

УДК 537.84

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРИ РАЗОГРЕВЕ ФЕРРОЖИДКОСТНОГО УПЛОТНЕНИЯ

И. Т. СЕЛЕЗОВ¹, А. В. РАДИОНОВ², С. А. САВЧЕНКО¹

¹Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4

²Предприятие "Феррогидродинамика", Николаев
ADRES

e-mail: selezov@yandex.ua

Получено 15.06.2015

В настоящей работе представлено решение задачи нестационарного теплового режима феррожидкостного уплотнения на основе уравнений феррогидродинамики, которые приводятся к безразмерному виду с введением критериев подобия Рейнольдса, Прандтля и Бринкмана, полагаемых в дальнейшем замороженными. Проведенный в статье приближенный аналитический анализ достигается ценой жестких ограничений, но дает возможность получить новые результаты о тепловых полях. Определена функция разогрева на основе задачи о движении жидкости в кольцевой области по Лойцянскому и вычислении теплового источника, пропорционального квадрату тензора скоростей деформации по Ландау. Рассматривается задача о распространении тепла в радиальном направлении в трех областях: в нижней (вал), внутренней (жидкость) и внешней (корпус). Представлена постановка соответствующей начально-краевой задачи в случае ступенчатой функции включения источника разогрева (функция Хевисайда) с коэффициентом, учитывающим все параметры разогрева. Применяется преобразование Лапласа по времени и построены аналитические решения из анализа обращения Римана-Меллина в комплексной плоскости. Установлено, что доминирующий вклад дает один вычет. Применением интеграла Дюамеля и его вычисления по частям получено решение в замкнутом виде для произвольных нарастающих от нуля во времени функций разогрева. На этой основе проведены расчеты для некоторых реальных сценариев. Полученные результаты могут быть полезными в расчетах реальных уплотнений, позволяющие задавать различные критерии подобия, в которые входят конкретные параметры: вязкость, теплоемкость и др.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: феррожидкостный уплотнитель, нестационарное температурное поле, преобразование Лапласа, интеграл Дюамеля

В даній роботі наведено розв'язок задачі нестационарного теплового режиму феррогідного ущільнення на основі рівнянь феррогідродинаміки, які приводяться до безрозмірного вигляду з введенням критеріїв подібності Рейнольдса, Прандтля і Брінкмана, які вважаються в подальшому замороженими. Проведений в статті наближений аналітичний аналіз досягається ціною жорстких обмежень, але дає можливість одержати нові результати про теплові поля. Визначена функція розігріву на основі задачі про рух рідини в кільцевій області по Лойцянському та обчисленні теплового джерела, пропорційного квадрату тензора швидкостей деформації по Ландау. Розглядається задача про поширення тепла в радіальному напрямку в трьох областях: у нижній (вал), внутрішній (рідина) та зовнішній (корпус). Наведено постановку відповідної початково-крайової задачі у випадку ступеневої функції вмикання джерела розігріву (функція Хевісайда) з коефіцієнтом, що враховує всі параметри розігріву. Застосовується перетворення Лапласа за часом і побудовано аналітичні розв'язки з аналізу обернення Рімана-Мелліна в комплексній площині. Встановлено, що домінуючий вклад дає один лишок. Застосуванням інтеграла Дюамеля та його обчислення по частинам отримано розв'язок у замкнутому вигляді для довільних нарастаючих від нуля за часом функцій розігріву. На цій основі проведено розрахунки для деяких реальних сценаріїв. Отримані результати можуть бути корисними в розрахунках реальних ущільнювачів, що дозволяють задавати різні критерії подібності, в які входять конкретні параметри: в'язкість, теплоємність та ін.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: феррогідний ущільнювач, нестационарне температурне поле, перетворення Лапласа, інтеграл Дюамеля

