

УДК 532.5

ПОТЕНЦІАЛ ШВИДКОСТІ СТАЦІОНАРНОГО РУХУ В КАНАЛІ СИСТЕМИ ДВОХ ОДИНИЧНИХ ДЖЕРЕЛ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України,
вул. Желябова, 8/4, 03680, Київ,
e-mail: office@hydromech.com.ua

Одержано 07.04.2016

Одержано аналітичний розв'язок для потенціалу швидкості течії, генерованої стаціонарно рухомою системою двох одиничних джерел, симетрично розміщених відносно вертикальної площини симетрії каналу з прямокутною формою поперечного перерізу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стаціонарний рух, джерело, канал, потенціал швидкості

Получено аналитическое решение для потенциала скорости течения, генерированного стационарно движущейся системой двух единичных источников, симметрично расположенных относительно вертикальной плоскости симметрии канала с прямоугольной формой поперечного сечения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стационарное движение, источник, канал, потенциал скорости

An analytic solution for flow velocity potential generated by a stationary moving system of two singular sources symmetrically located with respect to a vertical plane of symmetry of a channel of rectangular cross section is obtained.

KEY WORDS: stationary movement, source, channel, velocity potential

ВСТУП

Одним із головних напрямків дослідження гідродинаміки руху суден є підхід, пов'язаний з використанням потенціалу швидкості одиночного рухомого джерела [1–4]. Якщо такий потенціал знайдено у вигляді, який задовольняє всім граничним умовам, то розв'язок лінійних задач визначення збуреного руху судна або підводного об'єкта, потенціалу швидкості в усій області середовища знаходиться простим інтегруванням по змоченій поверхні відповідного тіла вкладу від розподілених там джерел певної інтенсивності. Характер цього розподілу визначається з граничної умови непротікання. Такий метод дозволяє значно зменшити кількість невідомих при чисельній реалізації розв'язку задачі.

Визначальними у застосуванні такого підходу для розв'язання означеного класу задач стали роботи Кочина М.Є. [2] для глибокого моря та Хаскінда М.Д. [3] для шару рідини скінченої глибини, де знайдені розв'язки для відповідних потенціалів швидкості одиночного джерела. Використання цих потенціалів дозволяє одержати у вигляді квадратур розв'язок гідродинамічної задачі руху судна при його симетричному обтіканні. При несиметричному обтіканні необхідно використовувати також потенціали швидкості рухомих диполів. Вони можуть бути визначені диференціюванням потенціалів джерел у напрямку вісей цих диполів.

Виконані дослідження в цьому напрямку дозволили ще у 50–70-х роках минулого століття одержати загальні розв'язки задач гідродинаміки руху суден у вигляді квадратур [5, 6] як для глибоких, так і для мілких морів.

Для каналів з прямокутною формою поперечного перерізу відповідні задачі розв'язувалися з використанням нескінченної системи джерел, зеркально відображених відносно бічних стінок до рухомих джерел. Це дає можливість виконати граничні умови на бічних стінках каналу. Аналіз кінематичної картини обтікання тонкого судна і його динамічних характеристик, одержаних з використанням потенціалу одиночного джерела [7], показав добру узгодженість їх з попередніми роботами [8, 9], в яких використовувалися інші підходи для знаходження збуреного судном потенціалу швидкості.

Розрахунки хвильових полів за суднами та їх гідродинамічних характеристик з використанням потенціалу швидкості одиночного джерела виявилось складною обчислювальною задачею. Це пов'язано як з необхідністю знаходженням інтенсивності розподілених по корпусу судна джерел, так і з труднощами обчислення у виразі для потенціалу одиночного джерела подвійного інтегралу, в якому кожен із обох є збіжним невластним інтегралом. Відмічені труднощі є головним недоліком підходу з використанням таких потенціалів одиничних джерел, який обмежив його застосування. Розра-

хунки конкретних суден стали можливими лише з використанням електронно-обчислювальних машин. Це дозволило одержати вказаним методом розв'язки ряду лінійних задач для тонких тіл, коли розподіл інтенсивності джерел по поверхні судна відомий і визначається геометрією його обводів [6]. Для суден з довільними формами обводів розрахунки цим методом не проводились.

