

# Динамические солитоны в ферромагнетике со спином $S = 1$

Б.А. Иванов<sup>1,2</sup>, Р.С. Химин<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Институт магнетизма НАН Украины, пр. Вернадского, 36Б, г. Киев, 03142, Украина  
E-mail: bivanov@i.com.ua

<sup>2</sup>Национальный Университет им. Тараса Шевченко, пр. Глушкова, 2, г. Киев, 03127, Украина

Статья поступила в редакцию 18 октября 2007 г., после переработки 31 октября 2007 г.

Построена квазиклассическая теория спиновой динамики для ферромагнетика со спином  $S = 1$  при учете изотропного обменного взаимодействия. Для такого ферромагнетика в основном состоянии квантовое среднее значение спина на узле  $\mathbf{m}$  принимает свое максимальное значение, но в динамике существенно проявляются эффекты квантового сокращения спина. Однако для таких ферромагнетиков существует особый класс спиновых колебаний, в которых  $\mathbf{m}$  сохраняет свое направление, но существенно изменяется по длине. Такие возбуждения отсутствуют для обычных гейзенберговских ферромагнетиков, описание которых базируется на уравнении Ландау–Лифшица или на обычном спиновом гамильтониане Гейзенберга. Аналитически в континуальном приближении и численно получены спиновые возбуждения с конечной энергией, или солитоны, которые можно рассматривать как связанные состояния большого числа магнонов  $N$ . Найдена зависимость энергии солитона  $E(P, N)$  с заданным числом связанных магнонов от его импульса  $P$ . Континуальное приближение дает хорошее описание солитонов в той области параметров, в которой намагниченность в солитоне существенно отличается для соседних узлов решетки, и эффекты дискретности должны быть значительны.

Побудовано квазикласичну теорію спінової динаміки для ферромагнетика зі спіном  $S = 1$  з урахуванням ізотропної обмінної взаємодії. Для такого ферромагнетика в основному стані квантове середнє значення спіну на вузлі  $\mathbf{m}$  приймає своє максимальне значення, але в динаміці значно проявляються ефекти квантового скорочення спіну. Проте для таких ферромагнетиків існує особливий клас спинових коливань, у яких  $\mathbf{m}$  зберігає свій напрямок, але суттєво змінюється по довжині. Такі збудження відсутні для звичайних гейзенберговських ферромагнетиків, опис яких базується на рівнянні Ландау–Ліфшица або на звичайному спиновому гамильтоніані Гейзенберга. Аналітично в континуальному наближенні та чисельно отримано спінові збудження з скінченною енергією, або солітони, які можна розглядати як зв'язані стани великої кількості магнонів  $N$ . Знайдено залежність енергії солітону  $E(P, N)$  із заданим числом зв'язаних магнонів від його імпульсу  $P$ . Континуальне наближення дає гарний опис солітонів у тій області параметрів, де намагніченість у солітоні істотно відрізняється для сусідніх вузлів ґратки, і ефекти дискретності повинні бути значні.

PACS: 05.45.Yv Солитоны;  
75.10.Hk Классические спиновые модели;  
75.10.Jm Квантовые спиновые модели.

Ключевые слова: спиновые колебания, изотропное обменное взаимодействие, ферромагнетик, солитон.

## 1. Введение

Локализованные нелинейные возмущения с конечной энергией, или солитоны, играют существенную роль при анализе низкоразмерных магнетиков. Достаточно полное описание магнитных солитонов было

дано для гейзенберговских низкоразмерных магнетиков, состояние которых при низких температурах (при  $T \rightarrow 0$ ) описывается уравнением Ландау–Лифшица для единичного вектора  $\mathbf{M}/|\mathbf{M}|$ , описывающего направление намагниченности  $\mathbf{M}$ . Классические свой-

ства и квазиклассическое квантование солитонов для таких ферромагнетиков можно описать на основе общей концепции, согласно которой солитон представляет собой связанное состояние большого числа ( $N \gg 1$ ) магнонов. При этом энергия солитона с заданным  $N$  и импульсом  $P$  меньше, чем энергия  $N$  магнонов с суммарным импульсом  $P$ . Это представление применимо как в одномерном случае (1D), так и для двух- и трехмерных солитонов, в том числе для солитонов с топологическим зарядом (см. обзорные работы [1,2]). Подобные представления разрабатываются и для многих полевых теорий и моделей физики конденсированных сред [3].

Для одномерных магнетиков развитая концепция подтверждается сравнением данных квазиклассического анализа солитонов с точными квантовыми результатами. Заметим, что ферромагнитное состояние спиновой цепочки не разрушается квантовыми флуктуациями, как это имеет место для антиферромагнетиков [4]. Свойства квантовых солитонов изучены для ряда точно решаемых квантовых задач о возбуждениях в квантовых цепочках со спином  $S = 1/2$ . Впервые такая задача была решена Бете для цепочки с изотропным обменным взаимодействием [5], затем она была обобщена для более сложной XYZ-модели с анизотропным взаимодействием [2]. Интригующим обстоятельством явилось то, что квазиклассический анализ в точности воспроизвел квантовый ответ, включая наличие периодической зависимости энергии солитона от его импульса. Периодический закон дисперсии естественным образом возникает в дискретной квантовой модели, но его происхождение для континуального уравнения Ландау–Лифшица не ясно. Для солитонов типа доменных стенок возможна топологическая аргументация такого поведения [6], но для динамических солитонов она не применима.

Второй вопрос, касающийся применимости солитонных состояний к описанию реальных спиновых цепочек, состоит в следующем. Приближение уравнения Ландау–Лифшица предполагает, что модуль вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  остается постоянным. Отметим, что в оригинальной работе Ландау и Лифшица уравнение выписано именно для нормированной намагниченности  $\mathbf{M}/|\mathbf{M}|$  [7]. Это условие естественно получается для магнетиков, которые описываются гамильтонианом Гейзенберга, включающим только билинейное взаимодействие спинов вида  $JS_1S_2$ . Оно связано с тем фактом, что для такой модели возможно замкнутое описание спиновой динамики в терминах только среднего значения спина на основе спиновых когерентных состояниях, т.е. состояниях группы  $SO(3) \sim SU(2)$ , которые параметризуются единичным вектором [8,9]. Но еще Мория отмечал [10], что выход за рамки этой модели (например, учет одноионной анизотропии) даже при нулевой температуре может приводить к изменению

модуля вектора намагниченности. В случае простейших чисто изотропных моделей для спина  $S > 1/2$  обменное взаимодействие не ограничивается билинейным гейзенберговским слагаемым [1,3]. В частности, для изотропного магнетика со спином  $S = 1$  и учетом взаимодействия между ближайшими соседями можно исходить из гамильтониана

$$\hat{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} [JS_iS_j + K(S_iS_j)^2], \quad (1)$$

в котором  $J$  и  $K$  определяют билинейное и биквадратическое по спинам обменное взаимодействие,  $\langle i, j \rangle$  обозначает пару ближайших узлов в решетке.

Для данной модели характер основного состояния более сложный, чем в обычном магнетике, и определяется соотношением параметров  $J$  и  $K$ . Кроме ферромагнитной фазы, которая устойчива при  $J > K$ ,  $J > 0$ , и антиферромагнитной фазы, устойчивой в приближении среднего поля при  $J < K$ ,  $J < 0$ , в данной модели возможны две так называемые нематические фазы, (коллинеарная и ортогональная [11,12]), в которых средний спин  $\langle S \rangle$  равен нулю даже при нулевой температуре. Области существования нематических фаз разделяют области стабильности ферромагнитной и антиферромагнитной фаз.

Динамика спинов в ферромагнитной фазе модели (1) качественно отличается от динамики, характерной для гейзенберговских магнетиков. Для этой модели при любых соотношениях параметров  $J$  и  $K$  возможно динамическое сокращение спина, что в принципе невозможно для уравнения Ландау–Лифшица. Эта модель активно исследуется в последнее время для описания как трехмерных [13,14], так и низкоразмерных магнетиков [15,16]. Она интересна не только для физики магнетиков, но и широко используется при исследовании многокомпонентных бозе-эйнштейновских конденсатов нейтральных атомов с ненулевым спином [17]. При некоторых соотношениях  $J/K$  (например, при  $J = K$  около точки перехода между ферромагнитной и нематической фазами) модель (1) имеет симметрию  $SU(3)$ , более высокую, чем  $SO(3)$ . В работе [18] показано, что в этой точке модель (1) точно интегрируема и для нее существуют многосолитонные решения.