This paper presents a solution of the problem of a transient thermal regime for a ferrofluid seal on the basis of ferrohydrodynamics equations which are reduced to a dimensionless form with the introduction of similarity criteria of Reynolds, Prandtl and Brinkman assumed in further to be frozen. Approximate analytical analysis performed in this paper is achieved at the cost of strong restrictions but gives you the opportunity to obtain new results on the thermal fields. Define The function of heating is found on the basis of the problem of fluid motion in the annular region following Loitsanski and calculating the heat source, which is proportional to the square of the strain rate tensor following Landau. A problem of the propagation of heat in radial direction in three regions is considered: in the bottom (shaft), internal (fluid) and external (body). A statement of the corresponding initial boundary value problem in the case of entering the step-type function of heating source (the Heaviside function) with a coefficient taking into account all the parameters of heating. The Laplace transform in time is applied and analytical solutions are constructed from the analysis of the Riemann-Mellin inverse in the complex plane. It is found that the dominant contribution comes from a single residual. Using the Duhamel integral and its computation in parts, the solution in a closed form is obtained for arbitrary functions of heating time increasing from zero On this basis the calculations for some real scenarios are carried out. The results can be useful in calculating the real seals allowing to consider different similarity criteria, which include the specific parameters: viscosity, heat capacity etc.

KEY WORDS: ferrofluid seal, nonstationary temperature field, Laplace transform, Duhamel integral

ВВЕДЕНИЕ

Исследование температурных полей в магнитожидкостных (МЖ) уплотнителях представляет большой прикладной интерес. Такие уплотнители особенно эффективны в больших промышленных установках и в подводных аппаратах, когда магнитное поле удерживает феррожидкость в зазоре уплотнителя.

При вращении вала происходит разогрев феррожидкости в уплотнителе до определенного предела 50 – 60°C, когда наступает баланс ввода и излучения тепла.

Поведение магнитных жидкостей в уплотнителях исследовалось с применением численных методов во многих работах, отметим [1, 4, 5, 13 – 15, 24].

Конвективные и диффузионные процессы, имеющие непосредственное отношение к поведению феррожидкостей в зазоре, рассматривались в работах [2, 7 – 9, 20, 21, 26].

Результаты численного исследования МЖ уплотнителей на основе проведенных авторами экспериментов и сопоставление теоретических результатов с экспериментальными данными представлены в [16]. Исследование распространения волн в упругой цилиндрической оболочке с магнитной жидкостью, моделирующей кровеносный сосуд, проводилось в [17, 19].

В данной статье построено аналитическое решение для функции разогрева, нарастающей от нуля до некоторой стационарной величины, с применением интеграла Дюамеля. Проводится анализ температурных полей на основе полученных решений при задании величин конкретных параметров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Традиционная модель феррогидродинамики в случае вязкой несжимаемой среды в ортогональной системе координат $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ представляется системой уравнений [3, 18]

$$\rho \left[\partial \vec{V} / \partial t + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} \tilde{P} + \eta_d \nabla^2 \vec{V} + \mu_0 (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (2)$$

$$\partial T / \partial t + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \chi \nabla^2 T + q(t), \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0, \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)], \quad \vec{M} = M \vec{H} / H, \quad (5)$$

$$M = M_0 - K_p (T - T_0) + \chi_m (H - H_0). \quad (6)$$

Основные обозначения приведены в [3, 18]. Физические свойства магнитных жидкостей описаны в [22]. В магнитных жидкостях \vec{M} и \vec{H} коллинеарны, как это видно из второго соотношения в (5), а скалярная величина M/H в общем случае характеризует намагниченность феррожидкости и определяется сложной функцией $M(H)$ и зависит от других параметров тоже (6). В некоторых случаях при постоянных величинах плотности ρ и температуры T из (6) получают $\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{\rho, T} = \chi_r$ и

тогда принимается $\frac{M}{H} = \chi_r$ в (5) (стр. 69 в [3]). Более подробное изложение приведено в работе Розенцвейга – одного из основателей физики магнитных жидкостей [25] и представлено затем в [27].

Аналитический анализ задачи для уплотнения на основе системы уравнений (1)–(6) не реализуем. Можно рассматривать только некоторые частные случаи и то с применением численных методов, отмеченных во введении. Аналитический анализ возможен только на введении сильных упрощений, которые приведены ниже.

Далее рассматриваем задачу в цилиндрической системе координат r, θ, z в области Ω_2 , занимаемой феррожидкостью между радиусом вала r_s и радиусом корпуса r_e ,

$$\Omega_2 = \{ (r, \theta, z) \mid r_s \leq r \leq r_e, \quad 0 < \theta \leq 2\pi, \quad -l_1 \leq z \leq l_1 \},$$

где $-l_1$ и l_1 – концы уплотнителя.

