

УДК 519.6

Д.Б.Буй¹, Е.В.Шишацкая¹, К.Д.Мухаммед¹, Ф.Санмейд¹

¹ Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
Украина, 01033, г. Киев, ул. Владимирская, 60

ЛОГИКИ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ТРЕХЗНАЧНЫМИ ЛОГИКАМИ КЛИНИ

D.B.Buy¹, O.V. Shyshats'ka¹, K.D.Muhammed¹, F.Sunmade¹

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv
Ukraine, 01033, Kyiv, Vladimirska st., 60

PARTIAL PREDICATES LOGICS INDUCED KLEENE'S THREE- VALUED LOGICS

Д.Б.Буй¹, О.В.Шишацка¹, К.Д.Мухаммед¹, Ф.Санмейд¹

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Україна, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 60

ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ, ІНДУКОВАНІ ТРИЗНАЧНИМИ ЛОГІКАМИ КЛІНІ

Рассматриваются операции дизъюнкции и конъюнкции частичных предикатов, индуцированные операциями дизъюнкции и конъюнкции слабой и сильной трехзначных логик Клини.

Ключевые слова: частичные предикаты, дизъюнкция, конъюнкция, трехзначные логики Клини.

We consider the operations of disjunction and conjunction of partial predicates induced operations of disjunction and conjunction of weak and strong Kleene's three-valued logics.

Key words: partial predicates, disjunction, conjunction, Kleene's three-valued logics.

Розглядаються операції диз'юнкції та кон'юнкції часткових предикатів, індуковані операціями диз'юнкції та кон'юнкції слабкої та сильної тризначних логік Кліні.

Ключові слова: часткові предикати, диз'юнкція, кон'юнкція, тризначні логіки Кліні.

Введение

Классическая математическая логика, несмотря на впечатляющие результаты, не является адекватным инструментом для решения современных проблем искусственного интеллекта (в частности, проблем Big Data, Data Mining). Эта ситуация является вполне объяснимой, если учесть, что классическая математическая логика разрабатывалась для решения совершенно иных задач, в первую очередь, задач оснований математики. Поэтому при решении задач собственно искусственного интеллекта все большую роль играют неклассические логики: многозначные, нечеткие (fuzzy), и т.д.

Статья посвящена алгебрам частичных предикатов, сигнатуры которых содержат конъюнкцию и дизъюнкцию. Такие алгебры строятся на основе трехзначных сильной и слабой логик Клини, хорошо известных в классической теории алгоритмов [1].

Алгебра частичных предикатов

Зафиксируем универсум D и будем рассматривать частичные предикаты вида $p : D \rightsquigarrow \{T, F\}$.

Определение 1. Под слабой дизъюнкцией понимаем операцию, которая предикатам p, q ставит в соответствие предикат $p \vee_{\omega} q$, такой, что для всех $d \in D$:

$$(p \vee_{\omega} q)(d) \approx \begin{cases} T, \text{ если } (p(d) \approx T \wedge d \in \text{dom } q) \vee (q(d) \approx T \wedge d \in \text{dom } p), \\ F, \text{ если } p(d) \approx F \wedge q(d) \approx F, \\ \text{неопределенно, иначе;} \end{cases}$$

где $d \in D$, а \approx обобщенное равенство (см. например, [2]).

Основные свойства введенной операции приведены в двух следующих предложениях.

Предложение 1. Для операции слабой дизъюнкции выполняются следующие утверждения:

1. $\text{dom}(p \vee_{\omega} q) = \text{dom } p \cap \text{dom } q$;
2. $(p \vee_{\omega} q)^{-1}T = (p^{-1}T \cap \text{dom } q) \cup (q^{-1}T \cap \text{dom } p) = (p^{-1}T \cap q^{-1}T) \cup (p^{-1}T \cap q^{-1}F) \cup (q^{-1}T \cap p^{-1}F)$
(причем множества последнего объединения попарно не пересекаются);
3. $(p \vee_{\omega} q)^{-1}F = p^{-1}F \cap q^{-1}F$. \square

Предложение 2. Имеет место равенство

$$p \vee_{\omega} q = S_1^{(3)}(\vee, p, q),$$

где $S_1^{(3)}$ – оператор суперпозиции, понимаемый традиционно (см., например, [3]).

Далее уточним связь между слабой дизъюнкцией предикатов и дизъюнкцией слабой трехзначной логики Клини. Для этого расширим частичные двухзначные предикаты до тотальных трехзначных предикатов.

Определение 2. Пусть $p : D \rightsquigarrow \{T, F\}$ частичный (двухзначный) предикат. Под $\hat{p} : D \rightarrow \{T, F, Un\}$, где Un третье логическое значение (Unknown), будем понимать такой трехзначный предикат: $\hat{p} = p \cup \bar{Un}_{D \setminus \text{dom } p}$, где $\bar{d}_L : L \rightarrow \{d\}$ – константная функция.

