

# Динамическое уравнение для конденсата электронно-дырочных пар в системе из двух слоев графена

А.И. Безуглый

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

E-mail: bezugly@ic.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 20 августа 2009 г.

В двухслойных графеновых  $n$ - $p$  системах электронно-дырочные пары с пространственно разделенными компонентами при низких температурах переходят в сверхтекучее состояние. В работе представлен микроскопический вывод динамического уравнения для волновой функции конденсата электронно-дырочных пар в сильном перпендикулярном магнитном поле в случае малой плотности пар. На основании спектра элементарных возбуждений конденсата вычислена температура перехода в сверхтекучее состояние в широком интервале межслоевых расстояний и магнитных полей.

У двошарових графенових  $n$ - $p$  системах електронно-діркові пари із просторово розділеними компонентами при низьких температурах переходять у надплинний стан. У роботі представлено мікроскопічний висновок динамічного рівняння для хвильової функції конденсату електронно-діркових пар в сильному перпендикулярному магнітному полі у випадку малої щільності пар. На підставі спектра елементарних порушень конденсату обчислено температуру переходу в надплинний стан у широкому інтервалі міжшарових відстаней і магнітних полів.

PACS: **73.21.-b** Электронные состояния и коллективные возбуждения в многослойных структурах, квантовые ямы, мезоскопические и наномасштабные системы;  
**71.35.Ji** Экситоны в магнитном поле; магнитоэкситоны;  
**73.43.-f** Квантовые эффекты Холла.

Ключевые слова: графен, двухслойные системы, электронно-дырочные пары, сверхтекучесть.

## 1. Введение

В двухслойных  $n$ - $p$  системах, представляющих собой два тонких близко расположенных слоя с электронной ( $n$ ) и дырочной ( $p$ ) проводимостью, электрон из  $n$ -слоя и дырка из  $p$ -слоя могут образовывать связанное состояние — электронно-дырочную ( $e$ - $h$ ) пару с пространственно разделенными компонентами [1,2]. Сверхтекучесть таких пар (экситонная сверхтекучесть в двухслойных системах) должна проявлять себя в виде недиссипативного протекания по слоям равных по величине и противоположных по направлению электрических токов.

Эксперименты по поиску экситонной сверхтекучести до сих пор в основном проводились на гетероструктурах GaAs/AlGaAs с двумя квантовыми ямами [3]. Путем допирования в квантовых ямах формировались либо электронные ( $n$ - $n$  система), либо дырочные слои ( $p$ - $p$  система) [4,5]. В перпендикулярном

магнитном поле  $H$  при суммарном факторе заполнения уровней Ландау  $\nu_T = 1$  ( $\nu_T = \nu_1 + \nu_2$ ) как  $n$ - $n$ , так и  $p$ - $p$  системы эквивалентны  $n$ - $p$  системе. Причина в том, что в обеих системах при  $\nu_T = 1$  число носителей на нулевом уровне Ландау в первом слое (считаем  $\nu_1 < \nu_2$ ) равно числу свободных состояний на нулевом уровне Ландау во втором слое; спаривание этих состояний, очевидно, есть электронно-дырочное спаривание. В экспериментах на  $n$ - $n$  и  $p$ - $p$  системах было обнаружено резкое падение продольного сопротивления  $\rho_{xx}$  и холловского сопротивления  $\rho_{xy}$  в том случае, когда по слоям протекали равные по величине и противоположно направленные электрические токи и  $\nu_T \rightarrow 1$  [6–8]. Явление наблюдалось при довольно низких температурах  $T \lesssim 0,1$  К и малых межслоевых расстояниях  $d < 1,9 l_H$  (магнитная длина  $l_H = \sqrt{\hbar c / eH}$ ). Результаты экспериментов [6–8] можно объяснить переходом  $e$ - $h$  пар с пространственно разделенными компонентами в сверхтекучее состоя-

ние, поскольку в таком состоянии должно уменьшаться не только  $\rho_{xx}$ , но и  $\rho_{xy}$  (последнее — из-за электрической нейтральности  $e-h$  пар). То обстоятельство, что при конечных температурах сопротивления  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{xy}$  не обращаются в точный нуль, по-видимому, связано с движением свободных вихрей и неспаренных носителей соответственно [7,9].

Последние достижения в технологии позволили создать двухслойную систему из двух слоев графена атомной толщины [10]. С помощью затворов в каждом из графеновых слоев можно установить необходимую концентрацию и тип носителей и таким образом получить двухслойную  $n-p$  систему. Важным преимуществом графеновых  $n-p$  систем по сравнению с двухъямными гетероструктурами является возможность существенно сблизить слои и тем самым значительно увеличить критическую температуру перехода в сверхтекучее состояние  $T_c$ . Действительно, в двухъямной гетероструктуре межслоевое расстояние, равное расстоянию между серединами квантовых ям, не может быть меньше полусуммы ширин этих ям, что составляет величину порядка 10 нм, тогда как в графеновых системах расстояние между слоями может быть порядка 1 нм [10].