Система уравнений (1)–(5) после указанных выше упрощений без учета конвективного члена $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T$ в безразмерных величинах, отнесенных к радиусу вала r_s и его тангенциальной скорости $V_{0\theta}^s$, записывается в виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} \tilde{P} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} + \chi_r (\vec{H} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\text{PrRe}} \nabla^2 T + C f(t), \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0, \quad \vec{M} = M \vec{H} / H. \quad (9)$$

Величина $q(t)$ из (3) записывается в (8) как $C f(t)$, где C – амплитудное значение функции разогрева $C = \text{Br} \frac{1}{P} \dot{S}_{r\theta}^2, \dot{S}_{r\theta}$ – тензор скоростей деформации

вращающейся жидкости, а $f(t)$ – изменение ее во времени.

В (7)–(8) приняты обозначения: $Pr = \frac{\nu_k}{\chi}$ – число Прандтля, описывающее гравитационную конвекцию, $\nu_k = \eta_d/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости, η_d – коэффициент динамической вязкости, $\chi = \frac{k_t}{\rho c_p}$ – коэффициент температуропроводности, k_t – коэффициент теплопроводности, $Re = \frac{V_{0\theta}^s r_s}{\nu_k}$ – число Рейнольдса, в результате произведения чисел Рейнольдса и Прандтля получается число, которое будем обозначать как $P, P = PrRe, V_{0\theta}^s$ – тангенциальная скорость поверхности вала, $Bg = \frac{\eta_d V_{0\theta}^s}{k_t T_0}$ – число Бринкмана, характеризующее теплообмен в слое жидкости (числитель характеризует диссипативные тепловыделения в магнитной жидкости, знаменатель – отвод тепла), T_0 – начальная температура, χ_r – коэффициент, учитывающий свойства магнитной жидкости $C = Bg \frac{1}{P} \dot{S}_{r\theta}^2$.

Приведенная система (7)–(9) – это система восьми скалярных уравнений для определения 8 неизвестных $\vec{P}, T, V_n, T_n, n = 1, 2, 3$. Она включает два существенно нелинейных члена, и построение аналитических решений проблематично.

В дальнейшем при анализе разогрева влияние магнитного поля на компоненты скорости в (8) не учитывается и определяется тензор из обычной задачи для тензора скоростей деформации без учета влияния магнитного поля на скорость [12]. При этом влияние всех параметров учитывается в амплитудном коэффициенте C .

2. ХАРАКТЕРИСТИКА УПРОЩЕННОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

В цилиндрической системе координат r, θ, z рассматриваются три области (рис. 1): Ω_1 – вал, Ω_2 – слой жидкости с зоной разогрева, Ω_3 – внешний корпус; кроме того, h – толщина слоя жидкости, x – соответствует радиальной координате r . Задача рассматривается осесимметричная.

Максимальный разогрев от вращающейся жидкости имеет место в середине уплотнителя, так что можно пренебречь влиянием торцов и рассматривать плоскую задачу, полагая производные по z равными нулю. После осреднения по толщине получаем функцию, зависящую от времени t , с коэффициентом C , включающим все параметры задачи, которые принимаются "замороженными". В

общем случае параметры зависят от магнитного поля и температуры и в различных конкретных ситуациях они разные и коэффициент C тоже разный. На этой основе формулируется начально-краевая задача распространения тепла вдоль радиальной координаты $r = x$. Толщина слоя намного меньше областей вала Ω_1 и корпуса $\Omega_3, h/r_s \ll 1, h/r_e \ll 1$, поэтому они принимаются полубесконечными при формулировке задачи. Ось Ox направлена от точки поверхности вала $x = 0$ до точки поверхности корпуса $x = h$ и далее $x > h$. В пределах малой средней зоны по $z, -\varepsilon < z < \varepsilon$, задачу можно считать плоской с изменением функций вдоль радиальной координаты r , т.е. не учитывать отвод тепла в боковые области (производные по z равны нулю). В дальнейшем при формулировке задачи радиальную координату r обозначаем как $x, r = x$, а в качестве характерной длины принимаем толщину зазора $h = r_e - r_s$. Температурная зависимость функции разогрева принимается в виде функции Хевисайда, соответствующей мгновенному включению. Известно, что решение линейной задачи для функции Хевисайда позволяет получить решения для произвольной функции разогрева с помощью интеграла Дюамеля.