Пусть $V_0 : \{T, F, Un\}^2 \rightarrow \{T, F, Un\}$ – дизъюнкция слабой трехзначной логики Клини (см. табл. 1)

Таблица 1. Дизъюнкция слабой трехзначной логики Клини

\vee_{ω}	T	F	Un
T	T	T	Un
F	T	F	Un
Un	Un	Un	Un

Теорема 1. Имеет место равенство

$$p \vee_{\omega} q = S_1^{(3)}(\vee_{\omega}, \hat{p}, \hat{q}). \tag{1}$$

Равенство (1) уточняет связь между слабой дизъюнкцией предикатов и дизъюнкцией слабой трехзначной логики Клини.

Имеются аналоги вышеприведенных рассмотрений и для слабой конъюнкции предикатов.

Определение 3. Под слабой конъюнкцией понимаем операцию, которая предикатам p, q ставит в соответствие предикат $p \wedge_{\omega} q$, такой, что для всех $d \in D$:

$$(p \wedge_{\omega} q)(d) \approx \begin{cases} F, \text{ если } (p(d) \approx F \wedge d \in \text{dom } q) \vee (q(d) \approx F \wedge d \in \text{dom } p), \\ T, \text{ если } p(d) \approx T \wedge q(d) \approx T, \\ \text{неопределенно, иначе.} \end{cases}$$

Имеет место следующий аналог предложения 1.

Предложение 3. Для операции слабой конъюнкции выполняются следующие утверждения:

1. $\text{dom}(p \wedge_{\omega} q) = \text{dom } p \cap \text{dom } q$;
2. $(p \wedge_{\omega} q)^{-1}T = p^{-1}T \cap q^{-1}T$;
3. $(p \wedge_{\omega} q)^{-1}F = (p^{-1}F \cap \text{dom } q) \cup (q^{-1}F \cap \text{dom } p) = (p^{-1}F \cap q^{-1}T) \cup (p^{-1}F \cap q^{-1}F) \cup (q^{-1}F \cap p^{-1}T)$

(причем множества последнего объединения попарно не пересекаются).

Ниже приведем аналог предложения 2.

Предложение 4. Имеет место равенство

$$p \wedge_{\omega} q = S_1^{(3)}(\wedge, p, q).$$

Наконец, связь между слабой конъюнкцией предикатов и конъюнкцией слабой трехзначной логики Клини (см. табл. 2) уточняет следующая теорема.

Таблица 2. Конъюнкция слабой трехзначной логики Клини

\wedge_{ω}	T	F	Un
T	T	F	Un
F	F	F	Un
Un	Un	Un	Un

Теорема 2. Имеет место равенство

$$p \wedge_{\omega} q = S_1^{(3)}(\wedge_{\omega}, \hat{p}, \hat{q}). \tag{2}$$

Продемонстрированный подход можно применить к сильной дизъюнкции и конъюнкции. Приведем определение сильной дизъюнкции частичных предикатов.

Определение 4. Под сильной дизъюнкцией понимаем операцию, которая предикатам p, q ставит в соответствие предикат $p \vee_s q$, такой, что для всех $d \in D$:

$$(p \vee_s q)(d) \approx \begin{cases} T, \text{ якщо } d \in p^{-1}T \cup q^{-1}T, \\ F, \text{ якщо } d \in p^{-1}F \cap q^{-1}F, \\ \text{неопределено, інакше.} \end{cases}$$

Имеют место аналоги предложения 1 и теоремы 1 для сильной дизъюнкции, предложения 3 и теоремы 2 – для сильной конъюнкции.

Заключение

В работе выявлена связь между операциями слабой дизъюнкции (конъюнкции) частичных предикатов и операциями дизъюнкции (конъюнкции) слабой трехзначной логики Клини – теорема 1, равенство (1) (соответственно, теорема 2, равенство (2)).

Следующая задача состоит в установлении структуры введенных алгебр частичных предикатов (так, например, множество всех частичных предикатов вместе с операцией слабой конъюнкции (дизъюнкции) является коммутативной идемпотентной полугруппой). Говоря точнее, речь идет о перенесении результатов, полученных в [4-8] для трехзначных логик Клини, на указанные алгебры частичных предикатов.

Литература

1. Клини С. Введение в метаматематику. – М.: ИЛ, 1957. – 524 с.
2. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
3. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. – М.: Наука, 1965. – 392 с.
4. Буй Д.Б. Три замечания о трехзначной логике Клини / Д.Б. Буй, С.А. Поляков, Е.В. Шишацкая // The Fourth International Conference “Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development (TAAPSD’2007). Abstracts (Ukraine, Berdysk, 4-9 September 2007). – Київ: Пульсари, 2007. – С. 47-51.
5. Шишацька О.В. Трьохзначні логіки Кліні та трьохелементні ланцюги. – Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – Київ: Хрещатик. – 2007. – С. 230-236.
6. Буй Д.Б. Трехзначные логики Клини и трехэлементные цепи / Д.Б. Буй, Е.В. Шишацкая // Algorithmic and Mathematical Foundation of the Artificial Intelligence. International Book Series “INFORMATION SCIENCE & COMPUTING”, Number 1. Supplement to the International Journal “INFORMATION TECHNOLOGIES & KNOWLEDGE”, Volume 2, 2008. – Sofia. – 2008. – С. 165-172.
7. Buy D. Three-valued Kleene logic and three-element chains / D.B. Buy, O.V. Shyshats'ka // Proceedings of the CSE 2008 International Scientific Conference on Computer Science and Engineering (September 24-26, 2008, The High Tatras – Stara Lesna, Slovakia).
8. Буй Д.Б. Неклассические логики: трехзначные логики Клини и трехэлементные цепи / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута, Е.В. Шишацкая // VII-я Межд. научно-практ. конференция «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте». – 2013. – С. 43-50.

