

Гистерезисные скачки поверхностного реактанса слоистого сверхпроводника при изменении амплитуды падающей волны

С.С. Апостолов¹, Д.В. Кадыгроб¹, З.А. Майзелис¹, С.Е. Савельев^{2,3},
Т.М. Слипченко¹, В.А. Ямпольский^{1,2}

¹*Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
ул. Академика Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: yam@ire.kharkov.ua*

²*Advanced Science Institute, The Institute of Physical and
Chemical Research (RIKEN), Wako-shi, Saitama 351-0198, Japan*

³*Department of Physics, Loughborough University, Loughborough LE11 3TU, UK*

Статья поступила в редакцию 14 мая 2009 г.

Теоретически исследован нелинейный отклик слоистого сверхпроводника на симметричное (по магнитному полю) электромагнитное возбуждение. Предсказана неоднозначная зависимость фазы отраженного сигнала от амплитуды H_0 облучающей волны. В результате возникают гистерезисные скачки в зависимости поверхностного реактанса сверхпроводника от H_0 . Если частота облучающего поля близка к джозефсоновской плазменной частоте, то этот необычный нелинейный эффект может наблюдаться при не очень сильных амплитудах переменного поля. Получены условия возникновения гистерезиса. Выражения для сдвига фазы отраженной волны выведены с использованием связанных синусоидальных уравнений Гордона. Кроме того, изучен класс разрывных по координате решений этих уравнений, которым соответствует непрерывное пространственное распределение магнитного поля в сверхпроводнике. Такие решения приводят к возникновению дополнительных ветвей в зависимости сдвига фазы отраженной волны от амплитуды падающей волны.

Теоретично досліджено нелінійний відгук шаруватого надпровідника на симетричне (по магнітному полю) електромагнітне порушення. Передвищено неоднозначну залежність фази відбитого сигналу від амплітуди H_0 хвилі, що опромінює. У результаті виникають гістерезисні перегони в залежності поверхневого реактансу надпровідника від H_0 . Якщо частота поля, що опромінює, близька до джозефсонівської плазмової частоти, то цей незвичайний нелінійний ефект може спостерігатися при не дуже сильних амплітудах змінного поля. Отримано умови виникнення гістерезису. Вираз для зсуву фази відбитої хвилі виведено з використанням зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона. Крім того, вивчено клас розривних по координаті рішень цих рівнянь, яким відповідає безперервний просторовий розподіл магнітного поля в надпровіднику. Такі рішення призводять до виникнення додаткових гілок у залежності зсуву фази відбитої хвилі від амплітуди падаючої хвилі.

PACS: 74.78.Fk Мультислои, сверхрешетки, гетероструктуры;
74.50.+r Туннельные явления, эффекты Джозефсона.

Ключевые слова: слоистый сверхпроводник, джозефсоновская плазменная частота, сдвиг фазы отраженной волны.

1. Введение

В последнее время внимание многих исследователей обращено к электромагнитным волнам, распространяющимся в искусственно создаваемых материалах

[1–3], к которым можно отнести металлы с модулированными свойствами [4], массивы связанных волноводов [5], «леворукие» среды [6–8] и слоистые сверхпроводники [9]. Возбуждение таких волн приводит к различным резонансным аномалиям [10] в ко-

эффицентах отражения и прохождения электромагнитных волн, что позволяет создавать новые типы оптических наноструктур. Возросший интерес к такого рода исследованиям связан также со специфическими нелинейными свойствами возбуждаемых поверхностных и волноводных электромагнитных структур [1,5].

На наш взгляд, особый интерес вызывают нетривиальные нелинейные явления, *присущие только определенному типу нелинейности*. Такие явления оказываются весьма оригинальными, поскольку они могут наблюдаться только в определенных средах. В качестве примеров укажем на эффекты магнитодинамической нелинейности в металлах [11,12,13,14], связанные с воздействием магнитного поля волны на электронные траектории, а также на коллапс магнитного момента (или транспортного тока) в жестких сверхпроводниках [15], происходящий за счет нелинейности критического состояния вихревой системы.

Среди нелинейных объектов особое место занимают слоистые сверхпроводники, в которых нелинейность связана с нелинейной джозефсоновской связью между нормальной по отношению к слоям плотностью тока и межслойной градиентно-инвариантной разностью фаз параметра порядка. Известно, что слоистые сверхпроводники допускают распространение нелинейных [16–18] и поверхностных [9] волн в важных для приложений [19,20] терагерцовом и суб-терагерцовом частотных диапазонах. Возможность распространения поверхностных волн, равно как и нелинейные эффекты, обусловлены щелевой структурой [21] спектра джозефсоновских плазменных волн (ДПВ), что было экспериментально подтверждено наблюдением джозефсоновского плазменного резонанса [22]. Весьма любопытно то, что нелинейные эффекты в распространении ДПВ с частотой ω , близкой к джозефсоновской плазменной частоте ω_J , оказываются существенными даже при сравнительно малых амплитудах поля $\propto |1 - \omega^2 / \omega_J^2|^{1/2}$. Аналогично нелинейной оптике [23], нелинейные ДПВ проявляют ряд интересных свойств [16–18], включая остановку света, самофокусировку и перекачку энергии от высоко-амплитудных к низко-амплитудным волнам. Вместе с тем, нелинейность волн в слоистых сверхпроводниках имеет и существенные отличия от нелинейности в оптике, что позволяет ожидать необычные явления при распространении электромагнитных волн.

В настоящей работе теоретически исследовано новое, специфическое именно для слоистых сверхпроводников, нелинейное явление, возникающее при облучении сверхпроводящей пластины электромагнитной волной сравнительно небольшой амплитуды. Показано, что при определенных условиях зависимость сдвига фазы χ отраженной волны от амплитуды падающей волны H_0 становится многозначной. Это, в свою очередь, приводит к гистерезисным скачкам фазы χ при увеличении и/или уменьшении амплитуды падающей волны, которые не наблюдаются в других

нелинейных средах. Кроме того, в случае достаточно толстых пластин необходимо учитывать решения нелинейной системы уравнений со скачками в координатной зависимости градиентно-инвариантной фазы параметра порядка (но при соблюдении непрерывности пространственного распределения магнитного поля в образце). Настоящая работа является логическим продолжением статьи [24], в которой гистерезис функции $\chi(H_0)$ исследован только для случая предельно тонких сверхпроводящих пластин.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе описывается геометрия задачи и приводятся основные уравнения, определяющие электромагнитные поля в вакууме и сверхпроводнике. В следующем, основном, разделе исследуется зависимость сдвига фазы электромагнитной волны, отраженной от границы образца, от амплитуды возбуждающего поля в предельных случаях тонких и толстых пластин, и обсуждается дополнительный класс волновых решений, позволяющий находить зависимость $\chi(H_0)$ в области амплитуд, где непрерывных решений нет.