Экситонная сверхтекучесть в двухслойной системе на основе графена рассматривалась в ряде теоретических работ [11–20]. Оказалось, что в отсутствие магнитного поля электронно-дырочное притяжение сильно экранируется и, как следствие, критические температуры чрезвычайно низки:  $T_c \sim 1$  мК [15,19]. В сильном перпендикулярном магнитном поле температура  $T_c$  должна быть намного выше, так как дискретность спектра носителей значительно ослабляет эффекты экранирования. В настоящей работе рассмотрена графеновая  $n-p$  система в перпендикулярном магнитном поле при малой плотности  $e-h$  пар ( $\nu_1 \ll 1$ ). Мы не накладываем ограничений на величину межслоевого расстояния  $d$ , что позволяет рассмотреть область  $d < l_H$ , где критическая температура достигает максимальных значений. Заметим, что среди цитированных публикаций в [16,17] рассматривался случай малой плотности  $e-h$  пар и больших расстояний между слоями  $d \gg l_H$ , а в работе [20] проанализирован случай промежуточной плотности ( $\nu_1 \sim \nu_2 \sim 1$ ) и произвольных  $d$ .

Рассмотренная нами область параметров весьма интересна с теоретической точки зрения, так как при малой плотности  $e-h$  пары ведут себя как слабо неидеальный газ бозонов [21,22], который описывается динамическим уравнением, аналогичным уравнению Гросса–Питаевского [23–25]. (Об уравнении Гросса–Питаевского см. обзор [26].) В настоящей работе дан микроскопический вывод динамического уравнения для волновой функции конденсата  $e-h$  пар в двухслойной графеновой системе (разд. 2) и найден спектр

элементарных возбуждений конденсата (разд. 3). На основании этого спектра вычислена температура перехода в сверхтекучее состояние в широком интервале межслоевых расстояний и магнитных полей. Относительно самого динамического уравнения заметим, что оно позволяет рассматривать не только однородные, но и пространственно неоднородные задачи, такие, например, как вихревые состояния конденсата  $e-h$  пар и динамика конденсата в экситонных ловушках.

## 2. Вывод динамического уравнения

Низкоэнергетический спектр электронов в графене вблизи К-точек является линейным и изотропным:  $E(\mathbf{k}) = \pm \hbar v_F |\mathbf{k}|$  с  $v_F \approx 10^6$  м/с [27]. Это означает, что в элементарной ячейке  $\mathbf{k}$ -пространства графен имеет две долины конической формы для электронов и аналогичные две долины для дырок. Будем рассматривать  $e-h$  спаривание в двухслойной графеновой  $n-p$  системе на основе модели с одной электронной долиной в  $n$ -слое и одной дырочной долиной в  $p$ -слое, так как наиболее низкую энергию имеет когерентное состояние  $e-h$  пар, в котором носители каждого слоя заселяют только одну долину [20]. При этом мы полагаем, что спины всех носителей поляризованы магнитным полем и пренебрегаем межслоевым туннелированием. Интересно, что в том случае, когда двухслойная система служит передающей линией между источником тока и нагрузкой, учет туннелирования приводит к дополнительному механизму диссипации энергии, связанному с движением джозефсоновских вихрей [28,29].

В приближении самосогласованного поля динамическое уравнение для конденсата экситонов в объемном полупроводнике было получено в работе Л.В. Келдыша [23]. В работах [24,25] этот формализм был распространен на случай  $e-h$  пар в двухслойных системах, помещенных в сильное перпендикулярное магнитное поле. Следуя [23–25], когерентное состояние  $e-h$  пар в системе из двух слоев графена представим вектором  $|\phi\rangle = D_\phi |0\rangle$ , где  $|0\rangle$  является вакуумным состоянием системы, а унитарный оператор  $D_\phi = e^{\mathcal{A}}$ . Антиэрмитовый оператор  $\mathcal{A}$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\psi_{e\alpha}^+(\mathbf{r}_1)\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)\psi_{h\beta}^+(\mathbf{r}_2) - \text{h.c.}] = \\ &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\psi_e^+(\mathbf{r}_1)\hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)(\psi_h^+(\mathbf{r}_2))^T - \text{h.c.}], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\psi_{e\alpha}^+$  ( $\psi_{h\alpha}^+$ ) — полевые операторы рождения электронов (дырок),  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — векторы, лежащие в плоскости слоев. Греческими буквами обозначен индекс псевдоспина, который представляет состояния на А и В подрешетках графена и принимает значения  $a$  и  $b$  соответственно. По повторяющимся индексам псевдоспина подразумевается суммирование. Во второй строке равенства (1) использована удобная спинорная форма записи полевых операторов:  $\psi_{e(h)}^+(\mathbf{r}) = (\psi_{e(h)a}^+(\mathbf{r}), \psi_{e(h)b}^+(\mathbf{r}))$ ; ин-

декс  $T$  означает операцию транспонирования спинора. Входящая в (1)  $2 \times 2$ -матрица  $\hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$  описывает спаривание электронов и дырок с учетом их принадлежности подрешеткам. Введенное выше вакуумное состояние  $|0\rangle$  определяется равенствами  $\psi_{e\alpha}(\mathbf{r})|0\rangle = \psi_{h\alpha}(\mathbf{r})|0\rangle = 0$ .