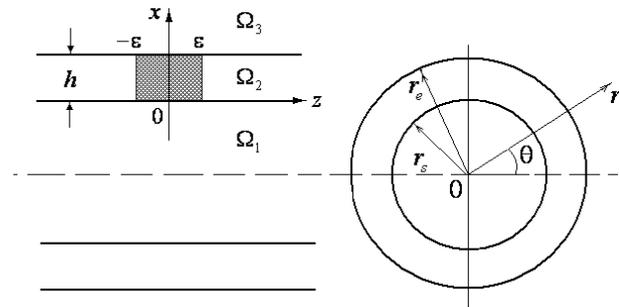


Рис. 1. Геометрия задачи

В статье рассмотрен класс функций разогрева, нарастающих от нуля, для которых интеграл Дюамеля вычисляется в квадратурах. Проведены сравнения результатов для разных функций разогрева. Поставленная начальнокраевая задача решается аналитически на основе интеграла Римана–Меллина [6]. После анализа в комплексной плоскости решение сведено к вычислению вычетов. Показано, что основной вклад дает один основной вычет. Соответствующие решения для температур T_1, T_2 и T_3 представлены формулами (24)–(26).

Рассматривается система уравнений Навье – Стокса в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Последний член в (8) включает ква-

драт тензора скоростей деформации, учитывающий процессы внутреннего трения в жидкости, когда различные ее участки движутся с различной скоростью. Ненулевая компонента поля скоростей в безразмерных величинах равна

$$V_{\theta}(r) = \frac{r_e^2 - r^2}{r} \frac{1}{r_e^2 - 1}.$$

В системе координат (r, θ, z) нетривиальная компонента тензора скоростей деформации после вычислений имеет вид

$$\dot{S}_{r\theta} = \dot{S}_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} - \frac{V_{\theta}}{r} \right) = -\frac{r_e^2}{r^2 (r_e^2 - 1)}.$$

Тензор скоростей деформации (последний член в правой части уравнения (8)) вычисляется на основе известного решения для вращающейся вязкой жидкости в зазоре и осредняется по площади так, что начальное распределение температуры по толщине зазора равномерное:

$$C = \text{Br} \frac{1}{P_2} \left\{ \frac{r_e^4}{8 (r_e^2 - 1)^2} \times \left(\frac{3r_e^4 \ln(r_e) (\ln(r_e) - 2) + 6r_e^2 (r_e^2 + \ln(r_e) + 1) - 1}{3r_e^3} - \frac{11}{3} \right) \right\} = \text{const}, \quad (10)$$

где $P_2 = \frac{V_{0\theta}^s r_s}{\chi_2}$, r_s – радиус вала ($r_s^* = \frac{r_s}{r_e} = 1$), r_e – радиус внешней границы зазора.

Из (10) видно, что величина $C = \frac{\text{Br}}{P_2} \{ \}$ зависит от числа Бринкмана Br , от числа P_2 и от выражения в фигурных скобках, зависящего только от толщины зазора. Следовательно, разогрев феррожидкости в зазоре определяется величиной C .

Приближенный анализ проводится для плоского элемента в зазоре (область Ω_2), нижняя грань которого контактирует с валом (область Ω_1), а верхняя – с внешним корпусом Ω_3 . Влияние магнитного поля на поведение жидкости учитывается в числе Бринкмана Br .

Задача рассматривалась на основе уравнений (10) и (12) для внутренней области от точки $x = 0$, соответствующей радиусу вала r_s , до точки $x = 1$, соответствующей корпусу r_e , что соответствует величине $h = r_e - r_s$. Величина h принята в качестве характерной, тогда $x \in [0, 1]$. В этом случае область вала и область корпуса в связи с малостью h рассматриваются как полубесконечные, $r_s/h \gg 1, r_e/h \gg 1$.