Для анизотропных моделей ферромагнетиков, также допускающих квантовое сокращение спина, исследованы простейшие солитонные состояния, неподвижные доменные стенки и вихри [19] и движущиеся доменные стенки [20]. Однако для изотропной модели (1) были изучены 1D солитоны [21] и 2D топологические солитоны [15,22] в фазе коллинеарного нематика, а также солитоны около  $SU(3)$ -симметричной точки  $J = K$  [23], но спиновая динамика остальных фаз, даже

простейшей ферромагнитной, изучена слабо и требует дальнейших исследований.

В настоящей работе исследована динамика нелинейных колебаний намагниченности и одномерных солитонов в ферромагнитной фазе модели (1). Анализ проведен в квазиклассическом приближении на основе системы динамических уравнений для полного набора параметров, определяющих состояние спина  $S=1$  на узле, с полным учетом эффектов квантового сокращения спина. Уравнения спиновой динамики исследованы как на основе континуального приближения, так и численно, для дискретной версии модели. Получены решения, описывающие специфические «продольные» солитоны, для которых направление вектора намагниченности остается неизменным, но изменяется модуль вектора намагниченности. Зависимость энергии солитона от его импульса периодическая в некоторой окрестности точно интегрируемой точки  $J=K$ . Данная периодичность не является, в отличие от доменных стенок в ферромагнетиках или либовских состояний в спиновом немагнетике [21], универсальным свойством модели и разрушается для произвольного соотношения  $J/K$ .

## 2. Модель и элементарные возбуждения ферромагнетика

Как известно, для полного описания системы со спином  $S > 1/2$  использование обычных спиновых когерентных состояний (когерентных состояний группы  $SO(3) \sim SU(2)$ , см.[9]) недостаточно, и нужно исходить из когерентных состояний группы  $SU(2S+1)$  [14]. Для спина  $S=1$  использование обобщенных когерентных состояний группы  $SU(3)$  дает возможность последовательно учесть биквадратичный обмен и описать такое свойство магнетика, как квантовое сокращение спина на узле. Эти состояния удобно параметризовать двумя вещественными трехмерными векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  [15,23].

$$|\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{j=x,y,z} (u_j + iv_j) |\psi_j\rangle, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  вещественные векторы. Состояния  $|\psi_j\rangle$  определяют декартовы состояния для  $S=1$  и выражаются через обычные состояния  $|\pm 1\rangle, |0\rangle$  с проекцией спина  $S_z = \pm 1, 0$  формулами  $|\psi_z\rangle = |0\rangle, \sqrt{2}|\psi_x\rangle = (|-1\rangle - |+1\rangle), \sqrt{2}|\psi_y\rangle = i(|-1\rangle + |+1\rangle)$ . В силу условий нормировки и произвольности фазы волновой функции векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  связаны соотношениями

$$\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = 1, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Неприводимые спиновые средние, которые для  $S=1$  включают среднее значение спина  $\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{m}$  и билиней-

ные по компонентам спина квадрупольные средние, можно записать в виде

$$\mathbf{m} = 2[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad \langle S_i S_k + S_k S_i \rangle / 2 = \delta_{ik} - u_i u_k - v_i v_k. \quad (4)$$

Для ферромагнитного основного состояния системы величина  $|\mathbf{m}|=1$ , при том, что состояние вырождено по направлению  $\mathbf{m}$ . Это означает, что в основном состоянии  $|\mathbf{u}|=|\mathbf{v}|=1/\sqrt{2}$ , и поворот этих векторов вокруг направления  $\mathbf{m}$  не меняет состояния системы. Однако для любого  $|\mathbf{m}| < 1$  состояния, отличающиеся направлением  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{m}$ , физически различимы за счет присутствия квадрупольных спиновых средних вида  $\langle S_x^2 - S_y^2 \rangle$  и  $\langle S_x S_y \rangle$ . Как показано ниже, угол поворота  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  вокруг вектора среднего спина  $\mathbf{m}$  играет роль обобщенной координаты, сопряженной длине  $\mathbf{m}$ .

Квазиклассическое описание квантовой модели (1) на основе когерентных состояний (2) базируется на динамических уравнениях для переменных  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Динамика этих переменных определяется лагранжианом системы, который можно записать в следующем виде [15]:

$$\mathcal{L} = -2\hbar \sum_i \mathbf{v}_i \cdot (\partial \mathbf{u}_i / \partial t) - W\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \quad (5)$$

где  $W\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  — энергия системы, которая совпадает с квантовым средним значением гамильтониана системы (1), вычисленным на состояниях (2). Конкретный вид этой энергии для дискретной модели магнетика приведен в работе [15]. На основе линеаризованной версии лагранжиана (5) легко получить спектр частот линейных возбуждений (магнонов), который состоит из двух ветвей. Одна из них не содержит параметра биквадратичного обмена и похожа на ту, что получается для обычного гейзенберговского ферромагнетика,

$$\hbar\omega_1(\mathbf{k}) = Jz(1 - C(2\mathbf{k})). \quad (6)$$

Здесь и далее обозначено  $C(\mathbf{k}) = (1/z) \sum_{\mathbf{a}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}}$ ,  $z$  —

число ближайших соседей,  $\mathbf{a}$  — набор векторов, соединяющих данный узел решетки с соседними. Для одномерного случая получаем  $\hbar\omega_1 = 2J(1 - \cos(2ka))$ , где  $a$  — постоянная решетки.

Вторая ветвь элементарных возбуждений отвечает колебаниям векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  в одной плоскости с нарушением условия  $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ , при этом намагниченность меняется по длине. Соответствующие квазичастицы можно назвать *продольными магнонами*. Чтобы получить их спектр, удобно перейти к новым угловым переменным  $\mu$  и  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \cos \mu (\mathbf{e}_x \cos \gamma + \mathbf{e}_y \sin \gamma), \\ \mathbf{v} &= \sin \mu (-\mathbf{e}_x \sin \gamma + \mathbf{e}_y \cos \gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  — орты в плоскости  $xy$ , которая выбрана перпендикулярно направлению спина в основном состоянии. Такая запись автоматически учитывает условия (2), в частности перпендикулярность векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Легко убедиться, что уравнение (7) имеет решение типа нелинейной плоской волны следующего вида:

$$\mu = \mu_0 = \text{const}, \quad \gamma = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t, \quad (8)$$

где частота связана с волновым вектором соотношением

$$\hbar\omega_{NL}(\mathbf{k}) = \sin 2\mu_0 [zJ - (zK/2)(1 + C(2\mathbf{k}))], \quad (9)$$

в которое амплитуда волны  $\sin 2\mu_0$  входит простым мультипликативным образом. В линейном пределе, когда  $\mu = \mu_0 \rightarrow \pi/4$ , ему отвечает спектр частот

$$\hbar\omega(\mathbf{k}) = zJ - (zK/2)(1 + C(2\mathbf{k})) \quad (10)$$

или в одномерном случае

$$\hbar\omega(\mathbf{k}) = 2J - K(1 + \cos 2ak). \quad (11)$$

Из этой зависимости видно, что ферромагнитное состояние устойчиво только при  $J > K$  и  $J > 0$ , вне этой области энергия магнонов становится отрицательной. Следует отметить, что при  $K = 0$ , т.е. для обычного гейзенберговского магнетика, дисперсия спектра (10) исчезает. Этот результат ясен, поскольку природа указанных колебаний связана с изменением намагниченности по длине, и эти колебания отсутствуют для уравнения Ландау–Лифшица.