Наша задача состоит в том, чтобы получить уравнение для матрицы  $\hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$  исходя из уравнения Шредингера  $i\hbar(\partial|\phi\rangle/\partial t) = \mathcal{H}|\phi\rangle$ . Последнее более удобно записать в виде

$$(i\hbar D_\phi^+ \frac{\partial}{\partial t} D_\phi - D_\phi^+ \mathcal{H} D_\phi)|0\rangle = 0. \quad (2)$$

Гамильтониан  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kin}} + \mathcal{H}_{\text{int}}$  представляет собой сумму кинетической энергии носителей и энергии их взаимодействия. Для кинетической энергии электронов и дырок имеем выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{kin}} = & v_F \int d\mathbf{r} \psi_e^+(\mathbf{r}) \hat{\sigma} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \right) \psi_e^+(\mathbf{r}) + \\ & + v_F \int d\mathbf{r} \psi_h^+(\mathbf{r}) \hat{\sigma}^T \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_h(\mathbf{r}) \right) \psi_h^+(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{A}_{e(h)}$  — векторный потенциал в электронном (дырочном) слое, а  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y)$  — вектор, компонентами которого являются матрицы Паули. (Считается, что двухслойная система параллельна плоскости  $xy$ , а магнитное поле направлено по оси  $z$ .) Гамильтониан взаимодействия включает в себя отталкивание носителей в каждом слое и межслоевое электронно-дырочное притяжение:  $\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_{ee} + \mathcal{H}_{hh} + \mathcal{H}_{eh}$ . В спинорной записи

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{k,l=e,h} \psi_k^+(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) V_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \psi_l^+(\mathbf{r}') \psi_l(\mathbf{r}'), \quad (4)$$

где энергии взаимодействия носителей

$$V_{ee}(\mathbf{r}) = V_{hh}(\mathbf{r}) = e^2 / (\epsilon r)$$

и

$$V_{eh}(\mathbf{r}) = V_{he}(\mathbf{r}) = -e^2 / (\epsilon \sqrt{r^2 + d^2}).$$

Чтобы записать  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  в приближении самосогласованного поля, каждую четверку полевых операторов нужно заменить суммой произведений пары операторов на среднее от другой пары операторов. Сумма берется по всем возможным парам средних, а сами средние должны быть вычислены в состоянии  $|\phi\rangle$ , которое учитывает электронно-дырочное спаривание. Для примера найдем одно из средних:

$$\langle \phi | \psi_{e\alpha}(\mathbf{r}) \psi_{h\beta}(\mathbf{r}') | \phi \rangle = \langle 0 | \tilde{\psi}_{e\alpha}(\mathbf{r}) \tilde{\psi}_{h\beta}(\mathbf{r}') | 0 \rangle. \quad (5)$$

Для унитарно преобразованных полевых операторов прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{e\alpha}(\mathbf{r}) &= D_\phi^+ \psi_{e\alpha}(\mathbf{r}) D_\phi = \\ &= \int d\mathbf{r}' [C_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{e\beta}(\mathbf{r}') + S_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{h\beta}^+(\mathbf{r}')], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{h\alpha}(\mathbf{r}) &= D_\phi^+ \psi_{h\alpha}(\mathbf{r}) D_\phi = \\ &= \int d\mathbf{r}' [\psi_{h\beta}(\mathbf{r}') \tilde{C}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - \psi_{e\beta}^+(\mathbf{r}') S_{\beta\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r})], \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты преобразования есть  $2 \times 2$ -матрицы:

$$\hat{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{I} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{2} (\hat{\Phi} \hat{\Phi}^+)_{\mathbf{r}\mathbf{r}'},$$

$$\hat{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{I} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{2} (\hat{\Phi}^+ \hat{\Phi})_{\mathbf{r}\mathbf{r}'},$$

$$\hat{S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\Phi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{6} (\hat{\Phi} \hat{\Phi}^+ \hat{\Phi})_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}. \quad (7)$$

Здесь  $\hat{I}$  — единичная матрица и введено обозначение свертки по координатам произведения двух матриц

$$(\hat{f} \hat{g})_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} = \int d\mathbf{r}'' \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \hat{g}(\mathbf{r}'' \mathbf{r}').$$

Для свертки трех матриц имеем

$$(\hat{f} \hat{g} \hat{h}) = ((\hat{f} \hat{g}) \hat{h}) = (\hat{f} (\hat{g} \hat{h})).$$

Поскольку нас интересует случай низкой плотности  $e-h$  пар, выражения для коэффициентов преобразования полевых операторов записаны с точностью до кубических по  $\Phi$  слагаемых. Подстановка (6) и (7) в (5) дает

$$\langle \phi | \psi_{e\alpha}(\mathbf{r}) \psi_{h\beta}(\mathbf{r}') | \phi \rangle = \int d\mathbf{r}'' C_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') S_{\gamma\beta}(\mathbf{r}'' \mathbf{r}').$$

Остальные средние вычисляются аналогичным образом.

