

УДК 519.688:519.6:514.7

С.И. Гоменюк¹, В.В. Лаврик²

¹Запорожский национальный университет, Украина

г. Запорожье, 69600, ул. Жуковского, 66

²Бердянский государственный педагогический университет, Украина

г. Бердянск, 71111, ул. Шмидта, 4

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЭЛАСТОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

S.I. Gomenyuk¹, V.V. Lavrik²

¹Zaporizhzhya National University, Ukraine

Zaporozhye, 69600, st. Zhukovsky, 66

²Berdyansky State Pedagogical University, Ukraine

Berdyansk, 71111, st. Schmidt 4

PRESENTATION OF THE MOMENT SCHEME OF FINITE ELEMENTS TO CALCULATE STRESS-STRAIN STATE OF ELASTOMER IN TOOL SYSTEMS

С.И. Гоменюк¹, В.В. Лаврик²

¹Запорізький національний університет, Україна

м. Запоріжжя, 69600, вул. Жуковського, 66

²Бердянський державний педагогічний університет, Україна

м.Бердянськ, 71111, вул. Шмідта, 4

ПОДАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ З ЕЛАСТОМЕРНИХ МАТЕРІАЛІВ В ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

В статье представлена моментная схема конечного элемента на примере пространственного прямоугольного параллелепипеда. Выведенные вариационные формулы являются статическими соотношениями и используются как альтернативный метод расчёта напряжённо-деформированного состояния эластомерных конструкций. Они позволяют инженеру-проектировщику быстрее и эффективнее осуществлять расчёт исследуемых объектов.

Ключевые слова: конечный элемент, моментная схема, ряд Макларена.

The article presents the moment scheme as an example of a finite element volume cuboid. Derived variational formulas are static relationships. They are used as an alternative method for calculating the stress-strained state designs. Engineer designer can faster and more effectively carry out the calculation of the objects.

Keywords: finite element, moment scheme, Maclaurin series.

У статті представлена моментна схема скінченного елемента на прикладі просторового прямокутного паралелепіпеда. Виведені варіаційні формули є статичними співвідношеннями і використовуються як альтернативний метод розрахунку напружено-деформованого стану еластомерних конструкцій. Вони дозволяють інженеру-проектувальнику швидше та ефективніше здійснювати розрахунок досліджуваних об'єктів.

Ключові слова: скінчений елемент, моментна схема, ряд Макларена.

Введение

При использовании традиционных схем метода конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений, построенного на основе вариационного принципа Лагранжа для решения задач с особенностями (таких как учёт слабой сжимаемости, расчёт пластин на базе трёхмерных конечных элементов и др.) возникают существенные трудности [2, 3], для преодоления которых используются другие вариационные принципы – Кастильяно (метод сил), Хеллингера – Рейсснера, Ху – Вашицу (смешанный метод) и др.[4].

МКЭ в форме метода сил не получил значительного развития в силу сложности при аппроксимации напряжённого состояния. Больше применение нашли смешанные схемы МКЭ. Имея положительные особенности [5], они обладают и рядом недостатков, как увеличение порядка разрешающей системы уравнений по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений, нарушение положительной определенности матрицы уравнений. Поэтому для задач с указанными особенностями предпочтительнее развитие гибридных схем МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного принципа Лагранжа.

Стандартный МКЭ в форме метода перемещений требует, чтобы поле перемещений точек внутри КЭ аппроксимировалось полиномиальными функциями, а контакт на границах элементов осуществлялся при соблюдении условий неразрывности. Как следует из работ [6; 7] этот вариант МКЭ обладает медленной сходимостью в силу полиномиальности функций. Аппроксимирующие поля перемещений не включают слагаемое, описывающее жесткие смещения КЭ. Этот эффект существенно проявляется при использовании криволинейных КЭ, и учёт жестких смещений КЭ следует рассматривать не как необходимое условие сходимости, а важное средство повышения эффективности МКЭ при расчете тел криволинейной формы.