Спектры квазичастиц для модели (1) в линейном приближении получены Папаниколау методом  $1/n$ -разложения [11]. Однако для сопоставления наших результатов с данными работы [11] следует отметить одно весьма нетривиальное обстоятельство. Дело в том, что векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются по существу векторами-директорами. Наблюдаемые величины, например квадратурные средние  $\langle S_x S_y + S_y S_x \rangle$  и  $\langle S_x^2 - S_y^2 \rangle$ , отличные от нуля для планарного решения (7), билинейны по этим переменным. Поэтому в качестве угловой переменной, определяющей их поворот в плоскости, надо выбрать величину  $2\gamma$ . Иными словами, наблюдаемые величины осциллируют с удвоенной частотой по сравнению с колебаниями  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Следовательно, «истинная» частота изменения спиновых средних в два раза больше частоты, определяющей осцилляции  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . То же относится и к волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Пока мы исследуем классические колебания или изучаем солитоны, вычисляя их энергию, число магнонов или импульс, это различие частот не играет роли. Однако при переходе от классической волны к квазичастицам по стандартным правилам  $\hbar\omega(k) \rightarrow \varepsilon(p)$ , где  $p = \hbar k$ , такое различие существенно проявляется. Когда  $\omega_D$  и  $k_D$  описывают колебания вектора-директора  $\mathbf{u}$  или  $\mathbf{v}$  такого типа, как представлены в формуле (8), правильным

соотношением будет  $\varepsilon(p) \rightarrow 2\hbar\omega_D(k_D)$  и  $p = 2\hbar k_D$ . Если действовать по этому правилу, то наши результаты для частот магнонов переходят в те, что получены в работе [11].

Указанная закономерность носит общий характер, и должна проявляться для любых полевых моделей, динамика которых описывается уравнениями для вектора-директора. Насколько нам известно, эта закономерность не обсуждалась ранее. В работе [15] проведено сопоставление частот колебаний векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  и энергий магнонов, но только в области линейного закона дисперсии,  $\omega = ck$  и  $\varepsilon = cp$ , поэтому эта закономерность не проявилась. В работе [21] нами проведено сравнение энергии магнонов  $\varepsilon(p)$  (найденных по стандартному правилу,  $\varepsilon = \hbar\omega$ ) и энергии солитонов типа волн поворота (либовских состояний)  $E(P)$ . Функции  $\varepsilon(p)$  и  $E(P)$  должны быть близки только в области малых энергий и импульсов, где обе зависимости линейные. Однако для больших значений импульса магнона или квадратичного закона дисперсии, как для ферромагнетика в нашей модели, учет указанной выше закономерности необходим.

### 3. Одномерные солитоны

Рассмотрим более сложные возбуждения в модели (1), а именно, связанные состояния магнонов типа (10), которые можно назвать «продольными» солитонами. Предположим, что дискретные переменные  $\mathbf{u}_i(t)$  и  $\mathbf{v}_i(t)$  можно рассматривать как непрерывные функции координат и времени. Ограничимся одномерным случаем,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ . Лагранжиан для этих переменных можно представить в виде

$$\mathcal{L} = \int \frac{dx}{a} \left( -2\hbar\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - w \{ \mathbf{u}, \mathbf{v} \} \right), \quad (12)$$

где  $a$  — постоянная решетки,  $w \{ \mathbf{u}, \mathbf{v} \}$  — плотность энергии системы. В макроскопическом приближении  $w$  зависит от векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и их пространственных производных. В общем случае система независимых уравнений для  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  с учетом соотношений (3) состоит из четырех нелинейных уравнений и ее анализ достаточно сложен. Однако для континуальной модели (12) и ее дискретного аналога можно показать, что существует частное планарное решение, в котором векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  разворачиваются в некоторой плоскости, а намагниченность  $\mathbf{m}$  меняется только по длине (см. [21,22]). Структура этого решения такая же, как была записана выше при описании линейных и нелинейных плоских волн (7). В таком решении вектор намагниченности  $\mathbf{m}$  направлен вдоль оси  $z$  и равен по величине  $\sin 2\mu$ . Для удобства сравнения с солитонами в негейзенберговском ферромагнетике вместо введенных выше угловых переменных (7) удобно использовать переменную  $\theta = 2\mu - \pi/2$ . В терми-



нах переменных  $\theta, \gamma$  лагранжиан записывается в виде  $\int L(dx/a)$ , где плотность лагранжиана

$$L = \hbar(\cos \theta - 1)(\partial\gamma/\partial t) - w\{\theta, \gamma\}, \quad (13)$$

и плотность энергии  $w\{\theta, \gamma\}$  имеет вид

$$w\{\theta, \gamma\} = (J - K) \sin^2 \theta + Ka^2 \sin^2 \theta (\partial\gamma/\partial x)^2 + (a^2/4)[K + 2(J - K) \sin^2 \theta](\partial\theta/\partial x)^2. \quad (14)$$

Здесь и далее рассматриваем только одномерные решения. Поскольку плотность лагранжиана  $L\{\theta, \gamma\}$  не зависит явно от переменной  $\gamma$ , а только от ее производных  $\partial\gamma/\partial x$  и  $\partial\gamma/\partial t$ , существуют решения, в которых векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  прецессируют в плоскости  $xu$  с постоянной частотой  $\omega$  в некоторой системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью  $V$ . Мы ограничимся анализом таких двухпараметрических солитонов, которые формально похожи на прецессионные солитоны в гейзенберговских ферромагнетиках [1,2]. Будем исходить из решения вида

$$\theta = \theta(\xi), \quad \gamma = \gamma(\xi) + \omega t, \quad \partial\gamma/\partial t = \omega - V\gamma', \quad (15)$$

где  $\xi = x - Vt$ , штрихом обозначена производная по  $\xi$ . В качестве граничных условий выберем, что вдали от солитона магнетик находится в основном состоянии, что отвечает  $\theta \rightarrow 0, \gamma' < \infty$ , при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

Записав уравнение Лагранжа  $\partial L/\partial\gamma' = \text{const}$ , с учетом граничных условий можно найти

$$\gamma' = -\frac{\hbar V}{4K \cos^2(\theta/2)}. \quad (16)$$

Рассматриваемая система имеет еще один интеграл движения, который можно записать в виде

$$\mathcal{E} = \theta' \frac{\partial L}{\partial \theta'} + \gamma' \frac{\partial L}{\partial \gamma'} - L = \text{const}. \quad (17)$$

Используя этот интеграл, можно записать обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $\theta(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} (\theta')^2 [K + 2(J - K) \sin^2 \theta] = & \quad (18) \\ = (J - K) \sin^2 \theta - 2\hbar\omega \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\hbar^2 V^2}{4K} \text{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения легко выписать в квадратурах, но представить в элементарных функциях явную зависимость  $\theta = \theta(\xi)$  не удастся. Однако можно описать общие свойства солитонов. В частности, легко указать асимптотическое поведение решения вдали от солитона, при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ,

$$\theta \propto \exp[-(|\xi|/x_0)\sqrt{1 - V^2/4c^2 - \omega/\omega_0}], \quad (19)$$

где введены характерные величины

$$x_0 = a\sqrt{\frac{K}{J - K}}, \quad \hbar\omega_0 = 2(J - K), \quad \hbar c = 2a\sqrt{K(J - K)}. \quad (20)$$

Величина  $x_0$  играет роль характерного масштаба неоднородности и имеет тот же смысл, что и магнитная длина в анизотропном гейзенберговском ферромагнетике [1,2]. Величины  $\omega_0$  и  $V_c = 2c$  представляют собой минимальную частоту и фазовую скорость магнонов линейной теории соответственно. Легко видеть, что область существования солитонов на плоскости  $\omega V$  находится внутри параболы

$$1 - V^2/4c^2 - \omega/\omega_0 = 0, \quad (21)$$

при приближении к которой область локализации солитона  $\Delta x \sim x_0(1 - V^2/4c^2 - \omega/\omega_0)^{-1/2}$  возрастает. На граничной линии (21) скорость солитона достигает своего максимального при данной частоте значения

$$V_m(\omega) = (2a/\hbar) \sqrt{4K(J - K) + 2K\hbar\omega}.$$

Для интересующих нас величин интегралов движения в солитоне, а именно, его энергии  $E$ , импульса  $P$  и числа связанных магнонов  $N$ , с использованием (18) можно записать простые выражения в виде определенных интегралов. Энергия солитона получается подстановкой (18) в (14):

$$E = \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{J - K}} \int_0^{\theta_0} \left[ 4(J - K) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \hbar\omega \right] \sin \frac{\theta}{2} \frac{\sqrt{1 + 2[(J - K)/K] \sin \theta/2}}{\sqrt{4 \cos^2 \theta/2 - V^2/(c^2 \cos^2 \theta/2) - 4\omega/\omega_0}} d\theta, \quad (22)$$