В результате вычислений получаем, что внутрислоевое электрон-электронное взаимодействие в приближении самосогласованного поля описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{ee}^{sc} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_e^+(\mathbf{r}_1) [\hat{\phi}_{ee}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \hat{v}_{ee}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \psi_e(\mathbf{r}_2). \quad (8)$$

Здесь первое слагаемое описывает чисто кулоновское, а второе — обменное взаимодействие. Кулоновский вклад запишем в форме, применимой и для последующих выражений:

$$\hat{\phi}_{kl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \hat{I} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \int d\mathbf{r} V_{kl}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') n_l(\mathbf{r}'),$$

причем плотность электронов

$$n_e(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \text{Sp} [\hat{S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{S}^+(\mathbf{r}', \mathbf{r})].$$

Для вклада обменного взаимодействия получаем

$$\hat{v}_{ee}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \int d\mathbf{r} \hat{S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \hat{S}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2).$$

Выражение для гамильтониана дырочно-дырочного взаимодействия имеет аналогичную структуру:

$$\mathcal{H}_{hh}^{SC} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_h^+(\mathbf{r}_1) [\hat{\phi}_{hh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \hat{v}_{hh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \psi_h(\mathbf{r}_2), \quad (9)$$

где

$$\hat{v}_{hh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V_{hh}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \int d\mathbf{r} \hat{S}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \hat{S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2).$$

Входящая в  $\hat{\phi}_{hh}$  плотность дырок

$$n_h(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \text{Sp} [\hat{S}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{S}(\mathbf{r}', \mathbf{r})].$$

Для гамильтониана межслоевого взаимодействия электронов и дырок приближение самосогласованного поля дает выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eh}^{SC} = & \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\psi_e^+(\mathbf{r}_1) \hat{\phi}_{eh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_e(\mathbf{r}_2) + \psi_h^+(\mathbf{r}_1) \hat{\phi}_{he}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_h(\mathbf{r}_2)] + \\ & + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\psi_e^+(\mathbf{r}_1) \hat{v}_{eh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (\psi_h^+(\mathbf{r}_2))^T + (\psi_h(\mathbf{r}_1))^T \hat{v}_{eh}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_e(\mathbf{r}_2)], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\hat{\phi}_{he}$  и  $\hat{\phi}_{eh}$  определены выше, а

$$\hat{v}_{eh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V_{eh}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \int d\mathbf{r} \hat{S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \hat{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2).$$

Переходя к выводу динамического уравнения для  $\hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ , заметим, что в уравнение Шредингера (2) входит унитарно преобразованный гамильтониан, который в приближении самосогласованного поля имеет вид  $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}} + \tilde{\mathcal{H}}_{ee}^{SC} + \tilde{\mathcal{H}}_{hh}^{SC} + \tilde{\mathcal{H}}_{eh}^{SC}$ . Слагаемые в правой части этого выражения совпадают с (3), (8), (9) и (10), где операторы  $\psi_{k\alpha}$  ( $\psi_{k\alpha}^+$ ) заменены на  $\tilde{\psi}_{k\alpha}$  ( $\tilde{\psi}_{k\alpha}^+$ ). Воспользуемся тем, что в (2) оператор  $\tilde{\mathcal{H}}$  действует на вектор вакуумного состояния  $|0\rangle$ . Это означает, что если  $\tilde{\mathcal{H}}$  выразить через исходные полевые операторы  $\psi_{k\alpha}$  ( $\psi_{k\alpha}^+$ ), то ненулевой вклад дадут только слагаемые, содержащие произведение  $\psi_{e\alpha}^+ \psi_{h\beta}^+$ . Объединив эти слагаемые с аналогичными слагаемыми из  $D_{\hat{Q}}^+(\partial D_{\hat{Q}} / \partial t)$ , приходим к равенству  $\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_e^+(\mathbf{r}_1) \hat{Q}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) (\psi_h^+(\mathbf{r}_2))^T |0\rangle = 0$ . Это равенство выполняется, если  $\hat{Q}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = 0$ . В явном виде имеем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)}{\partial t} = & v_F \int d\mathbf{r}' \hat{C}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\sigma} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_e(\mathbf{r}') \right) \hat{S}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) + \\ & + v_F \int d\mathbf{r}' \left[ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_h(\mathbf{r}') \right) \hat{S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \right] \hat{\sigma} \hat{C}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) + \\ & + (\hat{C}[\hat{\phi}_{ee} + \hat{\phi}_{eh} + \hat{v}_{ee}] \hat{S} + \hat{S}[\hat{\phi}_{hh} + \hat{\phi}_{he} + \hat{v}_{hh}] \hat{C} + \hat{C} \hat{v}_{eh} \hat{C} - \hat{S} \hat{v}_{eh}^+ \hat{S} - \mu \hat{C} \hat{S})_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Мы выделили быстрые осцилляции  $\hat{\Phi}(t) \sim e^{-i\mu t/\hbar}$ , связанные с химическим потенциалом  $\mu$  [23]. После этого зависимость  $\hat{\Phi}$  от времени является медленной, что позволяет опустить  $\hat{\Phi}$  в кубических по  $\hat{\Phi}$  слагаемых.