В процессе эксплуатации стандартной схемы МКЭ в форме метода перемещений наряду с проявлением жестких смещений КЭ было замечено и другое негативное свойство МЖ, называемое «эффектом ложного сдвига» [1], а именно: при изгибе тонких пластин и оболочек на базе трехмерных КЭ значительно возрастают погрешности, связанные с проявлением фиктивных сдвиговых деформаций.

Для устранения этих недостатков была разработана моментная схема конечного элемента (МСКЭ) [1, 2, 8], позволяющая учесть основные свойства жестких смещений для изопараметрических и криволинейных КЭ изотропных упругих тел. Суть её заключается в отбрасывании некоторых членов разложения деформаций, реагирующих на жесткие смещения и на появляющиеся фиктивные сдвиговые деформации. При этом точные уравнения связи деформаций и перемещений заменяются приближенными.

При решении практической задачи механики эластомеров встаёт проблема выбора наиболее удачной, по возможности оптимальной, расчётной схемы, которая базируется на целом ряде конкретных методов вычислительной математики [2]. Но на данном этапе, через недостаточные научные исследования, говорить про оптимальность той или другой вычислительной схемы сложно. Это обстоятельство часто заставляет строить разные вычислительные алгоритмы, а потом сравнивать их преимущества и недостатки. Полученные окончательные и некоторые промежуточные результаты расчётов должны исследоваться на соответствия их механического смысла задачи. Это так же является необходимой

частью расчётов, т.к. ошибки округления и проявление нестойкости некоторых расчётных алгоритмов могут значительно изменить результат. Процесс анализа результатов есть очень сложным и трудоёмким процессом [6].

Выходом из данной ситуации может быть разработка систем автоматизированного проектирования (САПР), которое позволило бы инженеру - программисту создавать надёжные модели в своей предметной области. Данные расчётные комплексы должны состоять из систем прикладных программ и содержать в своих библиотеках заранее разработанные модули расчётов конкретных объектов [5].

Цель этой работы – представление моментной схемы конечных элементов для решения задач механики эластомеров и использование для расчётов в интеллектуальных системах.

Вывод формулы

Положим, что область, занимаемая элементом, отображена в кубе с единичными рёбрами (рис.1).

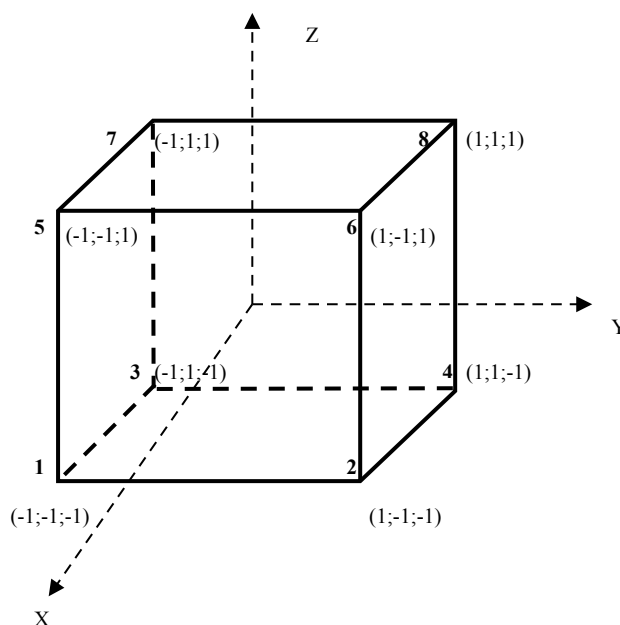


Рис. 1. Шестигранный прямоугольный конечный элемент

В центр «изопараметрического» КЭ поместим начало местной системы координат $Oxyz$, направляя оси вдоль рёбер [1, 4].