где

$$\theta_0 = \arccos \left[ \frac{\sqrt{\hbar^2 c^2 V^2 + 4K^2 \omega^2 a^4 - 2K\omega a^2 - \hbar c^2}}{\hbar c^2} \right]$$

определяет максимальное значение угловой переменной  $\theta$  в солитоне. Вблизи параболы (21) амплитуда солитона убывает,  $\theta_0 \sim x_0(1 - V^2/4c^2 - \omega/\omega_0)^{1/2}$ . Приведем также формулы для остальных интегралов движения, важных для квантования солитона:

импульса

$$P = \frac{\hbar V}{ac} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta/2}{\cos^2 \theta/2} \frac{\sqrt{1+2[(J-K)/K] \sin \theta/2}}{\sqrt{4 \cos^2 \theta/2 - V^2/(c^2 \cos^2 \theta/2) - 4\omega/\omega_0}} d\theta \quad (23)$$

и числа магнонов

$$N = 2 \sqrt{\frac{K}{J-K}} \int_0^{\theta_0} \sin \frac{\theta}{2} \frac{\sqrt{1+2[(J-K)/K] \sin \theta/2}}{\sqrt{4 \cos^2 \theta/2 - V^2/(c^2 \cos^2 \theta/2) - 4\omega/\omega_0}} d\theta. \quad (24)$$

Все три интеграла в общем случае выражаются только через сложные комбинации эллиптических функций, поэтому удобнее найти их численно и проанализировать качественно (см. ниже). Исключениями являются область около граничной линии (21), а также другой предельный случай  $V \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow 0$ . Второй случай важен для интерпретации солитонных решений. При этом значение числа связанных магнонов логарифмически расходится, а энергия солитона принимает конечное значение  $E_0$ . Физическое объяснение этого поведения такое же, как и для прецессионных солитонов в анизотропном ферромагнетике: в этом пределе солитон представляет собой связанное состояние двух доменных стенок, разнесенных на большое расстояние  $\Delta x \sim aN$  друг от друга. Область между стенками вносит вклад в  $N$ , но не в  $E$ ; предельная энергия солитона  $E_0$  определяется только стенками и равна удвоенной энергии стенки, которую легко вычислить. Для сравнения с данными других авторов результатами численного анализа дискретной модели, предельную энергию солитона удобно представить в виде  $E_0 = \varepsilon_0 N_1$ , где  $\varepsilon_0 = 2\hbar\omega_0 = 4(J-K)$  — введенная выше минимальная энергия (энергия активации) для продольных магнонов,  $N_1$  — характерное число магнонов в солитоне,

$$N_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{J-K}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{J-K/2}{J-K} \arcsin \sqrt{\frac{J-K}{J-K/2}}. \quad (25)$$

Значение  $N_1$  велико при  $J \rightarrow K$  и принимает конечное значение в другом предельном случае при  $K/J \rightarrow 0$ .

При расчете интегралов в (22)–(24) существенное упрощение возникает при  $J \rightarrow K$ . Тогда интегралы при всех допустимых  $V$  и  $\omega$  вычисляются аналитически. Соответствующие выражения сводятся к тем, которые появляются при анализе прецессионных солитонов в одноосных гейзенберговских ферромагнетиках (см. обзорные работы [1,2]).

В основном приближении по малому параметру  $(J-K)/J$  зависимости квазиклассических характеристик солитона  $E$ ,  $N$  и  $P$  от параметров решения  $\omega$  и  $V$  можно записать через элементарные функции. Для энергии получается простое выражение:

$$E = 2\sqrt{J(J-K)} \sqrt{1 - \omega/\omega_0 - V^2/4c^2}. \quad (26)$$

Из (26) следует, что энергия солитона стремится к нулю при приближении к границе области существования солитонов (21). Для числа магнонов  $N$  при  $J-K \ll J$  получается

$$N = \frac{2Ka}{\hbar c} \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{2\sqrt{1 - V^2/4c^2 - \omega/\omega_0}}{\sqrt{V^2/c^2 + \omega^2/\omega_0^2}} \right]. \quad (27)$$

В силу этого выражения на плоскости  $\omega V$  линии постоянного числа магнонов  $N(V, \omega) = N_0 = \text{const}$  имеют вид замкнутых выпуклых кривых, охватывающих начало координат. Большему  $N_0$  отвечает меньшая площадь под кривой. Для зависимости импульса солитона от  $V$  и  $\omega$  при малых  $(J-K)/J$  получается выражение

$$P = \frac{\hbar}{a} \arccos \frac{V^2/c^2 + 2\omega/\omega_0}{2\sqrt{V^2/c^2 + \omega^2/\omega_0^2}}, \quad (28)$$

из которого следует неаналитическое поведение функции  $P(V, \omega)$  вблизи точки  $V = 0$  и  $\omega = 0$ . Это свойство особенно ярко проявляется для нулевой скорости солитона: в этом случае импульс равен нулю при  $\omega > 0$ , а при  $V = 0$ ,  $\omega < 0$  значение импульса максимально и равно  $P_0 = \pi\hbar/a$ . На плоскости  $\omega V$  линии постоянного импульса  $P(V, \omega) = \text{const} < P_0$  выходят из начала координат и лежат между предельными кривыми  $P = 0$ , парабола (21), и  $P = P_0$ , которой отвечает отрезок оси частот при  $\omega < 0$ . Наконец, при  $J-K \ll J$  можно представить явную зависимость  $E(P, N)$  в простом виде:

$$E = \hbar\omega_0 N_1 \left[ \operatorname{th} \frac{N}{N_1} + \frac{2 \sin^2(\pi P/2P_0)}{\operatorname{sh}(2N/N_1)} \right], \quad (29)$$

в этом приближении следует принять, что  $N_1 = 2\sqrt{J/(J-K)}$  и характерная длина  $x_0 = (a/2) \times \sqrt{J/(J-K)}$ , т.е.  $N_1 = 4x_0/a$ . Структура этой формулы и связь параметров  $N_1$  и  $x_0/a$  здесь такие же, как и для ферромагнетика с анизотропией типа легкая ось (см. [1,2]). Формула (29) определяет периодическую зависимость энергии солитона от его импульса  $P$ . Интересно отметить, что величина периода  $2P_0$ , которая

определяется только постоянной решетки  $a$ , в нашем случае в два раза меньше, чем в легкоосном ферромагнетике ( $P_{0,anis} = 2\pi\hbar/a$ ) при том же значении спина  $S=1$ . Это совпадает с тем, что отмечено ранее для солитонов в нематической фазе модели (1) [21].

Обсудим вопрос о периодичности закона дисперсии солитонов подробнее. Фактически, для солитонов (в отличие от доменных стенок [28] или волн поворота [21]) значение  $P$  ограничено, и, скорее, следует говорить о присутствии точек окончания спектра при  $P = P_0$  и  $P = -P_0$ . Однако указанные выше геометрические свойства кривых  $P(V, \omega) = \text{const}$  и  $N(V, \omega) = \text{const}$  (в том числе выпуклость последней) и наличие максимального значения импульса  $P = P_0$ , одинакового для всех  $N$ , приводит к тому, что зависимость энергии от импульса при всех фиксированных значениях  $N$  описывается монотонно растущей функцией со значением производной  $\partial E(P, N)/\partial P = 0$  при максимальном значении аргумента  $P = \pm P_0$ . Указанное выше поведение характерно также и для периодических функций с периодом, равным  $2P_0$ , при рассмотрении только одного периода этой функции. С учетом условия  $\partial E(P, N)/\partial P = 0$  при  $P = \pm P_0$  возможно аналитическое продолжение зависимости  $E(P, N)$  на произвольные значения  $P$ , что формально дает периодичность. Такая трактовка периодического закона дисперсии солитона, данная в работах [1,2], оказалась очень продуктивной при сравнении с точными результатами для дискретных квантовых моделей, для которых периодичность диктуется теоремой Блоха. Далее будем говорить о периодичности закона дисперсии именно в указанном выше смысле. Как увидим ниже, указанная выше геометрическая структура линий  $P = \text{const}$  и  $N = \text{const}$  сохраняется в некоторой конечной окрестности избранной (SU(3)-симметричной) точки  $J = K$ , хотя при немалых  $(J - K)/J$  аналитические формулы (27) и (28) конечно же неприменимы. Тогда снова появляется такая зависимость  $E(P, N)$  от  $P$ , которая может рассматриваться как периодическая, см. рис. 1. Вне этой окрестности геометрия линий  $P = \text{const}$  и  $N = \text{const}$  усложняется, и периодичность ввести нельзя. В нашей задаче вблизи интегрируемой точки аналогия

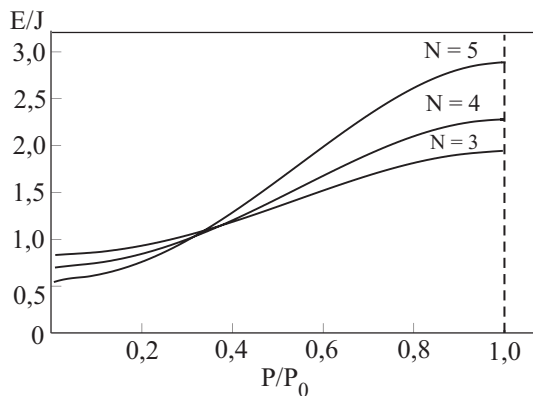


Рис. 1. Зависимость энергии солитона от его импульса для значения  $K = 0,9J$  для различных  $N$ .