2. Постановка задачи

2.1. Геометрия задачи

Рассмотрим пластину слоистого сверхпроводника толщиной D (см. рис. 1) с кристаллографической плоскостью \mathbf{ab} , совпадающей с плоскостью xy , и осью c , направленной вдоль оси z . Межслойное расстояние d считается малым по сравнению с толщиной пластины D .

Пусть образец облучается с обеих сторон p -поляризованными плоскими монохроматическими электромагнитными волнами с симметричным относительно

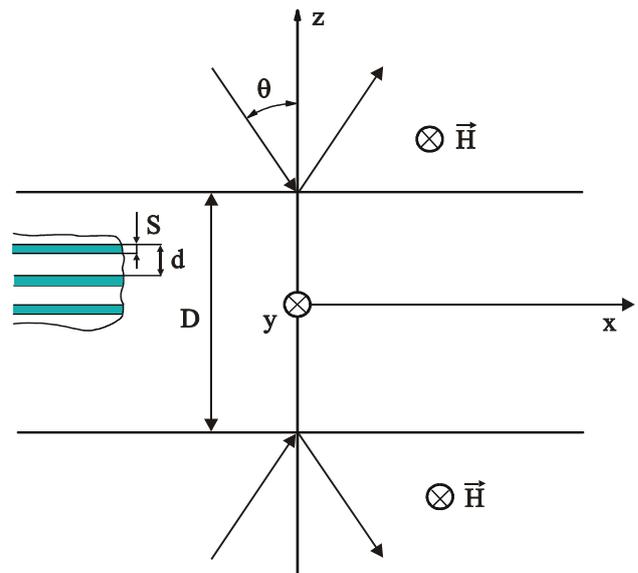


Рис. 1. Геометрия задачи. Пластина слоистого сверхпроводника, облученная p -поляризованными электромагнитными волнами с симметричным относительно середины образца магнитным полем.

середины образца (плоскости $z = 0$) магнитным полем. Таким образом, магнитное $\mathbf{H} = \{0, H, 0\}$ и электрическое $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$ поля удовлетворяют следующим условиям симметрии,

$$H(x, z, t) = H(x, -z, t), \quad (1)$$

$$E_x(x, z, t) = -E_x(x, -z, t), \quad E_z(x, z, t) = E_z(x, -z, t).$$

Эти уравнения дают нам возможность в дальнейшем рассматривать поле лишь в верхнем полупространстве $z > 0$.

2.2. Уравнения для электромагнитного поля в вакууме и слоистом сверхпроводнике

Электромагнитное поле в вакууме, $z > D/2$, представляет собой сумму падающей и зеркально отраженной волн. С помощью уравнений Максвелла, получаем

$$\begin{aligned} H^V(x, z, t) &= H_0 \cos \gamma_- + H_r \cos(\gamma_+ + \chi), \\ E_x^V(x, z, t) &= -\frac{k_z}{k} (H_0 \sin \gamma_- - H_r \sin(\gamma_+ + \chi)), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\gamma_- = k_x x - k_z z - \omega t, \quad \gamma_+ = k_x x + k_z z - k_z D - \omega t,$$

где $k_x = k \sin \theta$, $k_z = k \cos \theta$, $k = \omega / c$, ω — частота волны, c — скорость света и θ — угол падения волны. Величина χ представляет собой сдвиг фазы отраженной волны на границе образца $z = D/2$. Как известно, χ определяет поверхностный реактанс X образца. Пренебрегая диссипацией энергии, имеем

$$X = \frac{4\pi}{c} \operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \cos \theta.$$

В сверхпроводнике электромагнитное поле определяется градиентно-инвариантной фазой параметра порядка φ . Пространственное распределение $\varphi(x, z, t)$ подчиняется системе связанных синусоидальных уравнений Гордона. Насколько нам известно, Сакаи и др. [25,26] первыми получили связанные синусоидальные уравнения Гордона для описания электродинамики слоистых сверхпроводников. Позже многие авторы выводили их с использованием различных подходов [27,28]. Например, в работе [28] использована микроскопическая теория, основанная на формализме функционального интегрирования БКШ. Хотя эти уравнения не учитывают многие факторы (например, d -волновое спаривание), они дают не только качественно правильное описание ДПВ в слоистом сверхпроводнике, но и позволяют делать важные предсказания. В работе [29] на основе связанных синусоидальных уравнений Гордона был предложен способ получения когерентного излучения терагерцевых джозефсоновских плазменных волн, который позже был реализован в эксперименте [30].

Рассмотрим нелинейные ДПВ с $|\varphi| \ll 1$, когда плотность джозефсоновского тока $J_c \sin \varphi$ можно представить в виде $J_c (\varphi - \varphi^3 / 6)$. Мы также считаем, что фаза параметра порядка претерпевает малое изменение на расстояниях порядка d вдоль оси z , что позволяет перейти к континуальному пределу. В этом пределе связанные синусоидальные уравнения Гордона сводятся к

$$\left(1 - \lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Здесь λ_{ab} и $\lambda_c = c / (\omega_J \epsilon^{1/2})$ — лондоновские глубины проникновения магнитного поля поперек и вдоль слоев соответственно; $\omega_J = (8\pi e d J_c / \hbar \epsilon)^{1/2}$ — джозефсоновская плазменная частота, определяемая максимальным джозефсоновским током J_c , диэлектрической проницаемостью ϵ в промежутках между сверхпроводящими слоями, а также межслойным расстоянием d ; e — элементарный заряд. При получении уравнений (3) пренебрегается пространственным изменением электрического поля E_x в направлении оси z внутри тонких ($s \ll d$) сверхпроводящих слоев.

Магнитное и электрическое поля в сверхпроводнике связаны с фазой параметра порядка соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^S}{\partial x} &= \frac{\mathcal{H}_0}{\lambda_c} \left(\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right), \\ E_x^S &= -\frac{\lambda_{ab}^2}{c} \frac{\partial^2 H^S}{\partial z \partial t}, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi D \lambda_c}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Phi_0 = \pi \hbar^2 / e$ — квант магнитного потока.