В рассматриваемом случае малой плотности  $e-h$  пар уравнение (11) может быть решено методами теории возмущений. Считая  $\hat{\Phi}$  малой величиной, разложим по  $\hat{\Phi}$  слагаемые в правой части уравнения (11). В линейном приближении, которое описывает случай невзаимодействующих пар, получаем

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)}{\partial t} = & v_F \hat{\sigma} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_e(\mathbf{r}_1) \right) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + \\ & + v_F \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_h(\mathbf{r}_2) \right) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \hat{\sigma} + V_{eh}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) - \mu_0 \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  медленно меняющуюся в пространстве и времени волновую функцию конденсата  $e-h$  пар. Чтобы получить уравнение для  $\Psi(\mathbf{R}, t)$ , необходимо усреднить (12) по быстрой пространственной переменной  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , которая описывает внутренние степени свободы  $e-h$  пары. В калибровке Ландау  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, xH, 0)$  приближенное решение уравнения (12) ищем в виде

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = e^{-iXy/l_H^2} \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) \Psi(\mathbf{R}, t). \quad (13)$$

Здесь  $X$  и  $y$  — соответствующие декартовы координаты векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$ , а дифференциальный оператор  $\boldsymbol{\rho} = -il_H^2 \left[ \frac{\mathbf{H}}{H} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right]$ . Матрица  $\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r})$  — решение стационарного уравнения Шредингера для невзаимодействующих электрона и дырки:

$$v_F \hat{\sigma} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_e(\mathbf{r}_1) \right) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + v_F \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_h(\mathbf{r}_2) \right) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{\sigma} = E_{n_+ n_-}^{(0)} \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (14)$$

Решение уравнения (14) характеризуется двумя целочисленными индексами  $n_+$  и  $n_-$ , означающими, что электрон находится на  $n_+$  уровне Ландау, а дырка — на  $n_-$  уровне. Энергия такого состояния

$$E_{n_+ n_-}^{(0)} = \hbar \omega_c [\text{sign}(n_+) \sqrt{|n_+|} - \text{sign}(n_-) \sqrt{|n_-|}],$$

где циклотронная частота  $\omega_c = \sqrt{2} \hbar v_F / l_H$  [30]. Ниже мы рассмотрим два случая:  $n_+ = n_- = 0$  и  $n_+ = 1, n_- = 0$ . Для этих случаев

$$\hat{\Phi}_{00}^{(0)}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_0(r)$$

и

$$\hat{\Phi}_{10}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ix - y & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_0(r),$$

где

$$\phi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l_H} \exp\left(-\frac{r^2}{4l_H^2}\right).$$

Чтобы получить уравнение для  $\Psi(\mathbf{R}, t)$ , подставим (13) в уравнение (12). Далее умножим полученное равенство слева на  $\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r} - \rho) e^{iXy/l_H^2}$  и, взяв след от произведения матриц, проинтегрируем обе части равенства по  $\mathbf{r}$ . Вычисление интеграла

$$\int d\mathbf{r} \text{Sp} [\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r} - \rho) V_{eh}(\mathbf{r}) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r} - \rho)] \Psi(\mathbf{R}, t)$$

проводится путем разложения матриц  $\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r} - \rho)$  в ряд по степеням оператора  $\rho$ . Из-за медленности пространственных изменений функции  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  в разложении можно ограничиться квадратичными членами. В рассматриваемом интеграле слагаемые нулевого порядка по  $\rho$  дают энергию связи  $e-h$  пары,  $E_{n_+ n_-}^{(b)}$ , слагаемые первого порядка не вносят вклада, а квадратичные слагаемые дают оператор кинетической энергии  $e-h$  пары. Положив химический потенциал  $\mu^{(0)}$  равным энергии основного состояния  $e-h$  пары,  $\mu^{(0)} = E_{n_+ n_-}^{(0)} + E_{n_+ n_-}^{(b)}$ , получаем динамическое уравнение для волновой функции конденсата не взаимодействующих пар:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M_{n_+ n_-}} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \Psi(\mathbf{R}, t), \quad (15)$$

где  $M_{n_+ n_-}$  — эффективная масса пары. Для случая  $n_+ = n_- = 0$  вычисления дают

$$M_{00} = \frac{2\varepsilon \hbar^2}{e^2 l_H} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \left( 1 + \frac{d^2}{l_H^2} \right) \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{l_H} \right]^{-1}, \quad (16)$$

а в случае  $n_+ = 1, n_- = 0$  приходим к выражению

$$M_{10} = \frac{8\varepsilon \hbar^2}{e^2 l_H} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \left( 1 - \frac{2d^2}{l_H^2} - \frac{d^4}{l_H^4} \right) \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{d}{l_H} + \frac{d^3}{l_H^3} \right) \right]^{-1}. \quad (17)$$

Теперь следует учесть взаимодействие  $e-h$  пар. Для этого в разложении правой части уравнения (11) нужно удержать кубические по  $\hat{\Phi}$  члены. Учет взаимодействия дает три типа вкладов: вклад, соответствующий приближению Хартри, вклад обменного внутрислоевого и вклад обменного межслоевого взаимодействий. Первый из них имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{S} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \text{Sp} [\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] [V_{eh}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) + V_{ee}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)] \times \\ & \times \text{Sp} [\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)] |\Psi(\mathbf{R}, t)|^2 = \frac{4\pi e^2 d}{\varepsilon} |\Psi(\mathbf{R}, t)|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $S$  — площадь слоя. Обменное внутрислоевое взаимодействие дает интеграл