между легкоосным ферромагнетиком и ферромагнетиком с биквадратичным обменом достаточно полная.

#### 4. Численный анализ солитонных решений в континуальной и дискретной моделях

Перейдем к анализу солитонов при немалых значениях  $J - K \sim J \sim K$ . Начнем с обсуждения геометрии линий  $P(V, \omega) = \text{const}$  и  $N(V, \omega) = \text{const}$  на плоскости  $V\omega$ . Как отмечалось выше, при  $J - K \sim J$  интегралы (22)–(24) можно записать только в эллиптических функциях, и удобнее исследовать их численно.

Исключение составляет поведение около особой линии (21), которая определяет границу существования солитонов на плоскости  $V\omega$ . Эта линия характерна тем, что при приближении к ней значения энергии, импульса и числа магнонов в солитоне обращаются в нуль. В естественных переменных  $V/V_c$  и  $\omega/\omega_0$  на плоскости  $V\omega$  форма этой линии не зависит от значения параметра  $K/J$  и определяется универсальным выражением (21), таким же, как и для гейзенберговского легкоосного ферромагнетика [1,2]. Ниже на рис. 2 и 3 эта линия определяет самую верхнюю кривую, ей отвечает  $P \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow 0$  соответственно. Область существования солитонов лежит ниже этой кривой и отмечена серым фоном.

Нами проведен анализ характерных кривых  $N = \text{const}$  и  $P = \text{const}$  для ряда значений параметра  $K/J$  в области существования солитонов. Использованы как значения, близкие к интегрируемой точке, типа  $K/J = 0,9$ , так и далекие, такие как  $K/J = 0,1$ , а также промежуточные значения. Анализ проведен следующим образом: при данном значении  $K/J$  значения энергии, импульса и числа магнонов находились численно для сетки значений  $V$  и  $\omega$ . Значения частоты выбирали от  $-5\omega_0$  до  $\omega_0$  с разрешением  $(1/30)\omega_0$ , и для каждого значения  $\omega$  выбирали 50 эквидистантных значений  $V$  от 0 до  $V_m(\omega)$ . Таким образом, общее количество точек сетки  $V$  и  $\omega$  достигало 9 тысяч. Такая плотность точек оказалась вполне достаточной для того, чтобы из этой базы данных восстановить линии  $P(\omega, V) = \text{const}$  и  $N(\omega, V) = \text{const}$ , а также зависимости энергии  $E$  от  $P$  при заданном  $N = \text{const}$  и от  $N$  при заданном  $P = \text{const}$ .

Кратко обсудим основные характеристики солитонов, полученные в результате этого анализа. Прежде всего, было установлено, что основные свойства линий  $P(\omega, V) = \text{const}$  и  $N(\omega, V) = \text{const}$  на плоскости  $\omega V$ , существующие при  $K - J \ll J$  и обсуждавшиеся выше, включая выпуклость кривых  $N(\omega, V) = \text{const}$ , остаются неизменными в достаточно широкой окрестности точки  $K = J$ , примерно при  $0,71J \approx K_c < K < J$ . В этой же области значения импульса не превышают величину  $P_0$ . (Заметим, что это критическое значение  $K_c/J$  близ-

ко  $k1/\sqrt{2}$ , но значение  $K_c = J/\sqrt{2}$  не было нами подтверждено аналитически.) Отсюда легко получается, что в этой области сохраняется периодическая (в указанном выше смысле) зависимость энергии солитона от его импульса при любом значении  $N$  с тем же универсальным периодом  $P_0$  (см. рис. 1).

При  $K < K_c \simeq 0,71J$  характер зависимостей импульса  $P$  и числа магнонов  $N$  от  $\omega$  и  $V$  меняется. Прежде всего, для солитонов появляются значения импульса, большие, чем величина  $P_0$ . При этом по-прежнему значению  $P_0$  отвечает полуось  $V = 0, \omega < 0$ . Для той части закона дисперсии, которая возникает в окрестности этой полуоси, как и раньше, соответствует значение  $\partial E(P, N)/\partial P = 0$  при  $P = \pm P_0$ . Однако при  $K < K_c$  значение  $P = P_0$  реализуется и на других кривых, которые соединяются с указанной полуосью в некоторой точке (см. рис. 2). При приближении  $K$  к  $K_c$  эта точка смещается в область больших значений  $|\omega|$ , и при  $K > K_c$  она исчезает. С увеличением  $P$  кривые, отвечающие значениям  $P > P_0$ , смещаются в область отрицательных  $\omega$  (см. рис. 2). Максимальное значение импульса при  $K$ , существенно меньших  $K_c$ , может достигать весьма больших значений, для  $K = 0,05$  были получены величины до  $P/P_0 \sim 4$ .

При  $K < K_c$  существенные изменения происходят и с кривыми  $N(\omega, V) = \text{const}$ . Если при  $K > K_c$  эти кривые выпуклые, т.е. зависимость  $\omega$  от  $V$  на любой такой кривой однозначная, то при  $K < K_c$  одному значению частоты могут отвечать несколько значений скорости (см. рис. 3.)

Появление указанных особенностей в корне изменяет характер закона дисперсии солитона при  $K < K_c$  по сравнению со случаем  $K_c < K < J$  (сравните рис. 4

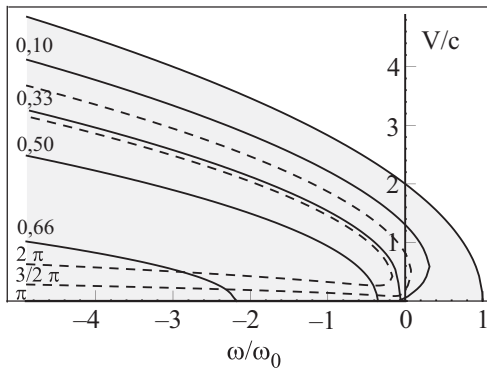


Рис. 2. Кривые  $P(\omega, V) = \text{const}$  для некоторых значений  $K/J$ , меньших критического,  $K < K_c \simeq 0,71J$ , когда закон дисперсии солитона не является периодическим (см. текст). На сплошных линиях, а также на отрезке оси частот при  $\omega < 0$  величина импульса  $P = P_0$ . Около этих кривых цифрами приведены соответствующие значения  $K/J$ . Пунктирными линиями для магнетика с  $K/J = 0,1$  отмечены кривые со значениями импульса, большими, чем  $P_0$ , а именно:  $P/P_0 = 3/2$  и  $P = 2P_0$ .

и рис. 1). Прежде всего, зависимость энергии от импульса становится неоднозначной функцией и содержит две ветви (рис. 4.) Эти ветви сливаются в точке с максимальным значением импульса  $P = P_{\text{max}}$ , которое в данном случае больше, чем  $P_0$ . Верхней ветви отвечают лишь значения импульса от  $|P| = P_0$  до  $|P| = P_{\text{max}}$ , в то время как для нижней ветви, более выгодной энергетически, допустимы все значения  $0 \leq |P| \leq P_{\text{max}}$ . Максимальному значению импульса  $P_{\text{max}} > P_0$  в этом случае соответствует значение  $\partial E(P, N)/\partial P \neq 0$  (см. рис. 4), и закон дисперсии для каждой из ветвей не может быть представлен в виде периодической непрерывной функции.