Функции, задающие геометрию для криволинейного КЭ в базисной системе координат, представляется в виде соотношений:

$$z_1 = \sum_{i=1}^8 N_i z^{1i}; z_2 = \sum_{i=1}^8 N_i z^{2i}; z_3 = \sum_{i=1}^8 N_i z^{3i}, \quad (1)$$

где $N_i = \frac{1}{8}(1 + xx_i)(1 + yy_i)(1 + zz_i)$ - функции формы, заданные в базисной системе координат; z^{1i}, z^{2i}, z^{3i} - координаты узловых точек параллелепипеда. Определим якобиан перехода от базисной в местную систему координат:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \left[\left\{ \xi^{1i} \right\} \left\{ \xi^{2i} \right\} \left\{ \xi^{3i} \right\} \right], \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \left\{ \xi^{1i} \right\} &= \left\{ \xi^{11}, z^{12}, z^{13}, z^{14}, z^{15}, z^{16}, z^{17}, z^{18} \right\}, \\ \left\{ \xi^{2i} \right\} &= \left\{ \xi^{21}, z^{22}, z^{23}, z^{24}, z^{25}, z^{26}, z^{27}, z^{28} \right\}, \\ (3) \quad \left\{ \xi^{3i} \right\} &= \left\{ \xi^{31}, z^{32}, z^{33}, z^{34}, z^{35}, z^{36}, z^{37}, z^{38} \right\}, \end{aligned}$$

i - количество узлов; $\left\{ \xi^{1i} \right\}$ -абсциссы i -го узла; $\left\{ \xi^{2i} \right\}$ -ординаты i -го узла; $\left\{ \xi^{3i} \right\}$ - аппликаты i -го узла.

Основной принцип моментной схемы лежит в представлении аппроксимирующей функции в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием n -ых членов ряда. Для пространственного прямоугольного шестигранного конечного элемента эта функция, представленная в виде ряда, будет иметь следующий вид [2]:

$$u_k = w_k^{000} + w_k^{100} \psi^{100} + w_k^{010} \psi^{010} + w_k^{001} \psi^{001} + w_k^{110} \psi^{110} + w_k^{101} \psi^{101} + w_k^{011} \psi^{011} + w_k^{111} \psi^{111} \quad (4)$$

где w_k^{pqr} - коэффициенты разложения, ψ^{pqr} - набор степенных координатных функций, определяемых по формуле:

$$\psi^{pqr} = \frac{x^p y^q z^r}{p! q! r!} \quad (p=0, 1; q=0, 1; r=0, 1). \quad (5)$$

Компоненты тензора деформации разложим в ряд Макларена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{ij} e^{(stg)} \psi^{(stg)} \quad (6)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= e_{11}^{00} + e_{11}^{001} \psi^{001} + e_{11}^{010} \psi^{010} + e_{11}^{011} \psi^{011}; \\
 \varepsilon_{22} &= e_{22}^{000} + e_{22}^{001} \psi^{001} + e_{22}^{100} \psi^{100} + e_{22}^{101} \psi^{101}; \\
 \varepsilon_{33} &= e_{33}^{000} + e_{33}^{010} \psi^{010} + e_{33}^{100} \psi^{100} + e_{33}^{110} \psi^{110} \\
 &(7) \\
 \varepsilon_{12} &= e_{12}^{000} + e_{12}^{001} \psi^{001}; \\
 \varepsilon_{13} &= e_{13}^{000} + e_{13}^{010} \psi^{010}; \\
 \varepsilon_{23} &= e_{23}^{000} + e_{23}^{100} \psi^{100}.
 \end{aligned}$$

В разложении компонент деформаций наряду с коэффициентами разложения деформаций присутствуют коэффициенты разложения жёстких поворотов. Это обстоятельство обуславливает причину замедленной сходимости КЭ. Чтобы её устранить отбросим эти члены ряда. После преобразования для данного конечного элемента, тензоры деформации будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_k^{i2} + w_k^{i5} y + w_k^{i6} z + w_k^{i8} yz); \\
 &(8) \\
 \varepsilon_{22} &= \sum_{i=1}^8 v_i b_{010}^{k'} (w_k^{i3} + w_k^{i5} x + w_k^{i7} z + w_k^{i8} xz); \\
 \varepsilon_{33} &= \sum_{i=1}^8 \omega_i b_{001}^{k'} (w_k^{i4} + w_k^{i6} x + w_k^{i7} y + w_k^{i8} xy); \\
 \varepsilon_{12} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_k^{i3} + w_k^{i7} z) + v_i b_{010}^{k'} (w_k^{i2} + w_k^{i6} z); \\
 \varepsilon_{13} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_k^{i4} + w_k^{i7} y) + \omega_i b_{001}^{k'} (w_k^{i2} + w_k^{i5} y); \\
 \varepsilon_{23} &= \sum_{i=1}^8 v_i b_{010}^{k'} (w_k^{i4} + w_k^{i6} x) + \omega_i b_{001}^{k'} (w_k^{i3} + w_k^{i5} x),
 \end{aligned}$$