Literatura

1. Kleene C. Introduction to metamathematics. – New York, Toronto: D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC., 1952. – 524 p.
2. Cutland N. An introduction to recursive function theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. – 256 p.
3. Maltsev A.I. Algorithms and computational functions. – М.: Nauka, 1965. – 392 p.
4. Buy D.B. Three remarks on Kleene’s three-valued logics / D.B. Buy, S.A. Polyakov, E.V. Shishatskaya // The Fourth International Conference “Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development (TAAPSD’2007). Abstracts (Ukraine, Berdysk, 4-9 September 2007). – Kiev: Pulsar, 2007. P. 47-51.
5. Shyshats'ka O.V. Kleene’s three-valued logics and three-element chains. – Bulletin of Kiev University. A series of physical and mathematical sciences. – Kiev: Khreshchatyk. – 2007. – P. 230-236.

6. Buy D.B. Kleene's three-valued logics and three-element chains / D.B. Buy, E.V. Shyshats'ka // Algorithmic and Mathematical Foundation of the Artificial Intelligence. International Book Series "INFORMATION SCIENCE & COMPUTING", Number 1. Supplement to the International Journal "INFORMATION TECHNOLOGIES & KNOWLEDGE", Volume 2, 2008. – Sofia. – 2008. – P. 165-172.
7. Buy D. Three-valued Kleene logic and three-element chains / D.B. Buy, O.V. Shyshats'ka // Proceedings of the CSE 2008 International Scientific Conference on Computer Science and Engineering (September 24-26, 2008, The High Tatras – Stara Lesna, Slovakia).
8. Buy D. Non-classical logics: Kleene's three-valued logics and three-element chains / D.B. Buy, N.D. Kahuta, E.V. Shyshats'ka // VII-th International Scientific and Practical Conference "Integrated models and soft computing in artificial intelligence". – 2013. – P.43-50.

RESUME

D.B.Buy, O.V. Shyshats'ka, K.D.Muhammed, S.Fabunmi

Partial predicates logics induced Kleene's three-valued logics

We consider the operations of disjunction and conjunction of partial two-valued predicates induced by the operations of disjunction and conjunction of weak and strong three-valued Kleene's logics. In this way weak disjunction and weak conjunction of predicates essentially entered by the superposition of the predicates to the standard disjunction (for weak disjunction of predicates) or by the superposition of the predicates to the standard conjunction (for weak conjunction of predicates).

We show and clarify the relationship between the operations of weak disjunction (weak conjunction) of predicates and disjunction (conjunction) of weak three-valued Kleene's logic. This relationship is established by the simulation of partial two-valued predicates as total three-valued predicates (the third logical value Unknown appears.). Demonstrated approach is applied to the strong disjunction and strong conjunction of partial (two-valued) predicates.

Follow objective is to transfer the results obtained for the Kleene's three-valued logics to the introduced algebras of partial predicates.

Д.Б.Буй, Е.В.Шишацкая, К.Д.Мухаммед, С.Фабунми

Логика частичных предикатов, индуцированные трехзначными логиками Клини

Рассматриваются операции дизъюнкции и конъюнкции частичных двузначных предикатов, индуцированные операциями дизъюнкции и конъюнкции слабой и сильной трехзначных логик Клини. При этом операции слабой дизъюнкции и слабой конъюнкции предикатов по существу вводятся в виде суперпозиции предикатов в стандартную дизъюнкцию (для слабой дизъюнкции предикатов) либо суперпозиции предикатов в стандартную конъюнкцию (для слабой конъюнкции предикатов).

Показана и уточнена связь между операциями слабой дизъюнкции (слабой конъюнкции) предикатов и операциями дизъюнкции (конъюнкции) слабой трехзначной логики Клини. Связь устанавливается с помощью моделирования двузначных частичных предикатов в виде трехзначных тотальных предикатов (появляется третье логическое значение – Unknown). Продемонстрированный подход применен к сильной дизъюнкции и сильной конъюнкции частичных (двузначных) предикатов.

Последующей задачей является перенесение результатов, полученных для трехзначных логик Клини (сильной и слабой), на введенные алгебры частичных предикатов.

Поступила в редакцию 02.09.2016