Заметим, что компонента E_z электрического поля вызывает нарушение электронейтральности сверхпроводящих слоев, что приводит к возникновению дополнительной связи электромагнитных полей между соседними слоями (к так называемой емкостной связи). Эта связь существенно влияет на свойства продольных ДПВ с волновым вектором, направленным перпендикулярно слоям. В работе [31] было получено дисперсионное уравнение линейных ДПВ с произвольным направлением волнового вектора и с учетом емкостной связи. Из этого уравнения следует, что емкостная связь несущественна для рассматриваемых в данной работе волн с $k_x = k \sin \theta \sim \omega / c \gg \beta / \lambda_c$. Здесь $\beta = R_D^2 \epsilon / s d \ll 1$ представляет собой параметр емкостной связи [32], R_D — дебаевский радиус для зарядов в сверхпроводнике.

Как было показано в работе [18], нелинейность уравнения (3) может играть важную роль в распространении волн с частотами, близкими к ω_J ,

$$|1 - \Omega^2| \equiv |1 - \omega^2 / \omega_J^2| \ll 1.$$

Действительно, если $\varphi \sim |1 - \Omega^2|^{1/2} \ll 1$, кубическое слагаемое φ^3 в уравнении (3) становится одного порядка с линейным слагаемым $(\omega_J^{-2} \partial^2 \varphi / \partial t^2 + \varphi)$.

Мы рассматриваем диапазон частот ниже джоозефовской плазменной, $\Omega < 1$, и ищем решения уравнения (3) в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= a(z)(1 - \Omega^2)^{1/2} \sin(\gamma_0 + \alpha), \\ \gamma_0 &= k_x x - k_z D / 2 - \omega t, \end{aligned} \quad (5)$$

удерживая лишь первую гармонику по γ_0 .

Подставляя φ из (5) в (4), получаем

$$H^S(x, \zeta, t) = -\mathcal{H}_0 \frac{1 - \Omega^2}{\kappa} h(\zeta) \cos(\gamma_0 + \alpha), \quad (6)$$

$$E_x^S(x, \zeta, t) = \mathcal{H}_0 \frac{1 - \Omega^2}{\kappa} Ph'(\zeta) \sin(\gamma_0 + \alpha).$$

Здесь введены безразмерные величины согласно соотношениям

$$h(\zeta) = a(\zeta) - \frac{a^3(\zeta)}{8}, \quad \zeta = \frac{\kappa z}{\lambda_{ab}}, \quad (7)$$

и параметры

$$P = \frac{\lambda_{ab} \kappa}{\lambda_c \sqrt{\varepsilon}}, \quad \kappa = \frac{\lambda_c k_x}{(1 - \Omega^2)^{1/2}}, \quad (8)$$

штрихом обозначена производная $d/d\zeta$.

Уравнения (3) и (5) приводят к однородному дифференциальному уравнению второго порядка для $a(z)$:

$$\left[1 - \kappa^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \left(a - \frac{a^3}{8} \right) + \kappa^2 a = 0. \quad (9)$$

Далее мы считаем параметр κ достаточно большим, $\kappa \gg 1$, что справедливо для не слишком малых углов падения θ . В этом случае интегрирование уравнения (9) вместе с условием симметрии,

$$a'(0) = 0, \quad (10)$$

приводит к

$$\frac{3}{4} (a')^2 = \left(\frac{8 - 3a_0^2}{8 - 3a^2} \right)^2 - 1, \quad (11)$$

где $a_0 = a(0)$. Решение (11) может быть записано в неявной форме:

$$\zeta = \left| \sqrt{\frac{3}{4}} \int_{a_0}^{a(\zeta)} da \frac{8 - 3a^2}{\sqrt{(8 - 3a_0^2)^2 - (8 - 3a^2)^2}} \right|. \quad (12)$$

Фазовый портрет, т.е. набор кривых $a'(a)$ для различных значений константы a_0 , показан на рис. 2. Закрашенные точки отмечают границы образца. Стрелки

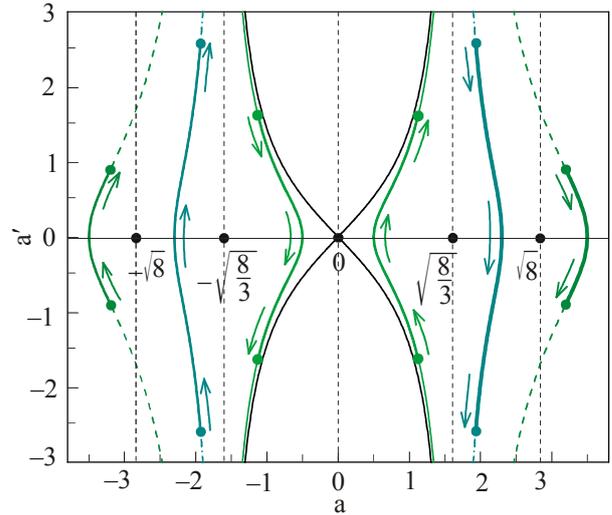


Рис. 2. Фазовый портрет $a'(a)$. Величина a представляет собой амплитуду волнового решения (5) для фазы φ , a' — ее производная по безразмерной координате $\zeta = \kappa z / \lambda_{ab}$. На фазовом портрете изображены только те траектории, которые соответствуют симметричному относительно середины образца распределению магнитного поля. Движение вдоль сплошных жирных линий по фазовым траекториям соответствует изменению координаты z внутри образца. Точками отмечены границы образца $z = \pm D / 2$, направление движения указано стрелками.

показывают направления движения вдоль фазовых траекторий при увеличении координаты z .

Таким образом, электромагнитные поля в вакууме и сверхпроводнике определяются уравнениями (2) и (6) с использованием функции $a(\zeta)$, которая задается дифференциальным уравнением (11) с граничным условием $a(0) = a_0$.

3. Сдвиг фазы отраженной волны

В данном разделе найдена зависимость сдвига фазы χ отраженной волны от возбуждающей амплитуды H_0 . С этой целью мы сшиваем тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей в вакууме и сверхпроводящей пластине на границе $z = D / 2$. Приравнявая коэффициенты отдельно при $\sin(k_x x - \omega t)$ и при $\cos(k_x x - \omega t)$, получаем четыре уравнения для H_r , $H(D/2)$, χ и α :

$$\begin{aligned} -h_0 + h_r \cos \chi &= Ph'(\delta) \sin \alpha, \\ -h_0 - h_r \cos \chi &= h(\delta) \cos \alpha, \\ -h_r \sin \chi &= Ph'(\delta) \cos \alpha, \\ -h_r \sin \chi &= h(\delta) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$h_0 = \frac{H_0}{\mathcal{H}_0} \frac{\kappa}{(1 - \Omega^2)}, \quad h_r = \frac{H_r}{\mathcal{H}_0} \frac{\kappa}{(1 - \Omega^2)};$$

$\delta = \kappa D / 2 \lambda_{ab}$ — значение ζ на границе $z = D / 2$. Отметим, что без ограничения общности можно считать

величину $h(\delta)$ суммарного магнитного поля на поверхности образца положительной, $h(\delta) > 0$. Отрицательным $h(\delta)$ соответствует замена $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$ в (13).