Незважаючи на постійно зростаючі можливості обчислювальних систем, розрахунок навіть лінійних режимів руху судна з реальними обводами залишається складною обчислювальною проблемою. У зв'язку з цим, доміантним напрямком розробки методик відповідних розрахунків стали чисельні методи. В роботі Гедда Г.Е. [10] розроблено метод граничних елементів (панелей) для виконання граничних умов на тілі і на вільній поверхні. Даусон С.В. [11] розробив метод розрахунку, який дозволяє враховувати умови розсіювання поверхневих хвиль попереду судна і за ним. Характерною особливістю цих методів є використання потенціалу одиничного джерела для необмеженого середовища, який співпадає там з функцією Гріна для рівняння Лапласа. Ці підходи набули широкого застосування. Нині в дослідних центрах, пов'язаних з суднобудуванням, для розрахунку гідродинаміки руху суден розроблені комплекси комп'ютерних програм, на основі яких створено ряд обчислювальних пакетів прикладного призначення.

Аналіз розв'язання задач гідродинаміки руху суден показує, що у випадку знаходження потенціалу одиничного джерела, який задовольняє всім граничним умовам, крім умови на змоченій поверхні судна, у вигляді, який не потребує великої кількості операцій для його обчислення у заданій точці, ефективність підходу з використанням таких потенціалів до відміченого класу задач різко зростає.

Саме з цією метою виконані дослідження даної роботи, де одержано аналітичний розв'язок лінійної стаціонарної задачі знаходження потенціалу системи двох одиничних джерел, які рухаються під вільною поверхнею рідини в каналі з прямокутною формою поперечного перерізу і знаходяться симетрично відносно вертикальної площини, що проходить через поздовжню вісь каналу.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розв'язується лінійна задача знаходження потенціалу швидкості збуреного руху $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, обумовленого рівномірним рухом зі швидкістю U системи двох одиничних джерел під вільною поверхнею ідеальної нестисливої рідини густиною ρ в

каналі з прямокутною формою поперечного перерізу. Джерела розміщені симетрично відносно вертикальної площини, що проходить через поздовжню вісь каналу. Ширина каналу $2l$, а товщина шару рідини в ньому h . Вибирається рухома система координат, початок якої знаходиться на вільній поверхні рідини на вісі симетрії каналу (посередині між джерелами), при цьому вісь Ox направлена в сторону напрямку руху джерел, а вісь Oz направлена вгору.

В безрозмірній формі, де в якості масштабів вибрано: довжини – товщину водного шару h , тиску – ρU^2 , потенціалу швидкості – Uh , відповідна задача для знаходження $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + G_1(x, y, z, \xi, -\eta, \zeta)$, де $G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ – потенціал відповідного одиничного джерела рухомої системи (ξ, η, ζ – координати джерела), формулюється у вигляді

$$\Delta G = 0 \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\lambda \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm l, \quad (4)$$

та умовами випромінювання

$$G \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Тут $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ – трьохвимірний оператор Лапласа, $\lambda = \frac{gh}{U^2}$ – обернене значення квадрату числа Фруда.

Для знаходження $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ використовується підхід, подібний до застосованого М.Д.Хаскіндом [3] для знаходження потенціалу одиничного джерела, яке рівномірно рухається в шарі рідини скінченної глибини, коли шуканий розв'язок знайдено у вигляді

$$G_1 = G_{1r} + G_{1h}, \quad (6)$$

де

$$G_{1r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + 2 + \zeta)^2},$$

а $G_{1h}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ – добавочна функція, яка враховує вплив вільної поверхні на G_1 і сама задовольняє умовам на дні і вільній поверхні.

Для знаходження G_{1h} використано інтегральне представлення для G_{1r} , яке задовольняє граничній умові на дні:

$$G_{1r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-k|z-\zeta|} + e^{-k(z+2+\zeta)} \right] e^{ik\omega} d\theta dk,$$

де $\omega = (x-\xi) \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta$. Розв'язок для G_{1h} знаходився у вигляді подібного представлення, а гранична умова на вільній поверхні для неї визначалась з відповідного представлення там складової G_{1r} .

Ця функція одержана у [3] у вигляді (в прийнятих тут позначеннях і обезрозміреній формі)

$$G_{1h} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k}(k \cos^2 \theta + \lambda)}{\lambda \operatorname{sh} k - k \cos^2 \theta \operatorname{ch} k} \times \\ \times \operatorname{ch} [k(\zeta + h)] \operatorname{ch} [k(z + h)] e^{ik\omega} dk d\theta.$$

З використанням цього виразу і пов'язані обчислювальні труднощі підходу при застосуванні потенціалу одиничного джерела для розв'язання задач гідродинаміки рухомого судна.

2. ПОВУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ $G_r(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$

Для розв'язання поставленої задачі для системи джерел використовується рівнозначне представлення виразу для G_{1r} після введення там горизонтальних хвильових чисел $k_1 = k \cos \theta$ і $k_2 = k \sin \theta$, де $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$:

$$G_{1r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D e^{i[k_1(x-\xi) + k_2(y-\eta)]} dk_1 dk_2,$$

де $D(k_1, k_2, z) = e^{-k|z-\zeta|} + e^{-k(z+2+\zeta)}$.

Для випадку руху двох симетрично розташованих відносно вертикальної площини ($\xi=0, \zeta$) одиничних джерел з наведеного вище для

$$G_r = G_{1r}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + G_{1r}(x, y, z, \xi, -\eta, \zeta)$$

має місце симетричне по y і η представлення

$$G_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D e^{ik_1(x-\xi)} \cos(k_2 y) \cos(k_2 \eta) dk_1 dk_2.$$

У випадку руху цієї системи джерел у каналі для виконання граничної умови на бічних стінках використовується метод розміщення для

кожного з джерел нескінченної системи дзеркально відображених відносно цих стінок відповідних одиничних джерел. Тоді ця складова розв'язку $G_r(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G_{1r}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + G_{1r}(x, y, z, \xi, -\eta, \zeta)$, що вже має задовольняти умові рівності нулю її похідної по y , представляється як

$$G_r = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D \times \\ \times e^{ik_1(x-\xi) - 2ik_2 n l} \cos(k_2 y) \cos(k_2 \eta) dk_1 dk_2.$$

Інтегрування по k_2 в цьому виразі може бути виконане з використанням формули Пуассона:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{int} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi(2\pi m).$$

В результаті складова $G_r(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ набуває вигляду, який задовольняє граничним умовам на дні і бічних стінках каналу:

$$G_r = \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi m \eta}{l}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} D_m e^{ik_1(x-\xi)} dk_1. \quad (7)$$

Тут $D_m = e^{-k_m|z-\zeta|} + e^{-k_m(z+2+\zeta)}$, $a_m = 0.5$ при $m = 0$ і $a_m = 1$ при $m \geq 1$, а $k_m = \sqrt{k_1^2 + \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2}$. При $m = 0$ $k_m = |k_1|$.

Одержаний вираз для G_r визначає граничну умову на вільній поверхні для складової G_h таким чином, щоб там виконувалась відповідна умова для $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$.

3. ПОВУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$

Розв'язок для складової

$$G_h = G_{1h}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + G_{1h}(x, y, z, \xi, -\eta, \zeta)$$

знаходиться у вигляді інтегрального представлення, відповідного по структурі виразу (7), в якому з очевидністю виконується гранична умова на бічних стінках каналу:

$$G_h = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi m \eta}{l}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-\xi)} \bar{G}_{hm}(k_1, z, \xi, \zeta) dk_1. \quad (8)$$

З (1)–(5) та (8) для \bar{G}_{hm} формулюється гранична задача (' означає похідну по z):

$$\bar{G}_{hm}'' - k_1^2 \bar{G}_{hm} = 0. \quad (9)$$

з граничними умовами

$$k_m \lambda \bar{G}'_{hm} - k_1^2 \bar{G}_{hm} = -\frac{2a_m}{l} (k_m \lambda b_m - k_1^2 d_m) \quad (10)$$

при $z = 0$,

$$\bar{G}'_{hm} = 0 \quad \text{при } z = -1, \quad (11)$$

$$\bar{G}_{hm} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Такі задачі мають розв'язок

$$\bar{G}_{hm} = -\frac{\lambda k_m b_m - k_1^2 d_m}{\lambda k_m \text{sh } k_m - k_1^2 \text{ch } k_m} \text{ch } [k_m(z+1)], \quad (13)$$

де

$$b_m = \frac{a_m}{l} [e^{k_m \zeta} - e^{-k_m(2+\zeta)}],$$

$$d_m = \frac{a_m}{l} [e^{k_m \zeta} + e^{-k_m(2+\zeta)}].$$

В комплексній k_1 -площині \bar{G}_{hm} задовольняють умовам леми Жордана, тому для їх визначення використовується апарат теорії лишків. Ці функції в k_1 -площині мають полюси в точках, де виконується рівність

$$\lambda k_m \text{sh } k_m - k_1^2 \text{ch } k_m = 0 \quad (14)$$

а також точки розгалуження $k_1 = \pm \frac{i\pi m}{l}$ для всіх m .