Начально-краевая задача для температуры формулируется с учетом (10) и приведенных выше соображений:

уравнение, описывающее температурное поле в зазоре

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{P_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + CH(t), \quad \text{в } \Omega_2, \quad (11)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда;

уравнения во внутренней и внешней областях ($i = 1, 3$)

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{P_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \quad \text{в } \Omega_1 \text{ и } \Omega_3, \quad (12)$$

условия сопряжения на границе раздела вала и МЖ-зазора

$$k_1 T_1|_{x=0} = k_2 T_2|_{x=0},$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (13)$$

условия сопряжения на границе раздела МЖ-зазора и корпуса

$$k_3 T_3|_{x=1} = k_2 T_2|_{x=1},$$

$$k_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=1} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=1}. \quad (14)$$

Коэффициент теплопроводности k_t обозначаем как k_1, k_2, k_3 .

Условия убывания решений T_1 и T_3 на бесконечности:

$$T_1(x, t)|_{x=-\infty} = 0, \quad T_3(x, t)|_{x=\infty} = 0. \quad (15)$$

Начальные условия предполагаются нулевыми:

$$T_n(x, t)|_{t=0} = 0, \quad n = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Решение задачи (11)–(16) определяет распределение температурных полей в областях $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Перепад температур не должен быть большим, иначе уплотнение выйдет из строя при любой системе охлаждения [3].

3. РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ (ФУНКЦИИ ХЕВИСАЙДА)

В дальнейшем для решения задачи (13)–(16) применяем преобразование Лапласа [6]:

$$T_k^L(x, p) = \int_0^{\infty} T_k(x, t) e^{-pt} dt,$$

$$T_k(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} T_k^L(x, p) e^{pt} dp. \quad (17)$$

Величина x в (17) рассматривается как параметр.

С учетом приведенных выше замечаний и выражения (17) получаем из (13)–(16) в пространстве изображений Лапласа уравнения

$$\frac{d^2 T_1^L}{dx^2} - P_1 p T_1^L = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 T_2^L}{dx^2} - P_2 p T_2^L = -P_2 \frac{1}{p} C \quad \text{в } \Omega_2, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 T_3^L}{dx^2} - P_3 p T_3^L = 0 \quad \text{в } \Omega_3. \quad (20)$$

Решения уравнений (18)–(20) записываются в виде

$$T_1^L(x) = C_1 e^{\sqrt{P_1 p} x}, \quad (21)$$

$$T_2^L(x) = C_2 e^{\sqrt{P_2 p} x} + C_3 e^{-\sqrt{P_2 p} x} + \frac{1}{p^2} C, \quad (22)$$

$$T_3^L(x) = C_4 e^{-\sqrt{P_3 p} x}, \quad (23)$$

где коэффициенты C_k ($k = 1, 2, 3$) определяются из условий убывания внешних решений ($i = 1, 3$) на бесконечности и преобразованных по Лапласу условий сопряжения (13)–(14).

На основе (18)–(23) была рассмотрена начально–краевая задача и построены точные аналитические решения для температурных полей в трех областях Ω_1, Ω_2 и Ω_3 . Эти решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{C}(x, t) &= e^{p_2 t} e^{\sqrt{P_1 p_2}(x-1)} \times \\ &\times \left(2e^{2\sqrt{P_1 p_2}(r_e+1)} \sqrt{P_3} + e^{2\sqrt{P_1 p_2}} P_{23}^- - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\sqrt{P_1 p_2} r_e} P_{23}^+ \right) : \\ &: \left(e^{2\sqrt{P_2 p_2}} P_{23}^- P_{21}^- - e^{2\sqrt{P_2 p_2} r_e} P_{23}^+ P_{21}^+ \right), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^c(x, t) &= \frac{T_2(x, t)}{C} = 1 + e^{p_2 t} \times \\ &\times \left[e^{\sqrt{P_2 p_2} x} \left(e^{\sqrt{P_2 p_2} r_e} P_{21}^+ \sqrt{P_3} + e^{\sqrt{P_2 p_2}} P_{23}^- \sqrt{P_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\sqrt{P_2 p_2} x} \times \right. \\ &\times \left. \left(e^{\sqrt{P_2 p_2}(r_e+2)} \cdot P_{21}^- \sqrt{P_3} + P_{23}^+ \sqrt{P_1} e^{\sqrt{P_2 p_2}(2r_e+1)} \right) \right] : \\ &: \left(e^{2\sqrt{P_2 p_2}} P_{23}^- P_{21}^- - e^{2\sqrt{P_2 p_2} r_e} P_{23}^+ P_{21}^+ \right), \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_3(x, t)}{C} &= e^{p_2 t} e^{\sqrt{P_3 p_2}(r_e-x)} \times \\ &\times \left[-e^{2\sqrt{P_2 p_2} r_e} P_{21}^+ + 2e^{\sqrt{P_2 p_2}(r_e+1)} \sqrt{P_1} + e^{2\sqrt{P_2 p_2}} P_{21}^- \right] : \end{aligned}$$

$$: \left(e^{2\sqrt{P_2 p_2}} P_{23}^- P_{21}^- - e^{2\sqrt{P_2 p_2} r_e} P_{23}^+ P_{21}^+ \right). \quad (26)$$