Исключая h_r и α из (13), получаем

$$h_0 = \frac{1}{2} \sqrt{h^2(\delta) + (Ph'(\delta))^2}, \quad (14)$$

$$\chi = 2 \arctg \left(\frac{Ph'(\delta)}{h(\delta)} \right). \quad (15)$$

Уравнения (14), (15), а также (7) и (12) дают в неявной форме искомую зависимость сдвига фазы χ от амплитуды падающей волны h_0 .

Для дальнейшего анализа амплитудной зависимости сдвига фазы χ важно учесть неоднозначность связи между величинами $h(\delta)$ и $a(\delta)$. Действительно, уравнение (7) и рис. 3 свидетельствуют о существовании *трех значений* a , соответствующих *одному и тому же* значению h , если $0 < h < (32/27)^{1/2}$. Принимая во внимание уравнение (14), заключаем, что три различных значения параметра $h'(\delta)/h(\delta)$ в (15) соответствуют одному и тому же h_0 . Все это приводит к тому, что зависимость $\chi(h_0)$ имеет *три ветви*.

Дальнейший анализ функции $\chi(h_0)$ удобно проводить, рассматривая отдельно случаи тонких и толстых образцов.

3.1. Тонкие образцы, $\delta \ll 1$

Начнем исследование зависимости $\chi(h_0)$ со случая предельно малых толщин образца,

$$\delta \ll 1. \quad (16)$$

Тогда $|a(\zeta) - a_0| \ll 1$, уравнение (12) существенно упрощается, и его решение можно записать в явном виде:

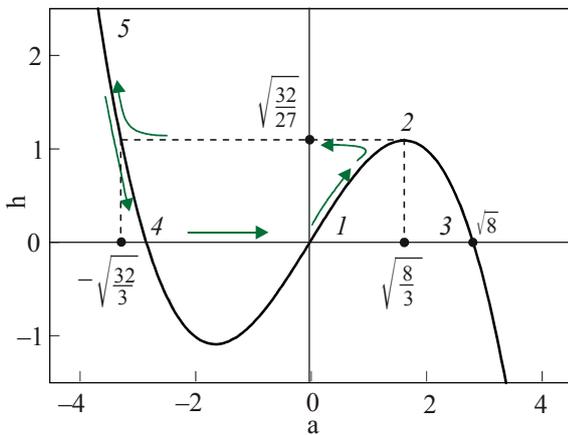


Рис. 3. Зависимость нормированного суммарного магнитного поля h на границе образца от амплитуды a , описываемая кубической параболой (7). Стрелки обозначают движение вдоль кривой $h(a)$ при изменении амплитуды падающей волны h_0 .

$$a(\zeta) \simeq a_0 \left(1 + \frac{4\zeta^2}{8 - 3a_0^2} \right). \quad (17)$$

В этом случае нетрудно найти все три ветви искомой зависимости $\chi(h_0)$.

Низко-амплитудная ветвь ($a < \sqrt{8/3}$). Обсудим сначала ветвь зависимости $\chi(h_0)$, соответствующую участку 1–2 кривой $h(a)$ на рис. 3. Эта монотонно возрастающая ветвь показана сплошной кривой на главной панели и на нижней вставке рис. 4. Низко-амплитудная ветвь определена на интервале $(0, h_{0\text{cr}})$ изменения h_0 . Конечная точка $h_{0\text{cr}}$ этой ветви задается равенством

$$h_{0\text{cr}} \simeq \sqrt{\frac{8}{27}} + \sqrt{\frac{3}{8}} P^2 \delta^2. \quad (18)$$

При этом

$$\chi(h_{0\text{cr}}) \simeq 3P\delta - \sqrt{\frac{9}{8}} P\delta^2. \quad (19)$$

При малых h_0 асимптотика зависимости $\chi(h_0)$ имеет вид

$$\chi \simeq 2P\delta \left(1 + \frac{h_0^2}{2} \right), \quad h_0 \ll 1. \quad (20)$$

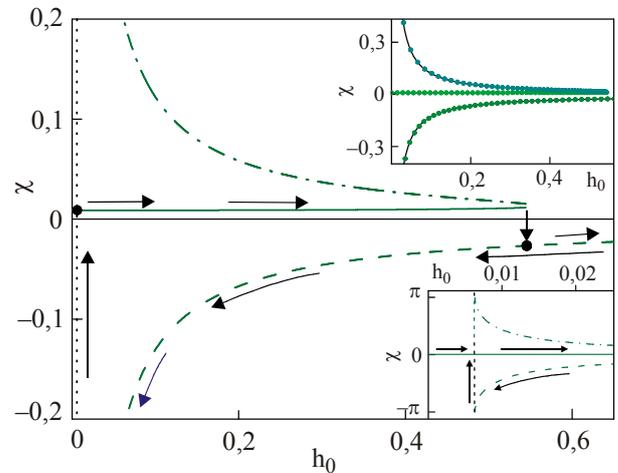


Рис. 4. Главная панель: зависимость сдвига фазы χ отраженной волны от безразмерной амплитуды h_0 падающей волны (численная симуляция). Значения параметров: $D/\lambda_{ab} = 0,05$, $\lambda_c/\lambda_{ab} = 200$, $\kappa = 10$, и $\varepsilon = 16$. Стрелки вдоль кривых показывают, каким образом сдвиг фазы χ меняется при периодическом изменении амплитуды h_0 . Первый скачок в зависимости $\chi(h_0)$ при $h_0 = h_{0\text{cr}}$ показан стрелкой вниз. Величина скачка равна $\Delta\chi \approx -9P\delta$. Второй (обратный) скачок при $h_0 = h_0^{\text{min}}$ показан стрелкой вверх. Величина скачка $\Delta\chi \approx \pi$. Нижняя вставка: зависимость $\chi(h_0)$ в измененном масштабе. Верхняя вставка: Сравнение численных и аналитических результатов для зависимости $\chi(h_0)$. Точки соответствуют численной симуляции, сплошная линия — зависимости, неявно заданной уравнениями (25).