Рівняння (14) для кожного з m має два дійсних коренів $\pm k_{1mr}$, які при $m = 0$ за умови $\lambda > (1 \text{ Fr} < 1)$ представляють поперечні, а при $m \geq 1$ (для всіх λ) - поздовжні хвилі в каналі, та нескінченну множину чисто уявних коренів $\pm i k_{1mn}$. Функції \bar{G}_{hm} для всіх m на протилежних берегах розрізів вздовж уявних осей не змінюють своїх значень, а обхід точок розгалуження надає вкладу у розв'язок. Отже, вклад у загальний розв'язок G_{hm} дають лише означені вище полюси.

В результаті, з (13), (14) для

$$G_{hm} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-\xi)} \bar{G}_{hm}(k_1, z, \xi, \eta) dk_1$$

на підставі використання теореми Коші, після виділення дійсних частин одержаних виразів, мають місце наступні розв'язки, які задовольняють граничним умовам задачі (3)–(5):

$$G_{h0}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{2\pi(\lambda b_{0r} - k_{10r} d_{0r})}{(\lambda - 1) \text{ch } k_{10r} - k_{10r} \text{sh } k_{10r}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \text{ch } [k_{10r}(z+1)] \sin[k_{10r}(x-\xi)] H(\xi-x) + \\ & + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda b_{0rn} + k_{10n} d_{0rn}}{(\lambda - 1) \cos k_{10n} + k_{10n} \sin k_{10n}} \times \\ & \times \cos[k_{10n}(z+1)] e^{-k_{10n}(x-\xi)} \text{Sign}(\xi-x), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{hm}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= \frac{4\pi(\lambda k_{mr} b_{mr} - k_{1mr}^2 d_{mr})}{B_{mr}} \times \\ & \times \text{ch } [k_{mr}(z+1)] \sin[k_{1mr}(x-\xi)] H(\xi-x) + \\ & + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{mn}(\lambda k_{mn} b_{min} - k_{1mn}^2 d_{mrn})}{k_{1mn} B_{mn}} \times \\ & \times \cos[k_{mn}(z+1)] e^{-k_{1mn}(x-\xi)} \text{Sign}(\xi-x), \quad (16) \end{aligned}$$

де

$$B_{mr} = \lambda(1 - k_{1mr}^2) \text{sh } k_{mr} + k_{mr}(\lambda - 2) \text{ch } k_{mr},$$

$$B_{mn} = [(\lambda + k_{1mn}^2) \sin k_{mn} + k_{mn}(\lambda - 2) \cos k_{mn}],$$

$$k_{mr} = \sqrt{k_{1mr}^2 + \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2}, \quad k_{mn} = \sqrt{k_{1mn}^2 - \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2},$$

$$b_{0r} = \frac{1}{l} [e^{k_{10r} \zeta} - e^{-k_{10r}(2+\zeta)}],$$

$$d_{0r} = \frac{1}{l} [e^{k_{10r} \zeta} + e^{-k_{10r}(2+\zeta)}],$$

$$b_{mr} = \frac{1}{l} [e^{k_{mr} \zeta} - e^{-k_{mr}(2+\zeta)}],$$

$$d_{mr} = \frac{1}{l} [e^{k_{mr} \zeta} + e^{-k_{mr}(2+\zeta)}],$$

$$b_{0rn} = \frac{1}{l} \{ \cos(k_{10n} \zeta) - \cos[k_{10n}(2+\zeta)] \},$$

$$d_{0rn} = \frac{1}{l} \{ \cos k_{10n} \zeta + \cos[k_{10n}(2+\zeta)] \},$$

$$b_{min} = \frac{1}{l} \{ \sin(k_{mn} \zeta) + \sin[k_{mn}(2+\zeta)] \},$$

$$d_{mrn} = \frac{1}{l} \{ \cos(k_{mn} \zeta) + \cos[k_{mn}(2+\zeta)] \},$$

а $H(\xi-x)$ – одинична функція Хевісайда.