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{S} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 e^{[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_1) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_2)]_z} \text{Sp} [\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_2) \times \\ & \times \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) + \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \times \\ & \times V_{hh}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2)] |\Psi(\mathbf{R}, t)|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Наконец, для обменного межслоевого взаимодействия носителей имеем выражение

$$\begin{aligned} & -2\Re(1/S) \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 e^{[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_1) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_2)]_z} \text{Sp} [\hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)+}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) V_{eh}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) \times \\ & \times \hat{\Phi}_{n_+ n_-}^{(0)}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2)] |\Psi(\mathbf{R}, t)|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

В отличие от хартриевского вклада, вклады обменного взаимодействия зависят от значений  $n_+$  и  $n_-$ . Также нужно иметь в виду, что взаимодействие  $e-h$  пар приводит к сдвигу химического потенциала  $\mu_{n_+ n_-}^{(1)}$ . Можно показать, что  $\mu_{n_+ n_-}^{(1)}$  определяется интегралами (18)–(20), где  $|\Psi|^2$  заменена на среднюю плотность пар  $n_p$ . Таким образом, мы приходим к следующему нелинейному динамическому уравнению для волновой функции  $e-h$  пар:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M_{n_+ n_-}} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}^2} - \\ & - g_{n_+ n_-} [n_p - |\Psi(\mathbf{R}, t)|^2] \Psi(\mathbf{R}, t), \end{aligned} \quad (21)$$

где константа взаимодействия  $e-h$  пар связана с поправкой к химическому потенциалу соотношением  $g_{n_+ n_-} = \mu_{n_+ n_-}^{(1)} / n_p$ . В случае  $n_+ = n_- = 0$  вычисление интегралов (18)–(20) дает

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{e^2}{\varepsilon} \left[ 4\pi d - (2\pi)^{3/2} l_H + \right. \\ & \left. + (2\pi)^{3/2} l_H \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

что совпадает с результатом, полученным для двухъямных гетероструктур [24,25]. Для  $n_+ = 1, n_- = 0$  имеем

$$\begin{aligned} g_{10} &= \frac{e^2}{\varepsilon} \left\{ 4\pi d - 3\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} l_H + \right. \\ & \left. + \pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} l_H \left[ \left( 3 - \frac{d^2}{l_H^2} \right) \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{l_H} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что уравнение (21) аналогично уравнению Гросса–Питаевского для волновой функции конденсата сверхтекучей жидкости [26].

### 3. Температура перехода в сверхтекучее состояние

Из коэффициентов уравнения (21) можно составить параметр  $\xi_{n_+ n_-} = \hbar / \sqrt{2M_{n_+ n_-} g_{n_+ n_-} n_p}$ , аналогичный длине когерентности в сверхпроводниках. Для согласованности макроскопического подхода необходимо, чтобы длина  $\xi_{n_+ n_-}$  не была много меньше среднего расстояния между парами  $n_p^{-1/2}$ . Можно показать, что такое условие выполняется, если  $d \lesssim l_H$ . Заметим, что эксперименты на двухъямных структурах со своей стороны подтверждают существование когерентного состояния  $e-h$  пар, когда  $d/l_H < 1,9$  [6,8,31–33].

В однородной системе коллективные колебания конденсата описываются решениями вида  $\Psi(\mathbf{R}, t) = \sqrt{n_p} + A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega t)} + B^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega t)}$ , где коэффициенты  $A$  и  $B$  считаются малыми по сравнению с  $\sqrt{n_p}$ . Подстановка этого выражения в (21) дает систему линейных уравнений для  $A$  и  $B$ , из которой следует, что

$$\omega_{n_+ n_-}(k) = \sqrt{\left( \frac{\hbar^2 k^2}{2M_{n_+ n_-}} + 2g_{n_+ n_-} n_p \right) \frac{k^2}{2M_{n_+ n_-}}}. \quad (24)$$

Полученная формула представляет собой известный закон дисперсии слабо возбужденных состояний почти идеального бозе-газа. При малых импульсах  $k$  (и  $d \neq 0$ ) закон дисперсии является звуковым:

$$\omega_{n_+ n_-} = s_{n_+ n_-} k,$$

где скорость звука

$$s_{n_+ n_-} = \sqrt{g_{n_+ n_-} n_p / M_{n_+ n_-}}.$$

Спектр (24) удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау, и, таким образом, при скоростях  $v < s_{n_+ n_-}$  конденсат  $e-h$  пар в двухслойном графене обладает сверхтекучестью. Уменьшение межслоевого расстояния  $d$  приводит к уменьшению  $s_{n_+ n_-}$ . Если формально положить  $d = 0$ , величина  $g_{n_+ n_-} = 0$ , и спектр (24) становится квадратичным по  $k$ . Последнее, как известно, означает отсутствие сверхтекучести.