Высоко-амплитудные ветви ($|a| > \sqrt{8/3}$). Вторая и третья ветви зависимости $\chi(h_0)$ соответствуют участкам 2–3 и 4–5 кривой $h(a)$ на рис. 3. Они показаны на рис. 4 штрих-пунктирной и пунктирной кривыми соответственно. Вторая ветвь определена на интервале

$$h_0^{\min} < h_0 < h_{0\text{cr}}, \quad h_0^{\min} \simeq \sqrt{2}P\delta. \quad (21)$$

Как видно на рис. 4, первая и вторая ветви $\chi(h_0)$ практически касаются друг друга в точке $h_{0\text{cr}}$. Третья ветвь определена при

$$h_0^{\min} < h_0 < \infty. \quad (22)$$

Вблизи минимального значения h_0 , при $h_0 \sim h_0^{\min}$, вторая и третья ветви описываются асимптотиками

$$\chi(h_0) = \pm \left(\pi - \sqrt{\frac{2h_0^2}{\delta^2} - 4P^2} \right). \quad (23)$$

Здесь знаки «+» и «-» соответствуют второй и третьей ветвям.

Третья ветвь стремится к нулю при $h_0 \rightarrow \infty$ согласно асимптотике

$$\chi(h_0) = -P\delta \left(\frac{4}{h_0} \right)^{2/3}, \quad h_0 \gg 1. \quad (24)$$

Далее мы приводим формулу, описывающую в неявной форме все три ветви зависимости $\chi(h_0)$ при h_0 , не слишком близких к $h_{0\text{cr}}$ и к h_0^{\min} :

$$h_0(a_0) = \frac{|a_0| |8 - a_0^2|}{16}, \quad (25)$$

$$\chi(a_0) = \frac{16P}{8 - a_0^2} \delta. \quad (26)$$

Здесь параметр a_0 должен удовлетворять неравенствам $|a_0^2 - 8| \gg \delta$ и $|a_0^2 - 8/3| \gg \delta$. Верхняя вставка на рис. 4 демонстрирует очень хорошее согласие между этой формулой и зависимостью, полученной численным счетом.

Гистерезисные скачки сдвига фазы отраженной волны. С учетом всего сказанного, можно теперь описать поведение сдвига фазы χ отраженной волны при периодическом изменении амплитуды h_0 падающей волны.

При увеличении h_0 от нулевого значения сдвиг фазы $\chi(h_0)$ монотонно растет по первой ветви на рис. 4. При достижении $h_0 = h_{0\text{cr}}$ первая ветвь заканчивается, что с неизбежностью приводит к скачку на третью ветвь при дальнейшем увеличении h_0 . При этом сдвиг фазы претерпевает скачок с $\chi(h_{0\text{cr}} - 0) \simeq 3P\delta$ до $\chi(h_{0\text{cr}} + 0) \simeq -6P\delta$. Таким образом, величина скачка при этом составляет

$$\Delta\chi|_{h_0=h_{0\text{cr}}} \simeq -9P\delta. \quad (27)$$

При уменьшении h_0 сдвиг фазы $\chi(h_0)$ убывает по третьей ветви, проходит точку $h_0 = h_{0\text{cr}}$, и лишь в точке $h_0 = h_0^{\min}$ происходит скачок обратно на первую ветвь. При этом

$$\Delta\chi|_{h_0=h_0^{\min}} \simeq \pi. \quad (28)$$

Таким образом, гистерезисные скачки $\Delta\chi$ зависимости $\chi(h_0)$ могут наблюдаться при периодическом изменении амплитуды h_0 падающей волны.

3.2. Толстые образцы, $\delta \gg 1$

Теперь перейдем к анализу случая толстых пластин,

$$\delta \gg 1. \quad (29)$$

Мы покажем, что для таких образцов зависимость $\chi(h_0)$ видоизменяются настолько, что возникает «щель» по h_0 между низко-амплитудной и высоко-амплитудными ветвями.

Поскольку в случае (29) диапазон изменения координаты ζ оказывается большим, то a_0 может принимать либо малые (для низко-амплитудных решений), либо большие (для высоко-амплитудных решений) значения. Ниже мы изучим обе эти возможности. В реальных слоистых сверхпроводниках параметр P , задаваемый уравнением (8), мал. Поэтому для упрощения аналитических выражений в этом подразделе предположили

$$P \ll 1.$$

Низко-амплитудная ветвь $\chi(h_0)$. Начнем с ветви, соответствующей участку «1–2» кривой $h(a)$ на рис. 3. Пусть h_0 настолько мало, что решение $a(\zeta) \ll 1$ для всех ζ . Тогда можно решить уравнение (11) асимптотически,

$$a(\zeta) \simeq a_0 \operatorname{ch} \zeta, \quad a_0 = 2h_0 / \operatorname{ch} \delta. \quad (30)$$

При малых h_0 сдвиг фаз, определяемый уравнением (15), может быть записан в виде

$$\chi(h_0) \simeq 2P(1 + h_0^2/8), \quad h_0 \ll 1. \quad (31)$$

Сдвиг фазы χ продолжает расти с h_0 и при $h_0 \sim 1$. Выражение для $\chi(h_0)$ легко получить асимптотически, предполагая малость параметра a_0 . Низко-амплитудная ветвь в этом случае может быть задана в параметрическом виде, где параметром служит значение a на границе образца, $0 \leq a \leq \sqrt{8/3}$:

$$h_0(a) \simeq a(8 - a^2)/16, \quad (32)$$

$$\chi(a) \simeq \frac{4P\sqrt{16 - 3a^2}}{8 - a^2}.$$

Для критического поля (14) и сдвига фаз (15) получаем следующие асимптотические выражения:

$$h_{0\text{cr}} \simeq \sqrt{\frac{8}{27} + \frac{P^2\sqrt{6}}{8}}, \quad (33)$$

$$\chi(h_{0\text{cr}}) \simeq \frac{3P}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Высоко-амплитудные решения. Теперь перейдем к рассмотрению высоко-амплитудных ветвей функции $\chi(h_0)$, соответствующих участкам 2–3 и 4–5 кривой $h(a)$ на рис. 3.