Наличие неоднозначной зависимости энергии от импульса ставит вопрос об устойчивости солитонов. Как показано в работе [24], для устойчивости двухпараметрического солитона в континуальной модели достаточно общего вида необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial \omega}{\partial N} \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial \omega}{\partial P} \frac{\partial V}{\partial N} < 0.$$

Анализ устойчивости солитонов на основе этого соотношения показал, что солитоны, отвечающие верхней ветви зависимости  $E = E(P, N)$  на рис. 4, нестабильны. В частности, точки с  $\partial E(P, N)/\partial P \neq 0$  при  $P = \pm P_0$ , присутствие которых необходимо для построения периодического закона дисперсии солитонов, находятся на неустойчивой ветви закона дисперсии. Этот факт еще раз демонстрирует то, что точку  $P = P_{\text{max}}$  можно интерпретировать только как точку окончания спектра солитонов.

При исследовании области  $K \sim J - K \sim J$ , в которой свойства солитонов наиболее интересны, возникает еще одна проблема, связанная с тем, что при немалых  $J - K/J$  характерный размер солитона  $1/|\theta'| \Delta x \sim x_0$  мо-

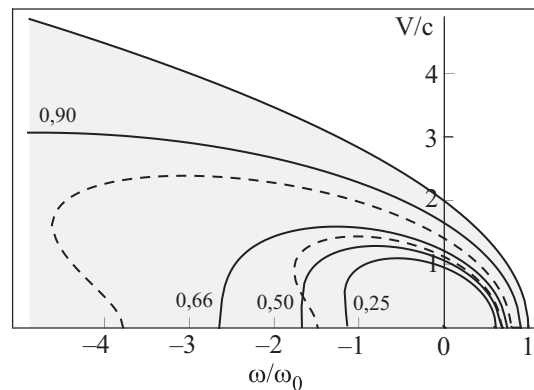


Рис. 3. Кривые  $N(\omega, V) = N_0 = \text{const}$  для некоторых значений  $K/J$  и  $N_0$ . Кривые, обозначенные сплошными линиями, описывают случай  $N_0 = 2$  для различных значений  $K/J$  (приведены цифрами около соответствующей кривой). Пунктирными линиями проведены кривые со значениями  $N_0 = 1$  и  $N_0 = 1,5$  для магнетика с  $K/J = 0,1$ .



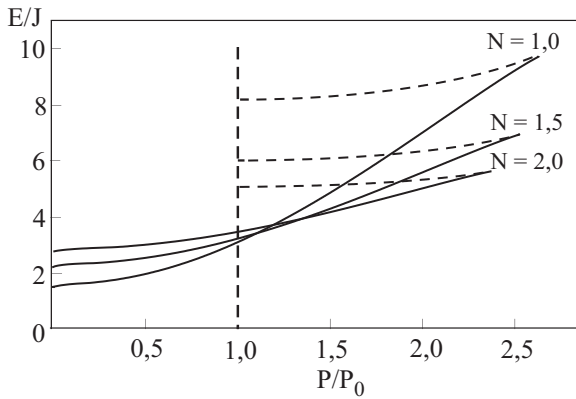


Рис. 4. Зависимость энергии солитона от его импульса для значения  $K/J=0,1$  для различных  $N$ . Соответствующие значения  $N$  указаны возле линий. Пунктиром обозначены нестабильные ветки зависимостей. Вертикальная штриховая линия показывает значение  $P = P_0$ , отвечающее точке окончания спектра, которая здесь находится в области неустойчивости решения.

жет стать сравнимым с постоянной решетки  $a$ . Континуальное приближение, строго говоря, применимо только в том случае, когда  $\Delta x \gg a$ . Для прецессионных солитонов в гейзенберговских магнетиках со слабой анизотропией характерный размер, так называемая магнитная длина  $l_0$ , составляет десятки и сотни постоянных решетки и существенно превышает межузельное расстояние  $a$ . Для нашей модели такую же роль играет параметр  $x_0 = (1/2)\sqrt{K/(J-K)}a$ , который велик только в пределе  $J \rightarrow K$ . Континуальное приближение применимо вблизи граничной линии (21), где амплитуда солитонов мала, область локализации солитона гораздо больше, чем  $x_0$ , а  $P$  и  $N$  стремятся к нулю. Однако при удалении от этой линии область локализации солитона порядка  $x_0$ , и для применимости континуального приближения нужно выполнение условия  $x_0 \gg a$ . В магнетике с гамильтонианом (1) такое условие является весьма жестким. Даже для достаточно малого  $J-K=0,1K$  величина  $x_0 = 1,5a$  и лишь незначительно превышает постоянную решетки  $a$ . В области параметров  $K \sim J-K \sim J$  типичной является ситуация с  $x_0 \sim a$  и даже  $x_0 \ll a$ . Поэтому в случае  $K \sim J-K \sim J$  заведомо не ясно, насколько адекватно континуальное приближение и полезно ли исследовать роль эффектов дискретности.

Обсудим кратко дискретную версию уравнений для переменных  $\theta_i$  и  $\gamma_i$ , заданных для каждого узла спиновой цепочки. Ограничимся случаем неподвижного солитона, для которого  $\gamma_i = \omega t$  и переменные  $\theta_i$  не зависят от времени. Для анализа солитонов воспользуемся вариационной процедурой, предложенной и численно реализованной в работе [25]. Будем искать условный минимум гамильтониана, фактически, классической энергии  $W(\theta_i)$ , по отношению к переменным  $\theta_i$  на  $i$ -м

узле, при условии, что число магнонов  $N = \sum(1 - \cos \theta_i)$  фиксировано. Для одномерного случая дискретная энергия  $W(\theta_i)$  может быть записана в виде

$$W(\theta_i) = - \sum_i [(J - K/2) \cos \theta_i \cos \theta_{i+1} + (K/2) \sin \theta_i \sin \theta_{i+1}]. \quad (30)$$

Мы ограничились анализом цепочки, содержащей 50 спинов, так как интересующие нас состояния сильно локализованы и влияние границ на них пренебрежимо мало. Как и следовало ожидать, при малых значениях  $(J-K)/K$  поведение зависимостей  $E(N)$  и  $\omega(N)$  просто повторяет кривые, полученные в континуальном приближении, и мы их не приводим. Интересно, что зависимость  $E(N)$  практически следует найденным выше закономерностям даже при умеренных значениях величины  $K/J$  таких, как  $K/J = 0,8$ , которому отвечает величина  $x_0 = a$  (см. рис. 5). Также важно, что даже при таком, по сути малом, значении  $x_0/a$  не возникают коллинеарные структуры, которые характерны для сильных эффектов дискретности (см. рис. 6).

При  $K/J = 0,5$ , для которого значение  $x_0 = 0,5a$  можно считать уже весьма малым, отчетливо виден эффект понижения величины предельной энергии солитона при больших  $N$ . Фактически этим и ограничиваются различия в поведении континуальной и дискретной моделей. По-прежнему нет коллинеарных состояний, а также немоноотонных зависимостей  $E$  от числа магнонов  $N$ , которые возникают в дискретной модели анизотропного ферромагнетика [25] уже при не очень малых значениях  $x_0 = a$ . Чтобы объяснить это явление, заметим, что энергия (30) тривиальным переобозначением переменных сводится к специфической дискретной модели ферромагнетика с чисто обменной анизотропией, для которой

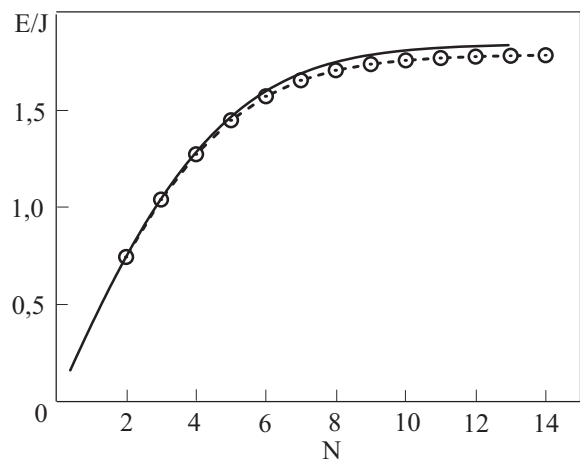


Рис. 5. Зависимость энергии солитона  $E$  (в единицах  $J$ ) от числа магнонов  $N$  при  $P=0$  для случая  $K=0,8J$ . Результаты континуального приближения приведены сплошной линией, символы — результат численного анализа дискретной модели.

