные условия, описывающие взаимодействие молекул газа с поверхностью конденсированной фазы, привлекают внимание исследователей в течение длительного времени (см., например, [4]). Эта проблема по-прежнему остается открытой, в частности, для реальных поверхностей. В конкретных задачах используются главным образом модельные граничные условия. Одно из таких условий — зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. Все параметры отраженных молекул в задачах скольжения определяются при этом одной величиной — коэффи-

циентом зеркальности, который часто отождествляют с коэффициентом аккомодации тангенциального импульса молекул.

Условие Максвелла неплохо зарекомендовало себя при решении конкретных граничных задач [3,7]. В то же время оно обладает рядом недостатков. В частности, для некоторых подходов в кинетической теории оно недостаточно удобно, особенно для аналитического решения. Кроме того, зеркально-диффузная схема не всегда достаточно адекватно описывает процесс отражения молекул от поверхности. Эти обстоятельства привели к попыткам модификации и обобщения условий Максвелла [2,7–9]. Одно из таких обобщений предложил Черчиньяни [7] — вместо зеркально-диффузного граничного условия использовать аккомодационное граничное условие для решения задачи о скольжении газа. Это условие базируется на предположении, что отраженные от стенки молекулы частично сохраняют информацию о массовой скорости падающих на стенку молекул при отражении от стенки. Это частичное сохранение Черчиньяни связал с аккомодацией тангенциального импульса. При полной аккомодации тангенциального импульса падающих на стенку молекул средняя тангенциальная скорость отраженных молекул равна нулю.

Воспользуемся этим граничным условием для описания влияния аккомодационных свойств поверхности стенки на изотермическое скольжение квантового ферми-газа вдоль твердой плоской поверхности. Отметим, что частный случай этой задачи — задача Крамерса для квантового ферми-газа с чисто диффузным отражением молекул от стенки, которая решена в [10]. Полученное в настоящей работе решение как частный случай содержит решение из [10].

При наличии вдали от поверхности градиента тангенциальной к поверхности скорости газа возникает скольжение газа вдоль поверхности. Такое скольжение называется изотермическим [1]. Задача Крамерса (см. [1–3]) состоит в нахождении скорости изотермического скольжения газа.

2. Постановка задачи

Пусть газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской стенкой и движется вдоль оси y с массовой скоростью $u_y(x)$:

$$u_y(x) = \frac{1}{N} \int v_y f(x, \mathbf{v}) d\Omega, \quad d\Omega = \frac{(2s+1)m^3 d^3v}{(2\pi\hbar)^3},$$

где N — концентрация (числовая плотность) газа, s — спин молекулы, m — ее масса, f — функция распределения газовых молекул, \hbar — постоянная Планка. Будем считать, что изменение скорости газа на длине

свободного пробега много меньше тепловой скорости. В этом случае задача допускает линейризацию.

Возьмем линейризованное кинетическое уравнение для квантовых ферми-газов с постоянной частотой столкновений молекул [8]:

$$C_x \frac{\partial H}{\partial x} + H(x, \mathbf{C}) = \frac{C_y}{\pi l_0(\alpha)} \int C'_y H(x, \mathbf{C}') g(C') d^3 C'. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$ — безразмерная скорость молекул, $\beta = m / (2kT)$, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, x — безразмерная координата, связанная с размерной x_1 соотношением $x = v\sqrt{\beta} x_1$, v — эффективная частота столкновений. Функция H связана с функцией распределения f соотношением

$$f(x, \mathbf{C}) = f_F(C) + g(C)H(x, \mathbf{C}), \quad (2)$$

$f_F(C) = [1 + \exp(C^2 - \alpha)]^{-1}$ — абсолютная фермиевская функция распределения, $\alpha = \mu_F / (kT)$, μ_F — химический потенциал ферми-газа, α — безразмерный химический потенциал,

$$g(C) = \frac{\exp(C^2 - \alpha)}{[1 + \exp(\alpha - C^2)]^2},$$

$$l_n(\alpha) = \int_0^\infty \mu^n \ln [1 + \exp(\alpha - \mu^2)] d\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В задачах скольжения функция H ищется в виде

$$H(x, \mathbf{C}) = C_y h(x, \mu), \quad \mu = C_x. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) записывается в виде