Простой анализ уравнения (12) показывает, что параметр a_0 для этих ветвей является большим, $|a_0| \gtrsim \delta \gg 1$. Вторая ветвь $\chi(h_0)$, соответствующая участку 2–3 на рис. 3, имеет относительно узкую область определения: интервал изменения поля h_0 имеет ширину $\Delta h_0 \sim P\delta$ и находится вблизи значения

$$h_0 = h_0^{\text{min}} \simeq c_1 P\delta^2 \gg \Delta h_0.$$

Здесь

$$c_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}\Gamma^4(3/4)} = 0,804367\dots,$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. В этом интервале функция $\chi(h_0)$ убывает от $\chi(h_0^{\text{min}}) = \pi$ до значения

$$2 \operatorname{arctg} \left(\frac{9\sqrt{6}c_1 P\delta^2}{4} \right).$$

Ветвь $\chi(h_0)$, соответствующая участку 4–5 на рис. 3, определена в интервале h_0 от h_0^{min} до ∞ . Здесь $\chi(h_0)$ монотонно возрастает от $-\pi$ до нуля. При $h_0 \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$\chi(h_0) \simeq \frac{P\delta^5}{16h_0^2}. \quad (35)$$

Разрывные пространственные распределения градиентно-инвариантной разности фаз. Сравнение результатов, полученных для случаев тонких и толстых образцов (малых и больших δ), показывает, что низко-амплитудная ветвь $\chi(h_0)$ всегда расположена в области $0 < h_0 < h_{0\text{cr}} \simeq \sqrt{8/27}$. В то же время высоко-амплитудные ветви претерпевают значительные изменения при увеличении δ . В случае малых δ они расположены в области $h_0 > h_0^{\text{min}} \simeq \sqrt{2}P\delta$. При этом, $h_0^{\text{min}} \ll h_{0\text{cr}}$. В случае же больших δ начало высоко-амплитудных ветвей $h_0^{\text{min}} \sim P\delta^2$ может оказаться расположенным правее, чем точка окончания $h_{0\text{cr}}$ низко-амплитудной ветви. Это происходит при

$$\delta > \delta_{\text{cr}} \simeq \frac{c_2}{\sqrt{P}}, \quad c_2 = \frac{2^{3/4}\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{3}\pi} = 0,82263\dots \quad (36)$$

Таким образом, при достаточно большом δ возникает интервал значений h_0 между $h_{0\text{cr}}$ и h_0^{min} , в котором не определена ни одна из трех описанных

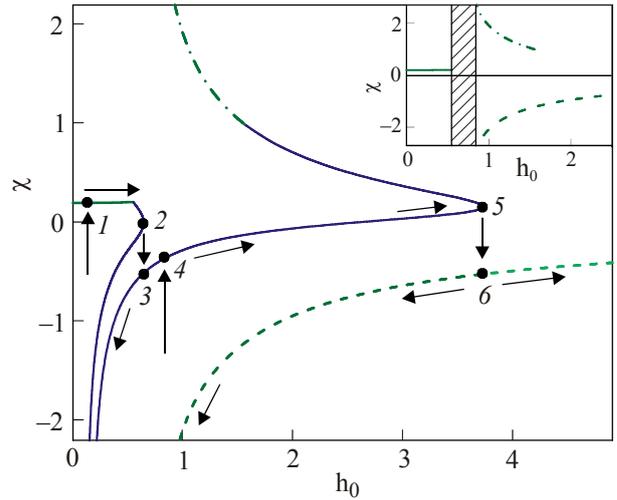


Рис. 5. Зависимость сдвига фазы χ отраженной волны от безразмерной амплитуды h_0 падающей волны с учетом разрывных решений уравнения (11) (численная симуляция). Значения параметров: $D/\lambda_{ab} = 0,08$, $\lambda_c/\lambda_{ab} = 200$, $\kappa = 80$ и $\varepsilon = 16$. Стрелки вдоль кривых показывают, каким образом сдвиг фазы χ меняется при периодическом изменении амплитуды h_0 . Скачки в зависимости $\chi(h_0)$ при увеличении h_0 в точках 2 и 5 показаны стрелками вниз. Скачки при уменьшении h_0 в точках 1 и 4 (обратные скачки) показаны стрелками вверх. Вставка: зависимость сдвига фазы χ отраженной волны от безразмерной амплитуды h_0 падающей волны, полученная с использованием только непрерывных решений уравнения (11) (численная симуляция). Заштрихованная область соответствует амплитудам, для которых не определена ни одна из трех построенных ветвей.

ветвей $\chi(h_0)$. Вставка на рис. 5 демонстрирует этот случай, когда между низко-амплитудной ветвью и высоко-амплитудными существует щель. Ниже мы покажем, что эта щель может быть заполнена дополнительными ветвями $\chi(h_0)$, которые соответствуют разрывным по координате z распределениям градиентно-инвариантной фазы параметра порядка.

Запишем уравнение (9) в виде

$$\left[1 - \kappa^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] h(\zeta) + \kappa^2 a(\zeta) = 0. \quad (37)$$

Видно, что это уравнение может иметь решения, в котором функция $a(\zeta)$ терпит разрывы, но при условии, что магнитное поле $h(\zeta)$ и его производная по ζ непрерывны. Иными словами, мы ищем новые решения, в которых магнитное поле и компонента электрического поля E_x непрерывны, но поперечное к сверхпроводящим слоям электрическое поле E_z терпит разрывы. Такие разрывы означают нарушение электронейтральности сверхпроводящих слоев, что, впрочем, не приводит к нарушению условий применимости исходной системы уравнений.

Приведем пример построения решения с разрывами. Будем строить функцию $a(\zeta)$ только на интервале

$0 < \zeta < \delta$, поскольку, в силу симметричности задачи, $a(-\zeta) = a(\zeta)$. Пусть функция $a(\zeta)$ проходит через точку

$$a(\zeta = 0) = a_0 \quad (38)$$

и имеет единственный разрыв в точке $\zeta = \zeta_j$. Считаем, что в точке разрыва

$$a(\zeta_j - 0) = \sqrt{\frac{8}{3}},$$

т.е. разрыв происходит в точке, которая соответствует вертикальной сепаратриссе $a = \sqrt{8/3}$ на фазовом портрете рис. 2. При этом ζ_j , в соответствии с уравнением (12), определена следующим соотношением:

$$\zeta_j = \sqrt{\frac{3}{4}} \int_{|a_0|}^{\sqrt{8/3}} da \frac{8 - 3a^2}{\sqrt{(8 - 3a^2)^2 - (8 - 3a^2)^2}}. \quad (39)$$

Заметим, что при таком выборе $a(\zeta_j - 0)$ значение функции $a(\zeta_j + 0)$ после разрыва определяется однозначно. Действительно, в силу непрерывности функций $h(\zeta)$ (непрерывности магнитного поля) в точке разрыва функции $a(\zeta)$, получаем:

$$h(\zeta_j + 0) = a(\zeta_j + 0) - \frac{a(\zeta_j + 0)^3}{8} = h(\zeta_j - 0) = \sqrt{\frac{32}{27}}. \quad (40)$$

Решая это кубическое уравнение относительно $a(\zeta_j + 0)$, помимо очевидного корня $a = \sqrt{8/3}$, находим:

$$a(\zeta_j + 0) = -\sqrt{\frac{32}{3}}. \quad (41)$$

Существует бесконечно много решений, которые в точке ζ_j принимают значение $-\sqrt{32/3}$. Однако только одно из них удовлетворяет условию непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля E_x . Согласно уравнению (6), это условие сводится к требованию непрерывности $dh/d\zeta$. В результате находим значение производной $da/d\zeta$ в точке ζ_j :

$$a'(\zeta_j + 0) = -\frac{|8 - 3a_0^2|}{12\sqrt{3}}. \quad (42)$$

На каждом из непрерывных участков, $0 < \zeta < \zeta_j$ и $\zeta_j < \zeta < \delta$, функция $a(\zeta)$ описывается уравнением (9), в то время как начальные условия различны для каждого интервала: уравнения (38) и (10) для первого, и уравнения (40) и (41) для второго. На рис. 6 изображена фазовая диаграмма $a'(a)$ и на ней построена разрывная траектория. Точками обозначены границы образца, крестиками — разрывы. Стрелки указывают направление движения при изменении координаты z .