При понижении температуры двумерная система нейтральных бозонов переходит в сверхтекучее состояние, когда возникновение свободных вихрей становится энергетически невыгодным [34,35]. Критическая температура перехода определяется равенством

$$T_c = \frac{\pi \hbar^2}{2M} n_s(T_c), \quad (25)$$

где  $n_s$  — плотность сверхтекучей компоненты, а  $M$  — масса бозонов. Зависимость сверхтекучей плотности от температуры можно получить стандартным способом, вычислив температурную зависимость нормальной компоненты [36]. В области низких температур, когда в сверхтекучей жидкости в основном возбуждаются фононы, для нормальной компоненты получаем

$$n_n(T) = \frac{3\zeta(3)}{2\pi\hbar^2} \frac{T^3}{M s^4}. \quad (26)$$

Здесь  $s$  — скорость звука,  $\zeta(3) = 1,202$ . Температурная зависимость плотности сверхтекучей компоненты определяется равенством  $n_s(T) = n_p - n_n(T)$ , подстановка которого в (25) дает кубическое уравнение для  $T_c$ . Мы отмечали выше, что разреженный газ  $e-h$  пар в двухслойном графене ведет себя как слабо неидеальный газ бозонов, поэтому к нему применимы формулы (25), (26). Как следствие, для критической температуры графеновой  $n-p$  системы получаем выражение

$$T_c = \left( \frac{\pi \hbar^3 g_{n_+n_-}^2}{3\zeta(3)M_{n_+n_-}} \right)^{1/3} n_p \left[ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2^6 M_{n_+n_-}^2 g_{n_+n_-}^2}{3^4 \zeta(3) \pi^2 \hbar^4}} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2^6 M_{n_+n_-}^2 g_{n_+n_-}^2}{3^4 \zeta(3) \pi^2 \hbar^4}} \right)^{1/3} \right]. \quad (27)$$

Зависимость критической температуры  $T_c$  от магнитного поля  $H$  и межслоевого расстояния  $d$  представлена на рис. 1. Легко увидеть, что наиболее высокие температуры  $T_c$  достигаются при межслоевых расстояниях  $d \approx 2-3$  нм, которые существенно меньше межслоевых расстояний в двухъямных гетероструктурах. В этой области критическая температура составляет несколько градусов и при фиксированном факторе заполнения увеличивается с ростом магнитного поля. В реальных графеновых системах критические температуры могут быть ниже вследствие рассеяния  $e-h$  пар на заряженных дефектах [37,38].

На рис. 1 видно, что в наиболее важной области высоких  $T_c$  выполняется условие  $d < l_H$  и, таким образом, эта область корректно описывается в рамках развитого подхода. Сравнение случаев  $n_+ = n_- = 0$  и  $n_+ = 1, n_- = 0$  показывает, что более высокие темпе-

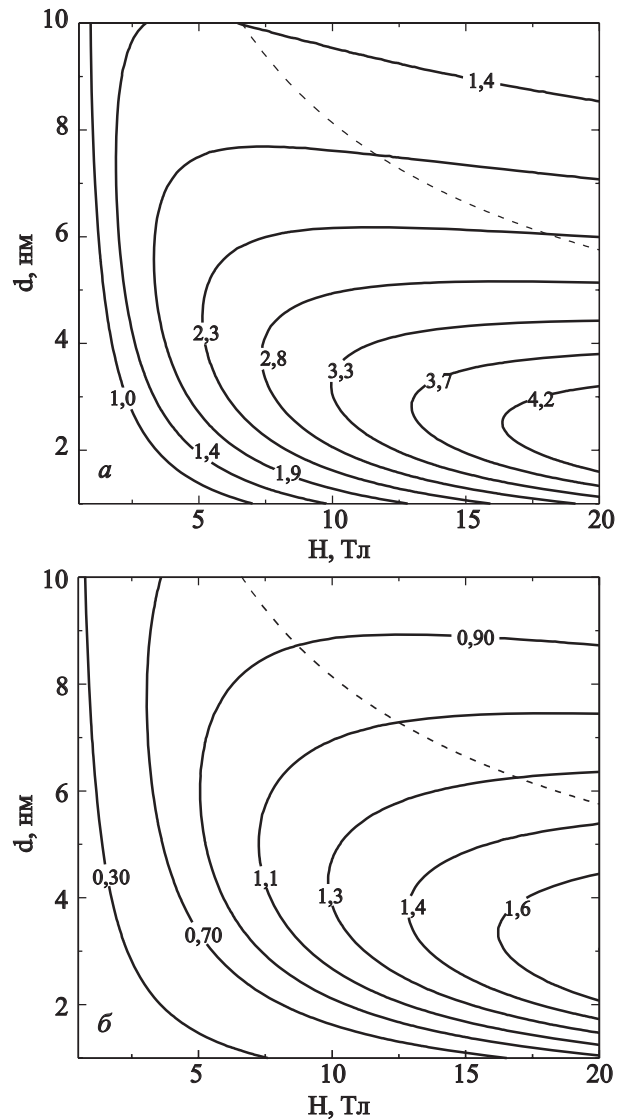


Рис. 1. Значения температуры перехода в сверхтекучее состояние  $T_c$  (в градусах Кельвина) на плоскости  $H-d$  для случаев  $n_+ = n_- = 0$  (а) и  $n_+ = 1$  и  $n_- = 0$  (б). Вычисления критической температуры  $T_c$  проведены при фиксированном факторе заполнения  $\nu_l = 0,1$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon = 4,5$ . Область применимости развитого подхода находится левее и ниже штриховой линии, заданной равенством  $d = l_H$ .