Дійсні частини інтегралів розв'язку G_r у (7), використавши відомі інтегральні співвідношення [14], можна представити у явному вигляді: для $m = 0$

$$G_{r0I} = \int_0^{\infty} \cos[k_1(x-\xi)] [e^{-k_1|z-\zeta|} + e^{-k_1(z+2+\zeta)}] dk_1 =$$

$$= \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} + \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (z+2+\zeta)^2},$$

і для $m \geq 1$

$$G_{rmI} = \int_0^{\infty} \cos[k_1(x-\xi)] D_m dk_1 = \frac{1}{l} (I_{1m} + I_{2m}),$$

де

$$D_m = e^{-k_m|z-\zeta|} + e^{-k_m(z+2+\zeta)}$$

$$I_{1m} = \frac{\pi m|z-\zeta|}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}} \times$$

$$\times K_1 \left[\frac{\pi m}{l} \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} \right],$$

$$I_{2m} = \frac{\pi m(z+2+\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (z+2+\zeta)^2}} \times$$

$$\times K_1 \left[\frac{\pi m}{l} \sqrt{(x-\xi)^2 + (z+2+\zeta)^2} \right],$$

а $K_1[\]$ – модифіковані функції Бесселя.

З одержаного представлення для G_r та виразів (15), (16), які визначають розв'язки для G_{h0} та G_{hm} , шуканий розв'язок для потенціалу швидкості розглянутої системи одиничних джерел представляється аналітичним виразом

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{2}{l} G_{r0I} + G_{h0} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{l} G_{rmI} + G_{hm} \right) \cos \left(\frac{\pi m y}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi m \eta}{l} \right). \quad (17)$$

ЗАКЛЮЧЕННЯ

В роботі одержано розв'язок лінійної задачі знаходження потенціалу швидкості, генерованого системою двох одиничних джерел, які рухаються з постійною швидкістю в каналі з прямокутною формою поперечного перерізу і розташовані симетрично відносно вертикальної площини, що проходить через поздовжню вісь каналу. Розв'язок знайдено в аналітичному вигляді, що дозволяє ефективно використовувати його при розв'язанні лінійних задач гідродинаміки руху суден з симетричними обводами вздовж вісі каналу. Використання такого потенціалу в стаціонарних задачах руху судна в каналі зводить ці задачі до знаходження розподілу густини джерел лише на поверхні судна. Це

суттєво зменшує кількість невідомих у сучасних методах чисельного розрахунку гідродинаміки руху суден, таких як панельний метод і метод граничних елементів. Враховуючи відмічені переваги, використання одержаного розв'язку може бути корисним при розв'язанні лінійних задач гідродинаміки руху суден у каналах.

1. *Michell J.H.* The Wave -Resistance of a Ship // Philosophical Magazine. – 1898. – 45, N 272. – P. 106–123.
2. *Кочин Н.Е.* О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. – Собр. соч. т.2: АН СССР, 1949. – 105 - 182 с.
3. *Хаскинд М.Д.* Общая теория волнового сопротивления при движении тела в жидкости конечной глубины // Прикладная математика и механика. – 1945. – 9, N 3. – С. 257–264.
4. *Костюков А.А.* О формулах для вычисления волнового сопротивления и подъемной силы тел, погруженных в жидкость // Изв. АН СССР, ОТН. – 1954. – N 9. – С. 235–242.
5. *Костюков А.А.* Теория корабельных волн и волнового сопротивления. – Л.: Судпромгиз, 1959. – 311 с.
6. *Басин А.М., Веледницкий И.О., Лязовицкий А.Г.* Гидродинамика судов на мелководье. – Ленинград: Судостроение, 1976. – 320 с.
7. *Костюков А.А.* О волнообразовании и волновом сопротивлении судов в ограниченном фарватере жидкости // Прикладная математика и механика. – 1955. – 19, N 5. – С. 557–570.
8. *Келдыш М.В.Ю Седов Л.И.* Теория волнового сопротивления в канале конечной глубины // Труды конференции по теории волнового сопротивления. – Москва. – 1937. – С. 143–157.
9. *Сретенский А.М.* Теоретическое исследование о волновом сопротивлении // Труды ЦАГИ. – 1937. – вып. 9. – С. 47–52.
10. *Gadd G.E.* A method for computing the flow and surface wave pattern around full forms // Trans RINA 1976. – London. – 1976. – P. 207–220.
11. *Dowson C.W.* A practical computer method for solving wave problems // In: Proceedings of second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. – Berkeley. – 1977. – P. 30–39.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – Москва: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 800 с.