Напомним, что в случае толстых образцов ($\delta \gg 1$) существует интервал $h_{0\text{cr}} < h_0 < h_0^{\text{min}}$ значений ам-

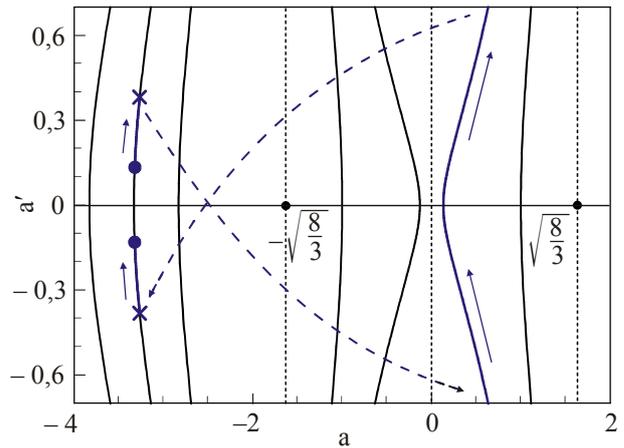


Рис. 6. Фазовый портрет $a'(a)$. Движение вдоль сплошных жирных линий по фазовой траектории соответствует изменению координаты ζ внутри образца. Точками отмечены границы образца $\zeta = \pm\delta$, крестиками обозначены места разрыва. Направление движения указано сплошными стрелками, точки разрыва соединены штриховыми линиями со стрелками. Значения параметров для данной траектории с разрывами: $\delta = 3$, $h_0 = 0,63$.

плитуды падающей волны, в котором не определена ни одна из описанных выше трех ветвей функции $\chi(h_0)$. С помощью разрывных решений $a(\zeta)$ можно построить дополнительную, четвертую, ветвь $\chi(h_0)$, которая «заполняет» этот интервал. Значения амплитуды падающего поля h_0 и сдвиг фазы χ для четвертой ветви по-прежнему вычисляются с помощью параметрических уравнений (14) и (15). На главной панели рис. 5 тонкой сплошной линией построена четвертая ветвь $\chi(h_0)$ с использованием разрывных решений.

Опишем возможное поведение сдвига фазы χ отраженной волны при периодическом изменении амплитуды h_0 падающей волны для случая толстых образцов. Как и при малых δ , при увеличении h_0 от нулевого значения сдвиг фазы $\chi(h_0)$ монотонно растет по первой ветви на рис. 5. При достижении $h_0 = h_{0\text{cr}}$ первая ветвь заканчивается. Однако здесь первая ветвь непрерывно переходит в четвертую. Поэтому далее с ростом h_0 сдвиг фазы $\chi(h_0)$ убывает по четвертой ветви вплоть до точки 2, после чего происходит скачок в точку 3. Далее сдвиг фазы растет вдоль четвертой ветви до точки 5, и затем происходит скачок на третью ветвь в точку 6.

При уменьшении h_0 сдвиг фазы $\chi(h_0)$ уменьшается по третьей ветви, проходит точку 6, и в точке $h_0 = h_0^{\text{min}}$ происходит скачок на четвертую ветвь в точку 4. Затем h_0 достигает своего минимального значения на четвертой ветви и происходит скачок на первую ветвь в точку 1.

Таким образом, как и в случае малых δ , при периодическом изменении амплитуды h_0 падающей волны могут наблюдаться гистерезисные скачки зависимости $\chi(h_0)$.

Заметим, что разрывные решения не ограничиваются классом, который мы здесь описали. Во-первых,

значение функции a непосредственно перед разрывом может быть произвольным и не обязано равняться $\sqrt{8/3}$. Во-вторых, существуют решения с большим числом разрывов. При каждом разрыве значения a и a' после разрыва вычисляются через значения a и a' до разрыва из условий непрерывности h и h' .

4. Заключение

Предсказано и теоретически исследовано необычное для проводящих сред явление. Специфическая нелинейность слоистых сверхпроводников приводит к гистерезисным скачкам поверхностного реактанса при периодическом изменении амплитуды H_0 падающей волны. Важной особенностью предсказанного эффекта является возможность его наблюдения при сравнительно небольших значениях амплитуды H_0 : гистерезисные скачки могут наблюдаться даже при $\varphi \ll 1$. Согласно нашему анализу, критическая амплитуда

$$H_{0\text{cr}} = h_{0\text{cr}} \mathcal{H}_0 \frac{(1-\Omega^2)}{\kappa} \ll \mathcal{H}_0 \sim 20 \text{ Э.}$$

В этом выражении есть два малых параметра: $(1-\Omega^2)$ и $1/\kappa$. Как было показано в [18], влияние разогрева образца при таких амплитудах пренебрежимо мало. Рассмотрены два предельных случая — тонких и толстых образцов. Второй случай представляет особый интерес, поскольку ярко демонстрирует необходимость рассмотрения особого типа решений — разрывных по градиентно-инвариантной фазе параметра порядка, но непрерывных по магнитному полю. Эффект, описанный в этой работе, является еще одним примером явлений, связанных с особым типом нелинейности в слоистых сверхпроводниках.

1. D.N. Christodoulides, F. Lederer, and Ya. Silberger, *Nature (London)* **424**, 817 (2003).
2. B. Barnes and R. Sambles, *Phys. World* **19**, 17 (2006); Th. Krauss, *Phys. World* **19**, 32 (2006).
3. T.W. Ebbesen, C. Genet, and S.I. Bozhevolnyi, *Phys. Today* **61**, 44 (2008).
4. A.V. Kats, M.L. Nesterov, and A.Yu. Nikitin, *Phys. Rev.* **B72**, 193405 (2005); A.V. Kats and I.S. Spevak, *Phys. Rev.* **B65**, 195406 (2002).
5. S. Suntsov, K.G. Markis, D.N. Christodoulides, G.I. Stegeman, A. Hache, R. Morandotti, H. Yang, G. Salamo, and M. Sorel, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 063901 (2006); J. Hudock, S. Suntsov, D. Christodoulides, and G. Stegeman, *Optics Express* **13**, 7720 (2005).
6. K.Y. Bliokh, Y.P. Bliokh, V. Freilikher, S. Savel'ev, and F. Nori, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1201 (2008).
7. R. Ruppin, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, 1811 (2001); I.V. Shadrivov, A.A. Sukhorukov, and Yu.S. Kivshar, *Phys. Rev.* **E67**, 057602 (2003); A.V. Kats, S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 073901 (2007).