где u_i , v_i , ω_i - компоненты перемещений каждого узла в пределах КЭ ; w_k^{ij} - коэффициенты поворота узлов, $b_{(\mu\nu\eta)}^{k'}$ - коэффициенты, которые связывают значения узловых поворотов и степенные функции $\psi^{(pqr)}$. Для кубического КЭ, который имеет единичные метрики измерения, представленного в естественной системе координат, можно определить коэффициенты $b_{\mu\nu\eta}^{k'}$. Так,

$$b_{100}^{k'} = b_{010}^{k'} = b_{001}^{k'} = 1, \text{ а } b_{110}^{k'} = b_{101}^{k'} = b_{011}^{k'} = b_{111}^{k'} = 0. \quad (9)$$

Представим формулу удельной энергии деформации системы. Первоначально преобразуем её к виду:

$$\Pi = \iiint_V |J| \left(\varepsilon_{11} \left(\frac{1}{2} D_{11} \varepsilon_{11} + D_{12} \varepsilon_{22} + D_{13} \varepsilon_{33} \right) + \varepsilon_{22} \left(\frac{1}{2} D_{22} \varepsilon_{22} + D_{23} \varepsilon_{33} \right) + \varepsilon_{33} \left(\frac{1}{2} D_{33} \varepsilon_{33} \right) + \varepsilon_{12} \left(\frac{1}{2} D_{44} \varepsilon_{12} \right) + \varepsilon_{13} \left(\frac{1}{2} D_{55} \varepsilon_{13} \right) + \varepsilon_{23} \left(\frac{1}{2} D_{66} \varepsilon_{23} \right) \right), \quad (10)$$

где D_{mn} -коэффициенты матрицы модулей упругости конечного элемента, $m, n = \overline{1,6}$, причём $D_{mn} = D_{nm}$.

Используя (10), получим формулы для вычисления коэффициентов матрицы жёсткости $[K_{ikjm}]$:

$$\begin{aligned} K_{i1j1} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j}, K_{i1j2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial v_j}, K_{i1j3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial w_j}; \\ K_{i2j1} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial u_j}, K_{i2j2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial v_j}, K_{i2j3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial w_j}; \\ K_{i3j1} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial u_j}, K_{i3j2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial v_j}, K_{i3j3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial w_j}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выводы

Изложенная в статье схема вывода соотношений МКЭ позволяет учесть основные свойства жёстких смещений, как для изопараметрических, так и для криволинейных конечных элементов, приводящие к таким нежелательным последствиям.

Представленная методика нахождения потенциальной энергии системы на основе моментной схемы конечных элементов является универсальной и позволяет численно рассчитывать задачи механики эластомерных конструкций.

Литература

1. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наукова думка, 2002. – 655 с.
2. Лаврик В.В. Использование моментной схемы для конечно-элементного анализа объектов, находящихся в напряжённо-деформированном состоянии / В. В. Лаврик // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2013 г. – №4(193). Частина 2. – С. 96 – 100
3. Bazhenov V. A., Sakharov A. S., Tsykhanovskii V. K., The Moment Finite-Element Scheme in Problems of Nonlinear Continuum Mechanics // International Applied Mechanics, Vol. 38, Issue 6, June 2002, P. 658-692.
4. Brenner S. C., Scott L. R., The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
5. Chen, Y, Lu, Z, Error estimates for parabolic optimal control problem by fully discrete mixed finite element methods // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 46, Issue 11, November 2010, P. 957-965.