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \int_{-\infty}^\infty K(\mu') h(x, \mu') d\mu', \quad (4)$$

где $K(\mu)$ — ядро уравнения:

$$K(\mu) = \frac{\ln(1 + \exp(\alpha - \mu^2))}{2l_0(\alpha)}.$$

Правая часть уравнения (4) — удвоенная y -проекция безразмерной массовой скорости:

$$2\sqrt{\beta} u_y(x) = \frac{1}{2l_0(\alpha)} \int_{-\infty}^\infty h(x, \mu) \ln(1 + \exp(\alpha - \mu^2)) d\mu.$$

Для вывода этого равенства подставим (2), (3) в определение массовой скорости. В результате получаем:

$$2\sqrt{\beta} u_y(x) = \frac{1}{\pi l_0(\alpha)} \int_{-\infty}^\infty h(x, C_x) dC_x \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty C_y^2 g(C) dC_y dC_z.$$

Вычисляя внутренний двойной интеграл, переходя к полярным координатам и дважды интегрируя по частям, приходим к предыдущему выражению.

Аккомодационные граничные условия на стенке для отраженных молекул, согласно [7], для уравнения (1) возьмем в виде

$$H(0, C) = (1-q)\psi_1(C_y) \int_{C_x > 0} |C'_x| \psi_1(C'_y) H(0, C') g(C') d^3 C', \quad C_x > 0.$$

Функция $\psi_1 = 2C_y / [\pi l_1(\alpha)]$. С использованием (3) это условие упрощается:

$$h(0, \mu) = 2d_0(\alpha, q), \quad \mu > 0, \quad (5)$$

где

$$d_0(\alpha, q) = -(1-q) \frac{l_0(\alpha)}{l_1(\alpha)} \int_{-\infty}^0 \mu K(\mu) h(0, \mu) d\mu. \quad (6)$$

Здесь q — коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул. Условие (5) означает, что поток тангенциального импульса, переносимого отраженными от стенки молекулами, составляет $1-q$ часть соответствующего потока, переносимого падающими на стенку молекулами. Таким образом, q -ая часть падающего на стенку потока тангенциального импульса «аккомодируется» стенкой. При $q = 1$ получаем чисто диффузное, изотропное отражение молекул от стенки.

Из условия (5) видно, что функция $h(x, \mu)$ при $x = 0$ и $\mu > 0$ не зависит от переменной μ .

Заметим, что уравнение (4) имеет два частных решения A и $B(x-\mu)$, где A и B — постоянные. Величина A связана со скоростью скольжения $U_0(\alpha, q)$: $A = 2U_0(\alpha, q)$. Величина B равна удвоенному градиенту массовой скорости g_v : $B = 2g_v$.

В соответствии с постановкой задачи функция распределения вдали от стенки переходит в асимптотическую

$$h_{as}(x, \mu) = 2U_0(\alpha, q) + 2g_v(x-\mu). \quad (7)$$

Правая часть равенства (7) — линейная комбинация двух частных решений 1 и $x-\mu$ уравнения (4). Координата x отражает факт наличия в газе градиента массовой скорости газа, «скоростная переменная» μ отражает наличие в газе потока импульса молекул, приводящего к возникновению вязкости газа.

Найдем функцию $d_0(\alpha, q)$ из (5). Для этого интеграл из условия (6) по отрицательной полуоси заменим разностью интегралов, один из которых берется по всей действительной оси, а второй — по положительной. В силу закона сохранения импульса в интеграле по всей действительной оси заменим функцию

$h(x, \mu)$ ее асимптотическим решением (7). В интеграле по положительной части действительной оси воспользуемся граничным условием (5). В результате получаем

$$d_0(\alpha, q) = \frac{1-q}{q} \cdot \frac{2l_2(\alpha)}{l_1(\alpha)} g_v. \quad (8)$$

Величина $U_0(\alpha, q)$ определяется кинетическими процессами вблизи поверхности — необходимо решить кинетическое уравнение в так называемом слое Кнудсена, т.е. в слое газа, примыкающего к поверхности толщиной порядка длины свободного пробега l .