ратуры  $T_c$  достигаются в первом случае (из-за более сильного взаимодействия  $e-h$  пар,  $g_{00} > g_{10}$ ).

#### 4. Заключение

Полученное в разд. 2 динамическое уравнение для волновой функции конденсата  $e-h$  пар в двухслойной графеновой  $n-p$  системе, помещенной в сильное перпендикулярное магнитное поле, имеет тот же вид, что и уравнение для  $e-h$  пар в двухъямной гетероструктуре. Вследствие этого на графеновые  $n-p$  системы могут быть перенесены результаты, установленные

ранее для  $n-n$  и  $p-p$  систем [24,25]. В частности, в графеновых  $n-p$  системах должны существовать квантованные вихри, несущие электрический заряд. Кроме того, вариации межслоевого расстояния (как и неоднородность перпендикулярного слоям электрического поля) могут приводить к возникновению экситонных ловушек, которые способны накапливать  $e-h$  пары. Рост плотности пар  $n_p$  в экситонных ловушках, согласно (27), увеличивает температуру перехода  $T_c$ , что облегчает экспериментальное наблюдение сверхтекучего состояния в двухслойном графене.

Автор выражает благодарность С.И. Шевченко за интерес к работе и многочисленные обсуждения, автор также благодарен Д.В. Филю за обсуждение работы.

1. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
2. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 251 (1976)].
3. J.P. Eisenstein and A.H. MacDonald, *Nature* **432**, 691 (2004).
4. J.P. Eisenstein, in: *Perspectives in Quantum Hall Effects*, S. Das Sarma and A. Pinczuk (eds.), Wiley, New York (1997).
5. E. Tutuc and M. Shayegan, *Solid State Commun.* **144**, 405 (2007).
6. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036801 (2004).
7. E. Tutuc, M. Shayegan, and D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036802 (2004).
8. R.D. Wiersma, J.G.S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H.-P. Tranitz, and W. Wegscheider, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 266805 (2004).
9. D.A. Huse, *Phys. Rev.* **B72**, 064514 (2005).
10. H. Schmidt, T. Luedtke, P. Barthold, E. McCann, V.I. Fal'ko, and R.J. Haug, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 172108 (2008).
11. H. Min, R. Bistritzer, J.-J. Su, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B78**, 121401 (2008).
12. C.-H. Zhang and Y.N. Joglekar, *Phys. Rev.* **B77**, 233405 (2008).
13. N.B. Kopnin and E.B. Sonin, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 246808 (2008).
14. Ю.Е. Лозовик, А.А. Соколик, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 61 (2008).
15. M.Yu. Kharitonov and K.B. Efetov, *Phys. Rev.* **B78**, 241401 (2008).
16. O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, and G. Gumbs, *Phys. Rev.* **B77**, 155433 (2008).
17. Ю.Е. Лозовик, С.П. Меркулова, А.А. Соколик, *УФН* **178**, 757 (2008).
18. Z.G. Koinov, *Phys. Rev.* **B79**, 073709 (2009).
19. M.Yu. Kharitonov and K.B. Efetov, *arXiv:0903.4445* (2009).
20. D.V. Fil and L.Yu. Kravchenko, *arXiv:0906.2661* (2009).
21. Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968).
22. Kun Yang, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 056802 (2001).
23. Л.В. Келдыш, в сб.: *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1972), с. 433.
24. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B75**, 075322 (2007).
25. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **35**, 479 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 373 (2009)].
26. F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 463 (1999).
27. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M. Peres, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
28. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 215701 (2009).
29. J.-J. Su and A.H. MacDonald, *Nature Physics* **4**, 799 (2008).
30. A. Iyengar, Jianhui Wang, H.A. Fertig, and L. Brey, *Phys. Rev.* **B75**, 125430 (2007).
31. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5808 (2000).
32. I.B. Spielman, M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev.* **B70**, 081303(R) (2004).
33. A.R. Champagne, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 096801 (2008).
34. В.Л. Березинский, *ЖЭТФ* **61**, 1144 (1971).
35. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973).
36. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика. Теория конденсированного состояния*, Наука, Москва (1978).
37. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **3**, 428 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 204 (1977)].
38. R. Bistritzer and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 256406 (2008).

### Dynamic equation for condensate of electron-hole pairs in a two-layer graphene system

A.I. Bezuglyj

In two-layer graphene systems the electron-hole pairs with spatially separated components make a transition to a superfluid state at low temperatures. A microscopic derivation of the dynamic equation for condensate wave function of electron-hole pairs is presented. On the basis of the spectrum of elementary excitations the superfluid transition temperature is calculated for a wide range of interlayer distances and magnetic fields.

PACS: **73.21.-b** Electron states and collective excitations in multilayers, quantum wells, mesoscopic, and nanoscale systems;  
**71.35.Ji** Excitons in magnetic field; magnetoexcitons;  
**73.43.-f** Quantum Hole effects.

Keywords: graphene, two-layer systems, electron-hole pairs, superfluidity.