6. Dokhnyak B. M., Kirichevski V. V. and Ishchenko M. I., Application of the moment scheme of the finite element method to the solution of problems with initial stresses in the incremental elasticity theory // *Strength of Materials*, May 2006, Vol. 38, Issue 3, P. 313-323.
7. Krivovichev G. V., On the Finite-Element-Based Lattice Boltzmann Scheme// *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8, 2014, № 33, P. 1605 – 1620.
8. Lavrik V. et al. Development of the CAD system for designing non-standard constructions from elastomers / V. Lavrik et al // *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. – Vol. 3, Issue 3, March 2014. – P. 10717– 10726.

Literatura

1. Kirichevskiy V. The Finite Element Method in the mechanics of elastomers / V.V. Kirichevskiy. - K.: Naukova Dumka, 2002. - 655 p.
2. Lavrik V. The use of moment diagrams for finite-element analysis of objects in the stress-strain state / Vladimir Lavrik // *Journal of East Ukrainian National University, Volodymyr Dal..* - 2013 - №4 (193). Part 2. - P. 96 – 100.
3. Bazhenov V. A., Sakharov A. S., Tsykhanovskii V. K., The Moment Finite-Element Scheme in Problems of Nonlinear Continuum Mechanics // *International Applied Mechanics*, Vol. 38, Issue 6, June 2002, P. 658-692.
4. Brenner S. C., Scott L. R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
5. Chen, Y, Lu, Z, Error estimates for parabolic optimal control problem by fully discrete mixed finite element methods // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 46, Issue 11, November 2010, P. 957-965.
6. Dokhnyak B. M., Kirichevski V. V. and Ishchenko M. I., Application of the moment scheme of the finite element method to the solution of problems with initial stresses in the incremental elasticity theory // *Strength of Materials*, May 2006, Vol. 38, Issue 3, P. 313-323.
7. Krivovichev G. V., On the Finite-Element-Based Lattice Boltzmann Scheme// *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8, 2014, № 33, P. 1605 – 1620.
8. Lavrik V. et al. Development of the CAD system for designing non-standard constructions from elastomers / V. Lavrik et al // *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. – Vol. 3, Issue 3, March 2014. – P. 10717– 10726

RESUME

S. I. Gomenyuk, V.V. Lavrik

Presentation of the moment scheme of finite elements to calculate stress-strain state of elastomer in tool systems

In this paper, we develop relations model for intelligent decision-making system.

For the implementation of the scheme proposed sharing of expert systems and methods of evolutionary adaptation to better address these problems. It is shown that the expert system allows to develop a structured chart showing the whole process of decision making in uncertain and vague terms. The system model and interpret user actions on the organization of their knowledge about the subject and make conclusions.

The scheme enables the sharing of expert systems and methods of evolutionary adaptation for efficient problem solving and allows you to implement a structured scheme designed to reflect the entire course of the decision making process in any intellectual system. This scheme will provide an opportunity to make a finite set of questions that will help the user to effectively perform the entire process of program implementation.

С.И. Гоменюк, В.В. Лаврик

Представление моментной схемы конечных элементов для расчёта напряжённо-деформированного состояния конструкций из эластомерных материалов в инструментальных системах

В данной статье разработаны соотношения модели принятия решения для интеллектуальных систем.

Для реализации данной схемы предлагается совместное использование экспертных систем и методов эволюционной адаптации для более эффективного решения подобных задач. Показано, что экспертная система позволяют разработать структурированную схему, отражающую весь ход процесса принятия решений в неопределенных и расплывчатых условиях. Система моделирует и интерпретирует действия пользователя по организации своих знаний об объекте и делает из них выводы.

Разработанная схема позволяет совместное использование экспертных систем и методов эволюционной адаптации для эффективного решения задач и позволяет внедрить разработанную структурированную схему, отражающую весь ход процесса принятия решений, в любую интеллектуальную систему. Эта схема даст возможность составить конечное множество вопросов, которые помогут пользователю эффективно произвести весь процесс программной реализации.

Поступила в редакцию 18.08.2015