Гочевым [26] было построено точное решение, определяющее структуру доменной стенки. Решение Гочева в применении к описываемой модели (30) имеет вид

$$\cos \theta_i = \text{th} \left[ \frac{a(i - i_0)}{x_{0D}} \right], \quad x_{0D} = \frac{a}{2 \ln(1 + \sqrt{(J - K)/K})}, \quad (31)$$

целое число  $i$  определяет номер узла,  $i_0$  — произвольное (не обязательно целое) число. Подчеркнем, что решение (31) применимо для любого соотношения  $J$  и  $K$ , таких, что  $0 \leq K < J$ . Величина  $x_{0D}$  имеет смысл ширины доменной стенки в дискретной модели, и при малых  $a i_0$  этот характерный размер может принимать любые значения, в том числе при  $K \ll J$  значение  $x_{0D} \sim a / \ln(J/K) \ll a$ .

Энергия доменной стенки в дискретной модели определяется формулой  $E_{DW} = 2\sqrt{J(J - K)}$  и не зависит от  $i_0$ . Иными словами, эта модель характеризуется полным отсутствием решеточного пиннинга, т.е. доменная стенка может быть расположена произвольным образом относительно решетки, и ее энергия не зависит от положения стенки. Понятно, что такие свойства, как и существование простого точного решения и отсутствие пиннинга, не могут быть общими, их наличие, вероятно, связано с какой-то скрытой

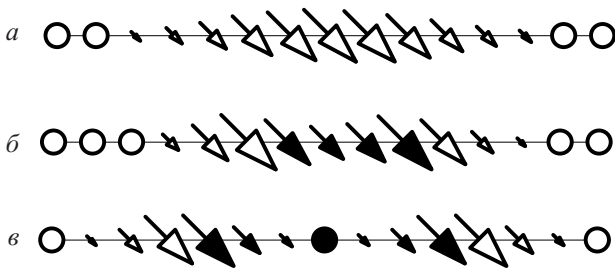


Рис. 6. Спиновая структура солитона для системы с  $K/J = 0,8$  при разных значениях  $N$ : 3 (а), 8 (б), 14 (в). Для наглядности изображена только часть фрагмента, выбранного для численного счета. Спиновое состояние для каждого узла представлено в виде трехмерного вектора  $\mathbf{z}$ , проекция которого ( $\cos \theta$ ), направленная перпендикулярно рисунку, определяет средний спин, а планарные компоненты ( $\sin \theta \cos 2\gamma$  и  $\sin \theta \sin 2\gamma$ ) — квадрупольные средние. Выбор  $\gamma$  произволен, на самом деле планарная компонента изображающего вектора вращается с частотой  $2\omega$ . Значения  $\theta$ , отличающиеся от 0 и  $180^\circ$  менее чем на  $\delta\theta \approx 10^\circ$  и соответствующие почти максимальному значению спина в направлении вверх и вниз, указаны соответственно светлыми и темными кружками. Значения  $\delta\theta \leq \theta_i \leq 90^\circ$  представлены светлыми стрелками, а  $90^\circ < \theta_i \leq 180^\circ - \delta\theta$  — темными стрелками. Явно виден переход от слабо локализованного состояния при  $N = 3$  к локализованному состоянию при  $N = 8$ , а затем к состоянию, содержащему две разнесенные доменные стенки.

симметрией задачи. Пиннинг возникает, например, при учете в энергии слагаемых вида  $\sin^2 \theta_i$  [27,28].

Отсутствие пиннинга позволяет надеяться, что континуальное приближение окажется достаточно успешным для описания солитона, поскольку при малых  $N$  оно применимо при любых соотношениях  $K$  и  $J$ , а при больших эффекты дискретности сводятся к перенормировке одного параметра, предельной энергии солитона. Представим зависимость энергии неподвижного солитона от  $N$  в виде той же простой функции, что и для предельного случая  $K \rightarrow J$  при  $P = 0$ , см. формулу (29),

$$E^D(N) = \varepsilon_0 N_1 \text{th} [N/N_1], \quad (32)$$

но используем для  $N_1$  вместо континуального ответа (26) значение  $N_1 = N_1^D = 2E_{DW}/\varepsilon_0 = \sqrt{J(J - K)}$ , согласованное с точной дискретной формулой для предельной энергии солитона, равной удвоенной энергии стенки.

Зависимость (32) изображена на рис. 7 и 8 штриховой линией. Видно, что она хорошо согласуется с данными прямого численного расчета солитонов в дискретной модели даже для предельно малого значения  $K/J = 0,2$ , для которого  $x_0 = 0,25a$ . Для такого хорошего согласия важно, что здесь полностью отсутствуют знакопеременные отклонения энергии от результата континуальной модели, которые наблюдаются для дискретных солитонов в магнетиках с сильными эффектами решеточного пиннинга [25]. Хорошее согласие напрямую связано с уникальным свойством решения Гочева, а именно, отсутствием эффектов решеточного пиннинга. Итак, наш анализ показал, что даже в случае  $x_0 \leq a$  и немалых  $N$ , когда характерный размер неоднородности в солитоне порядка  $x_0$  и существенно меньше  $a$ , результаты континуального описания достаточно хорошо описывают характер зависимости  $E(N)$  для солитона.

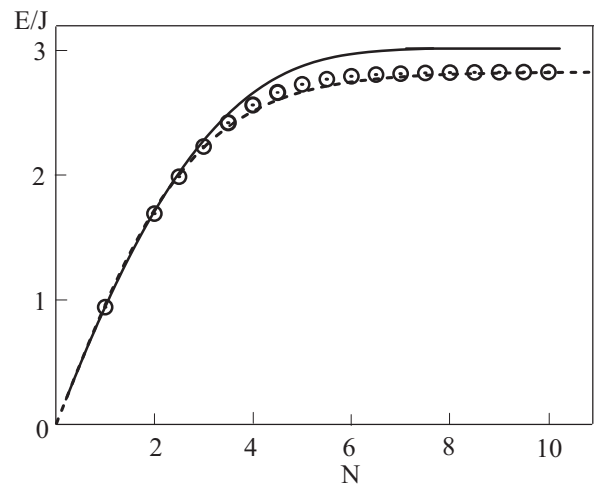


Рис. 7. Зависимость энергии солитона  $E$  (в единицах  $J$ ) от числа магнов  $N$  при  $P = 0$  для случая  $K = 0,5J$ . Штриховая линия проведена по «уточненной» формуле (32) с использованием энергии доменной стенки в дискретной модели Гочева.

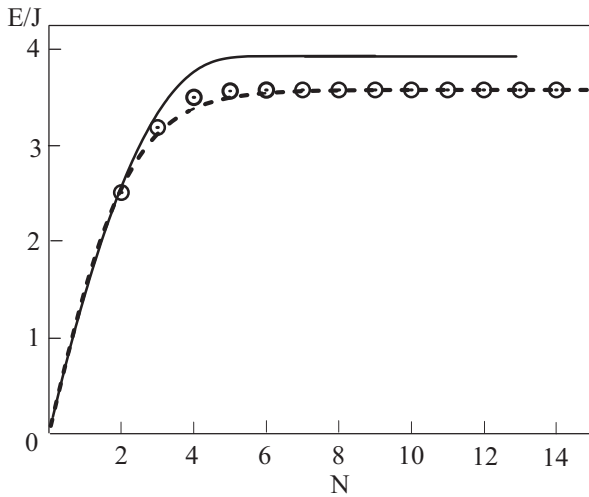


Рис. 8. Зависимость энергии солитона  $E$  (в единицах  $J$ ) от числа магнов  $N$  при  $P=0$  для случая  $K=0,2J$ .

Слабость эффектов пиннинга состоит в том, что даже при  $K/J=0,2$  и при больших  $N$  чисто коллинеарные состояния, характерные для систем с сильным пиннингом, не возникают. Качественно новый эффект дискретности состоит в появлении несимметричных состояний, см. рис. 9. Но эта асимметрия не проявляется в зависимости  $E(N)$ , различие энергий приведенных на этом рисунке состояний порядка  $5 \cdot 10^{-7}J$ , что близко к пределам точности нашей вычислительной программы и намного меньше характерных энергий возбуждений.