Скорость скольжения $U_0(\alpha, q)$ и градиент g_v связаны линейным соотношением

$$U_0(\alpha, q) = C(\alpha, q) g_v. \quad (9)$$

Наша цель — найти функцию $C(\alpha, q)$ — коэффициент изотермического скольжения, построить функцию $h(x, \mu)$ и определить ее значение $h(0, \mu)$ на границе полупространства. На основании равенств (2) и (3) видно, что получение функции $h(x, \mu)$ позволяет построить функцию распределения газовых молекул $f(x, C)$. В связи с этим функцию $h(x, \mu)$ также будем называть функцией распределения.

Итак, задача Крамерса с аккомодационными граничными условиями сформулирована полностью.

3. Аналитическое решение задачи

Разделение переменных в уравнении (4) приводит к решениям

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu),$$

где функция Φ удовлетворяет уравнениям

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu)\Phi(\eta, \mu) d\mu \equiv 1. \quad (10)$$

Из уравнений (10) при $\eta \in (-\infty, +\infty)$ находим

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta P \frac{1}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\eta)}{K(\eta)} \delta(\eta-\mu).$$

Здесь символ Px^{-1} означает главное значение интеграла при интегрировании x^{-1} , $\delta(x)$ — дельта-функция,

$$\lambda(z) = 1 + z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(u) du}{u-z}.$$

С учетом поведения функции $h(x, \mu)$ на бесконечности решение задачи ищем в виде разложения

$$h(x, \mu) = 2U_0(\alpha, q) + 2g_v(x - \mu) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) a(\eta) d\eta, \quad (11)$$

где $U_0(\alpha, q)$ и $a(\eta)$ — неизвестные постоянная и функция.

Подставляя разложение (11) в граничное условие на стенке (5), приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши:

$$-2d_0(\alpha, q) + 2U_0(\alpha, q) - 2g_v\mu + \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{K(\mu)} a(\mu) = 0, \quad \mu > 0.$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - z}$$

и сведем сингулярное уравнение к краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) + 2U_0(\alpha, q) - 2g_v\mu - 2d_0(\alpha, q)] =$$

$$= \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) + 2U_0(\alpha, q) - 2g_v\mu - 2d_0(\alpha, q)], \quad \mu > 0.$$

Здесь $\lambda^\pm(\mu)$ — граничные значения функции $\lambda(z)$ сверху/снизу на действительной оси,

$$\lambda^\pm(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\mu \pm i\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим соответствующую краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0.$$

Метод решения таких краевых задач изложен, например, в [9]. Опуская подробности, приведем ограниченное в нуле решение:

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta(u) du}{u - z}.$$

Здесь $\zeta(u) = \theta(u) - \pi$, $\theta(u)$ — непрерывная регулярная ветвь аргумента функции $\lambda^+(u)$, фиксированная в нуле условием $\theta(0) = 0$.

Вернемся к задаче Римана и преобразуем ее к виду

$$X^+(\mu)[N^+(\mu) + 2U_0(\alpha, q) - 2g_v\mu + 2d_0(\alpha, q)] =$$

$$= X^-(\mu)[N^-(\mu) + 2U_0(\alpha, q) - 2g_v\mu + 2d_0(\alpha, q)], \quad \mu > 0.$$

Эта задача имеет общее решение

$$N(z) = 2d_0(\alpha, q) - 2U_0(\alpha, q) + 2g_v z + \frac{c_0}{X(z)},$$

где c_0 — неизвестная постоянная.

Чтобы это решение можно было принять в качестве вспомогательной функции $N(z)$, введенной выше, потребуем, чтобы общее решение обладало свойством $N(\infty) = 0$. На этом пути получаем $c_0 = -2g_v$, а также находим с использованием (9) искомую скорость скольжения

$$U_0(\alpha, q) = d_0(\alpha, q) + g_v V_1(\alpha) = C(\alpha, q) g_v, \quad (12)$$

где, согласно (8), коэффициент изотермического скольжения равен

$$C(\alpha, q) = V_1(\alpha) + \frac{1-q}{q} \cdot \frac{2l_2(\alpha)}{l_1(\alpha)}. \quad (13)$$

Здесь

$$V_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty [\theta(\mu) - \pi] d\mu, \quad \theta(\mu) = \text{arccctg} \frac{\text{Re} \lambda^+(\mu)}{\text{Im} \lambda^+(\mu)}.$$

Из равенства (14) видно, что $V_1(\alpha)$ — коэффициент изотермического скольжения (см. [1,2,8,11]), если $q = 1$, т.е. в случае максимальной аккомодации тангенциального импульса.