8. I.V. Shadrivov, A.A. Sukhorukov, Yu.S. Kivshar, A.A. Zharov, A.D. Boardman, and P. Egan, *Phys. Rev.* **E69**, 016617 (2004).
9. S. Savel'ev, V. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 187002 (2005); S. Savel'ev, V. Yampol'skii, and F. Nori, *Physica* **C445-448**, 183 (2006).
10. A. Hessel and A.A. Oliner, *Appl. Opt.* **4**, 1275 (1965); В.М. Агранович, Д.Л. Миллс, *Поверхностные поляритоны. Электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела сред*, Наука, Москва (1985); H. Raether, *Surface Plasmons*, Springer, New York (1988); R. Petit, *Electromagnetic Theory of Gratings*, Springer, Berlin, (1980); W.L. Barnes, A. Dereux, and T.W. Ebbesen, *Nature (London)* **424**, 824 (2003); A.V. Kats and A.Yu. Nikitin, *Phys. Rev.* **B70**, 235412 (2004).
11. Н.М. Макаров и В.А. Ямпольский, *ФНТ* **17**, 547 (1991) [*Low Temp. Phys.* **17**, 285 (1991)].
12. Н.М. Макаров и В.А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **85**, 614 (1983).
13. О.И. Любимов, Н.М. Макаров и В.А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **85**, 1764 (1983).
14. Э.А. Канер, Н.М. Макаров, И.Б. Снапиро, В.А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **88**, 1310 (1985).
15. I.V. Baltaga, N.M. Makarov, V.A. Yampol'skii, L.M. Fisher, I.F. Voloshin, and N.V. Il'in, *Phys. Lett.* **A148**, 213 (1990); L.M. Fisher, A.V. Kalinov, I.F. Voloshin, I.V. Baltaga, K.V. Il'enko, and V.A. Yampol'skii, *Solid State Commun.* **97**, 833 (1996); С.Е. Савельев, Л.М. Фишер, В.А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **112**, 936 (1997).
16. S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Nat. Phys.* **2**, 521 (2006).
17. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B75**, 184503 (2007).
18. V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B78**, 024511 (2008).
19. *Special Issue of Philosophical Transactions: Mathematical, Physical & Engineering Science* **362**, 1815 (2004).
20. M. Tonouchi, *Nat. Phot.* **1**, 97 (2007).
21. T. M. Mishonov, *Phys. Rev.* **B44**, 12033 (1991).
22. K. Tamasaku, Y. Nakamura, and S. Uchida, **69**, 1455 (1992); O.K.C. Tsui, N.P. Ong, Y. Matsuda, Y.F. Yan, and J. B. Peterson, **73**, 724 (1994); Y. Matsuda, M.B. Gaifullin, K. Kumagai, K. Kadowaki, and T. Mochiku, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4512 (1995).
23. D.L. Mills, *Nonlinear Optics*, Springer, Berlin (1998); N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, World Scientific, Singapur (1996); Y.R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley-Interscience, Hoboken, New York (2003).
24. V.A. Yampol'skii, T.M. Slipchenko, Z.A. Mayzelis, D.V. Kadygrob, S.S. Apostolov, S.E. Savel'ev, and Franco Nori, *Phys. Rev.* **B78**, 184504 (2008).
25. A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York (1982).
26. S. Sakai, P. Bodin, and N.F. Pedersen, *J. Appl. Phys.* **73**, 2411 (1993); S.N. Artemenko and S.V. Remizov, *Physica* **C362**, 200 (2001).
27. L.N. Bulaevskii, M. Zamora, D. Baeriswyl, H. Beck, and J.R. Clem, *Phys. Rev.* **B50**, 12831 (1994); T. Koyama and M. Tachiki, **B54**, 16183 (1996); С.Н. Артеменко, С.В.

- Ремизов, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 811 (1997); M. Tachiki and M. Machida, *Physica* **C341-348**, 1493 (2000); S.N. Artemenko and S.V. Remizov, *Physica* **C362**, 200 (2001); Yu.H. Kim and J. Pokharel, *Physica* **C384**, 425 (2003).
28. M. Machida, T. Koyama, A. Tanaka, and M. Tachiki, *Physica* **C331**, 85 (2000).
 29. L.N. Bulaevskii and A.E. Koshelev, *Phys. Rev. Lett* **99**, 057002 (2007).
 30. L. Ozyuzer, A.E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopalsami, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K.E. Gray, W.-K. Kwok, and U. Welp, *Science* **318**, 1291 (2007).
 31. Ch. Helm and L.N. Bulaevskii, *Phys. Rev.* **B66**, 094514 (2002).
 32. T. Koyama and M. Tachiki, *Phys. Rev.* **B54**, 16183 (1996).

Hysteresis jumps of surface reactance of layered superconductor with changing amplitude of incident wave

S.S. Apostolov, D.V. Kadygrob, Z.A. Mayselis, S.E. Savel'ev, T.M. Slipchenko, and V.A. Yampol'skii

A nonlinear response of a layered superconductor to symmetrical (with respect to magnetic field) electromagnetic excitation is studied theoretically. A multiple-valued dependence of reflected signal on incident-wave amplitude H_0 is predicted. As a result, hysteresis jumps in the dependence of

superconductor surface reactance H_0 occur. If the frequency of irradiating field is close to the Josephson plasma frequency, this unusual non-linear effect can be observed for not very strong amplitudes of ac field. The conditions for occurring the hysteresis are obtained. Expressions for phase shift of the reflected wave are derived using the coupled sine-Gordon equations. Moreover, studied is the class of spatially discontinuous solutions of these equations, which correspond to continuous spatial distributions of magnetic field in the superconductor. Such solutions result in the appearance of additional branches in the dependence of phase shift of the reflected wave on the amplitude of the incident wave.

PACS: 74.78.Fk Multilayers, superlattices, heterostructures;
74.50.+r Tunneling phenomena; Josephson effects.

Keywords: layered superconductor, Josephson plasma frequency, phase shift of the reflected wave.