### 5. Заключение

В негеизенберговских ферромагнетиках со спином  $S=1$  и биквадратичным обменом с учетом квантового сокращения спина на узле существуют специфические магнитные солитоны, в центре которых среднее значение спина меньше номинального, и

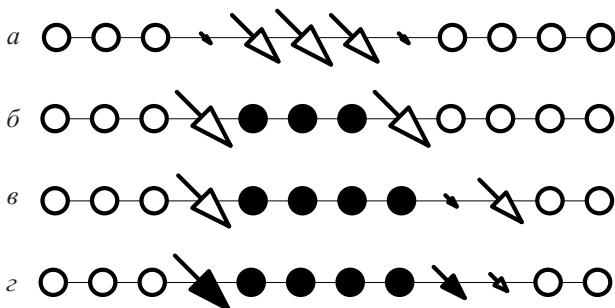


Рис. 9. Значения дискретной переменной  $\theta_i$  в солитоне для системы с  $K/J=0,2$  при разных значениях  $N$ : 2 (а), 8 (б); солитоны с одинаковой энергией и разной симметрией с  $N=12$  (в) и (з). Общая тенденция к локализации с ростом  $N$  в этом случае гораздо сильнее, чем при  $K/J=0,8$ . Обозначения спиновых состояний в виде стрелок здесь те же, что на рис. 6.

присутствуют колебания квадрупольных переменных  $\langle S_x S_y + S_y S_x \rangle$  и  $\langle S_x^2 - S_y^2 \rangle$ . При малых значениях параметра  $(J-K)/J$ , т.е. вблизи  $SU(3)$ -симметричной точки, в которой система является точно интегрируемой, такие солитоны имеют много общего с солитонными возбуждениями в легкоосном ферромагнетике. В частности, зависимость энергии солитонов модели (1) от импульса имеет также периодический характер, однако с другим периодом  $P_0$ . Принимая во внимание тот факт, что при  $J=K$  соответствующая квантовая задача является интегрируемой, можно надеяться на совпадении приведенных выше результатов квазиклассического квантования и точного квантового результата для зависимости  $E(P)$  при  $J \rightarrow K$ . Однако точные результаты для закона дисперсии спиновых комплексов в квантовой модели нам не известны, и этот вопрос остается открытым.

При удалении от интегрируемой  $SU(3)$ -симметричной точки сходство законов дисперсии солитонов в указанных моделях уменьшается. В частности, при  $K < K_c \approx 0,71J$  энергия перестает быть периодической функцией от импульса. При этом для каждого значения  $K/J$  есть максимальное значение импульса  $P_{\max} > P_0$ , которое возрастает при уменьшении  $K/J$  и может значительно превышать  $P_0$ . Зависимость  $E(P)$  тогда имеет две ветви, и только нижняя ветвь является устойчивой в области своего существования  $-P_{\max} \leq P \leq P_{\max}$ . Верхней ветви, определенной на интервале  $P_0 \leq |P| \leq P_{\max}$ , соответствуют нестабильные состояния.

Численный анализ дискретной решеточной модели показал хорошую применимость макроскопического подхода для описания основных характеристик неподвижных солитонов, например зависимости  $E(N)$ , даже при том, что характерный размер солитона может быть сравним с постоянной решетки. Единственный качественно новый эффект дискретности состоит в понижении симметрии солитона, но при этом влияние на энергию пренебрежимо мало. Как мы выяснили, причина такого поведения в том, что задача о солитонах в магнетиках с немалыми эффектами квантового сокращения спина при последовательном квазиклассическом анализе сводится к классической дискретной решеточной модели Гочева. Эта модель обладает уникальными свойствами, в частности, полным отсутствием эффектов решеточного пиннинга доменной стенки. Представляет интерес исследовать движущиеся солитоны в ферромагнетике с учетом квантового сокращения спина. Ранее такой анализ проводился для дискретных моделей гейзенберговских ферромагнетиков [27,28]. Однако исследование движения солитона в данной дискретной модели достаточно сложное, и обсуждение вопроса о поступательной динамике солитонов выходит за рамки этой работы.

Мы благодарны А.К. Колежуку за полезные обсуждения результатов работы. Работа частично поддержана грантом INTAS-05-1000008-8112 и совместным грантом Министерства образования и науки Украины и Государственного фонда фундаментальных исследований Ф25.2/081.

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
2. А.М. Kosevich, В.А. Ivanov and А.С. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
3. N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press (2004).
4. Ian Affleck, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 3047 (1989); I. Affleck, in: *Fields, Strings and Critical Phenomena*, E. Brèzin and J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland, Amsterdam (1990), p. 567.
5. H.J. Bethe, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931).
6. Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **71**, 372 (2000).
7. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Sov. Phys.* **8**, 153 (1935); Л.Д. Ландау, *Собр. тр.*, Наука, Москва (1969), т. 1, с. 128.
8. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems in Frontiers in Physics*, Addison Wesley (1991), v. 82.
9. А.М. Переломов, *УФН* **123**, 23 (1977); А. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* Springer-Verlag, Berlin (1986).
10. Т. Мориа, *Phys. Rev.* **117**, 635 (1960).
11. N. Papanicolaou, *Nucl. Phys.* **B305**, 367 (1988).
12. G. Fáth and J. Sólyom, *Phys. Rev.* **B51**, 3620 (1995).
13. Э.Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, Москва (1988).
14. В.М. Локтев, В.С. Островский, *ФНТ* **20**, 983 (1994).
15. В.А. Ivanov and А.К. Kolezhuk, *Phys. Rev.* **B68**, 052401 (2003).
16. K. Buchta, G. Fáth, Ö. Legeza, and J. Sólyom, *Phys. Rev.* **B72**, 054433 (2005).
17. Zhou Fei, *Quantum Spin Nematic States in Bose-Einstein Condensates*, *Electronic preprint ArXiv:cond-mat/0108473* (2002).
18. А.Е. Боровик, В.Ю. Попков, *ЖЭТФ* **98**, 316 (1990).
19. В.С. Островский, *ЖЭТФ* **91**, 1690 (1986).
20. Б.А. Иванов, А.Н. Кичижиев, Ю.Н. Мицай, *ЖЭТФ* **102**, 618 (1992).
21. Б.А. Иванов, Р.С. Химин, *ЖЭТФ* **104**, 307 (2007).
22. Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 90 (2006).
23. N.A. Mikushina and A.S. Moskvina, *Phys. Lett* **A302**, 8 (2002).
24. А.А. Жмудский, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 899 (1997).
25. В.А. Ivanov, А.Yu. Merkulov, V.A. Stephanovich, and С.Е. Zaspel, *Phys. Rev.* **B74**, 224422 (2006).
26. И.Г. Гочев, *ЖЭТФ* **85**, 199 (1983).
27. В.А. Ivanov and H.J. Mikeska, *Phys. Rev.* **B70**, 174409 (2004).
28. Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов, *ФНТ* **33**, 601 (2007).

## Dynamic solitons in a $S = 1$ ferromagnet

B.A. Ivanov and R.S. Khimin

A quasi-classical theory of spin dynamics for a  $S = 1$  ferromagnet is developed with taking into account the isotropic exchange interaction. For such a ferromagnet in the ground state, the quantum mean value of the spin in site  $\mathbf{m}$  takes its maximum, but the dynamics shows significant effects of quantum shrinkage of the spin. For such ferromagnets, however, there exists a special class of spin vibrations where  $\mathbf{m}$  retains its direction but varies essentially in length. Such excitations do not occur in normal Heisenberg ferromagnets, the description of which is based on the Landau–Lifshitz equation, or in normal Heisenberg spin Hamiltonians. Spin excitations of a finite energy or solitons considered as bound states of a great number of magnons  $N$  are derived analytically in the continuous approximation and obtained numerically. The pulse dependence of energy  $E(P, N)$  for a soliton with a given number of bound magnons is found out  $P$ . The continuous approximation offers an appropriate treatment of solitons in the parameters range where magnetization in the soliton differs essentially from those in neighboring lattice sites and the effects of discreteness are significant.

PACS: 05.45.Yv Solitons;  
75.10.Hk Classical spin models;  
75.10.Jm Quantized spin models.

Keywords: spin vibrations, isotropic exchange interaction, ferromagnet, soliton.