Из формул Сохоцкого для $N(z)$ найдем неизвестную функцию $a(\eta)$ разложения (11):

$$\eta a(\eta) = -\frac{g_v}{\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] = g_v \frac{2 \sin \zeta(\eta)}{\pi \eta X(\eta)}. \quad (14)$$

Таким образом, все неизвестные коэффициенты разложения (11) найдены (формулы (12) и (14)). Тем самым, согласно (2), (3), (11)–(13), функция распределения построена в явном виде.

4. Функция распределения

Подставляя (12) и (14) в (11), после некоторых преобразований получаем

$$\frac{h(x, \mu)}{2g_v} = V_1(\alpha) + x - \mu + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\sin \zeta(\eta)}{X(\eta)} \frac{d\eta}{\eta - \mu} + \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \frac{\cos \zeta(\mu)}{X(\mu)} \theta_+(\mu), \quad (15)$$

где $\theta_+(\mu)$ — функция Хэвисайда, $\theta_+(\mu) = 1, \mu > 0, \theta_+(\mu) = 0, \mu < 0$.

Формулу (15) удобно использовать для построения профиля функции распределения в полупространстве.

Из разложения (15) найдем функцию распределения летящих к стенке молекул ($-\infty < \mu < 0$) непосредственно у стенки (т.е. при $x = 0$). Подставляя $x = 0$ в (15) и учитывая, что $\mu < 0$, получаем значение функции распределения на границе:

$$\frac{h(0, \mu)}{2g_v} = C(\alpha, q) - \mu + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta - \mu)}. \quad (16)$$

Используя интегральное представление

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta-\mu)} = -V_1(\alpha) + \mu - \frac{1}{X(\mu)},$$

вывод которого изложен в [11], на основании (16) получаем

$$\frac{h(0, \mu)}{2g_v} = \frac{1-q}{q} \cdot \frac{2l_2(\alpha)}{l_1(\alpha)} - \frac{1}{X(\mu)}, \quad -\infty < \mu < 0. \quad (17)$$

Формула (17) представляет собой значение функции распределения на стенке для летящих к ней молекул.

5. Вязкость, концентрация и скорость скольжения квантового газа

Формулу (12) для безразмерной скорости скольжения приведем к размерному виду. Для этого понадобится выражение для коэффициента вязкости квантового ферми-газа.

Коэффициент динамической вязкости η определяется из формулы для (x, y) -компоненты тензора вязких напряжений в газе:

$$P_{x,y}^{as}(x_1) = -\eta G_v, \quad G_v = \left(\frac{du_y(x_1)}{dx_1} \right)_{\infty}, \quad (18)$$

где x_1 — размерная координата,

$$P_{x,y}^{as}(x_1) = m \int f_{as}(x_1, \mathbf{v}) v_x v_y d\Omega, \quad (19)$$

а функция f_{as} определяется согласно (2) при подстановке в нее функции h_{as} , введенной равенством (7).

В правой части (18) стоит градиент размерной массовой скорости G_v . Учитывая связь между безразмерной и размерной координатами $x = v\sqrt{\beta}x_1$, найдем связь между градиентами G_v и g_v : $G_v = v g_v$.

Выразим коэффициент вязкости η из равенств (18) и (19) и перейдем в полученном равенстве к интегрированию по безразмерным компонентам скорости. С использованием (2), (3) и (7) получаем

$$\eta = -\frac{m^4(2s+1)}{vg_v(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^5} \int C_x C_y^2 g(C, \alpha) h_{as}(x, C_x) d^3C.$$

Вычисляя интеграл в этом выражении, находим коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{2(2s+1)m^4\pi l_2(\alpha)}{v(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^5}.$$

Найдем концентрацию квантового ферми-газа. По определению, концентрация $N = \int f d\Omega$. Линеаризуя это равенство согласно (2), получаем

$$N = \frac{2\pi(2s+1)m^3 l_0(\alpha)}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3}. \quad (20)$$

Используя выражения (19) и (20) для коэффициента вязкости и концентрации, найдем связь между ними:

$$\eta = \frac{Nm l_2(\alpha)}{v\beta l_0(\alpha)}.$$

Учитывая, что плотность газа ρ равна Nm , запишем

$$\eta = \frac{\rho}{v\beta} \cdot \frac{l_2(\alpha)}{l_0(\alpha)}. \quad (21)$$

Перейдем в равенстве (12) к размерной скорости скольжения, которую обозначим через U_{sl} . Равенство (12) перепишем с использованием градиента размерной массовой скорости в виде $\sqrt{\beta}U_{sl} = C(\alpha, q)G_v / v$, откуда размерная скорость скольжения равна

$$U_{sl} = \frac{C(\alpha, q)}{v\sqrt{\beta}} l G_v. \quad (22)$$

Длина свободного пробега l в газе определена неоднозначно. Сохраняя преемственность с классическим газом, длину свободного пробега в квантовом ферми-газе выразим через коэффициент вязкости η , согласно Черчиньяни [2], в той же форме, что и в классических газах: $l = \eta\sqrt{\pi\beta} / \rho$. Используя равенство (21) для вязкости, получаем следующее выражение для длины свободного пробега в квантовом ферми-газе:

$$l = \frac{\sqrt{\pi} l_0(\alpha)}{v\sqrt{\beta} l_2(\alpha)}. \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в (22), получаем размерную скорость скольжения:

$$U_{sl} = K_v(\alpha, q) l G_v,$$

где

$$K_v(\alpha, q) = \frac{C(\alpha, q) l_0(\alpha)}{\sqrt{\pi} l_2(\alpha)},$$

так же, как и $C(\alpha, q)$, коэффициент изотермического скольжения. При этом безразмерная скорость скольжения определяется с помощью коэффициента $C(\alpha, q)$, а размерная — с помощью коэффициента $K_v(\alpha, q)$.

6. Заключение

Отметим, что при $\alpha \rightarrow -\infty$ квантовый ферми-газ переходит в классический. Вычисляя в (12) предел при

$\alpha \rightarrow -\infty$, получаем классический результат Черчиньяни [7]:

$$C(-\infty, q) = V_1(-\infty) + \sqrt{\pi} \frac{1-q}{q}, \quad V_1(-\infty) \approx 1,01619. \quad (24)$$

Формула (24) дает известную величину коэффициента изотермического скольжения одноатомного классического газа с постоянной частотой столкновений молекул (см., например, [1–3, 11]).

Точно так же можно показать, что и все остальные результаты настоящей работы (формулы (15)–(17)) переходят в известные результаты [11], если квантовый ферми-газ переходит в классический.

На рис. 1 показана зависимость коэффициента $C(\alpha, q)$ изотермического скольжения от безразмерной величины химического потенциала α при различных значениях коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул q .

На рис. 2 приведена зависимость коэффициента $C(\alpha, q)$ изотермического скольжения от величины аккомодации тангенциального импульса молекул q при различных значениях безразмерной величины химического потенциала α .

При отрицательных α график $C(\alpha, q)$ (рис. 1) выходит на асимптоту $C_{as}(\alpha, q) = 1,016 + \sqrt{\pi}(1-q)/q$ уже при $\alpha \leq -2$. При $\alpha \leq -2$ величина $V_1(\alpha)$ практически совпадает с асимптотическим значением, соответствующим классическому случаю. При $q \rightarrow 0$ (рис. 2) поведение $C(\alpha, q)$ определяется слагаемым $2l_2(\alpha)/(l_1(\alpha)q)$, которое при малых α совпадает с величиной $\sqrt{\pi}/q$, возникающей в классических газах.

Таким образом, полученные результаты являются естественным обобщением известных результатов для классических газов.

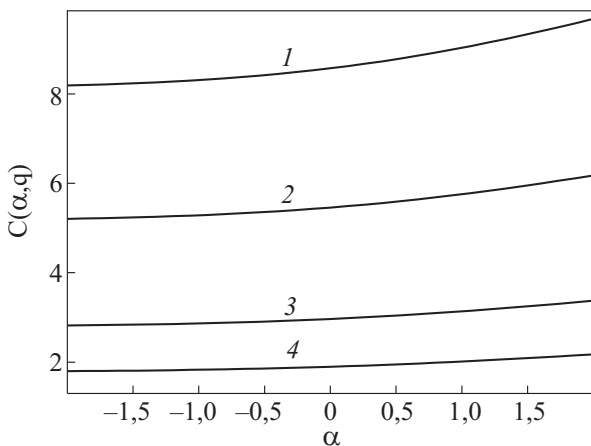


Рис. 1. Зависимость коэффициента изотермического скольжения от величины химического потенциала α , кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям коэффициента аккомодации $q = 0,2; 0,3; 0,5; 0,7$.

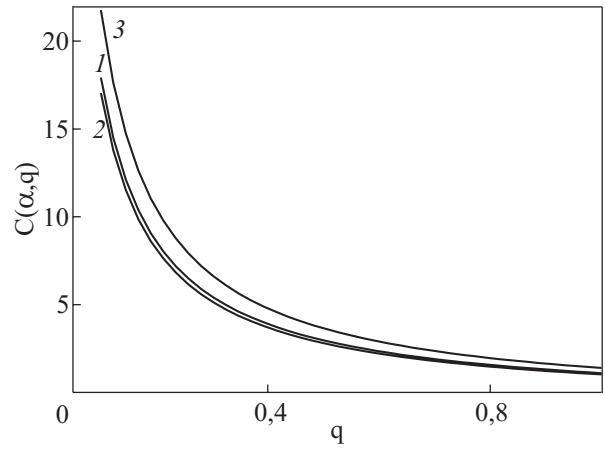


Рис. 2. Зависимость коэффициента изотермического скольжения от величины коэффициента аккомодации, кривые 1, 2, 3 отвечают значениям химического потенциала $\alpha = 0, -3, 3$.

Итак, в работе аналитически решена задача Крамера об изотермическом скольжении квантового ферми-газа с аккомодационными граничными условиями.

Коэффициент изотермического скольжения $C(\alpha, q)$ найден как функция коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул и безразмерного химического потенциала — параметра, равного отношению химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру.

В явном виде представлена функция распределения молекул в полупространстве, а также значение функции распределения молекул газа, летящих к стенке, непосредственно у стенки.

1. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в неоднородных газах*, Мир, Москва (1976).
2. К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, Москва (1977).
3. М.Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, Москва (1967).
4. В.Г. Баранцев, *Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями*, Наука, Москва (1975).
5. Дж. Займан, *Электроны и фононы*, ИЛ, Москва (1962).
6. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
7. К. Cercignani, *J. Math. Anal. Appl.* **10**, 568 (1965).
8. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Изв. РАН. Сер. МЖГ.* **2**, 193 (2004).
9. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Инж-физ. журн.* **74**, 63 (2001).
10. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Теор. матем. физ.* **129**, 491 (2001).
11. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Аналитическое решение граничных задач кинетической теории*, Изд-во МГОУ, Москва (2004).

The Kramers problem with accommodative boundary conditions for quantum Fermi gases

A.A. Kostikov, A.V. Latyshev, and A.A. Yushmanov

The Kramers problem of isothermal slip of quantum Fermi gas with Cercignani's accommodative boundary conditions is analytically solved. Speed of isothermal slip is derived as a function of accommodation coefficient and reduced chemical po-

tential (the relation of chemical potential to product of Boltzmann constant on absolute temperature). The distribution function of molecules is presented in an explicit form.

PACS: 05.20.Dd Kinetic theory;
05.30.Fk Fermion systems and electron gas.

Keywords: Kramers problem, accommodative boundary condition, analytical solution, Fermi gas, isothermal sliding.