Решения (24) и (26) однородные. Решение (25) включает частное решение (функция Хевисайда) и однородное.

Температурное поле T_2 в зазоре h определяется по (25). Величины, входящие в (25), вычисляются по формулам

$$P_{21}^\pm = \sqrt{P_2} \pm \sqrt{P_1}, \quad P_{23}^\pm = \sqrt{P_2} \pm \sqrt{P_3}. \quad (27)$$

Вычеты определяются бесконечным дискретным множеством. В [13] было показано, что первый вычет p_1 равен нулю, а основной вклад дает только второй вычет p_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \quad p_2 = \frac{1}{4P_2(r_e-1)^2} \times \\ &\times \ln^2 \left(\frac{(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2})(\sqrt{P_3} - \sqrt{P_2})}{(\sqrt{P_2} + \sqrt{P_1})(\sqrt{P_3} + \sqrt{P_2})} \right). \quad (28) \end{aligned}$$

Можно показать, что вклад вычетов более высокого порядка p_3, p_4, \dots очень мал и может не учитываться.

В результате приближенное решение (25) с учетом (28) принимает вид

$$T_2^c(x, t) = e^{p_2 t} \left[\tilde{A} e^{a(x-1)} + \tilde{B} e^{-a(x-1)} \right] + 1, \quad (29)$$

где величина a в (29) определяется по формуле

$$a = \sqrt{P_2 p_2}, \quad (30)$$

а коэффициенты в (29) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}, \quad \tilde{B} = \frac{\tilde{B}_1}{\tilde{A}_2}, \\ \tilde{A}_1 &= P_{21}^+ \sqrt{P_3} + P_{23}^- \sqrt{P_1}, \\ \tilde{A}_2 &= P_{23}^+ P_{21}^+ - P_{23}^- P_{21}^-, \\ \tilde{B}_1 &= P_{21}^- \sqrt{P_3} + P_{23}^+ \sqrt{P_1}. \quad (31) \end{aligned}$$

В качестве характерных величин принимаем $V_{0\theta}^s$, и h . Тогда безразмерные величины равны

$$x^* = \frac{x}{h}, \quad t^* = \frac{V_{0\theta}^s}{h} t, \quad h^* = \frac{h}{h} = 1, \quad (32)$$

величина P_k равна

$$P_k = \frac{V_{0\theta}^s h}{\chi_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (33)$$

По формуле (33) вычисляем P_1, P_2, P_3 , а по формуле (28) – p_2 .

Для проведения расчетов необходимо вычислить следующие величины: Br , P_1 , P_2 , P_3 , p_2 – вычет, η_d , V_θ , k_T , χ , $r_s = 1$ (безразмерная), $r_e = r_e/r_s$ (безразмерная).

Расчеты проводились на основе (28)–(33) для параметров: $V_{0\theta}^s=2$ м/с, $r_s=0.1$ м, $r_s^* = 1$, $r_e=0.1002$ м, $r_e^* = 1.002$, $h = r_e - r_s=0.0002$ м. Для этих величин безразмерная величина x^* равна $2 \cdot 10^{-4} \left(\text{м}^{-1} \right) x$ (м), а безразмерное время t^* равно $10^{-4} \left(\text{с}^{-1} \right) t$ (с). Коэффициенты теплопроводности: вала $\chi_1 = 1.172 \cdot 10^{-5}$ м²/с, корпуса $\chi_3 = 0.94 \cdot 10^{-5}$ м²/с, феррожидкости $\chi_2 = 1.4 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Для этих данных получаем $\sqrt{P_1}=5.842$, $\sqrt{P_2}=53.451$, $\sqrt{P_3}=6.573$, $P_2=2857$, $p_2=473.53$, $a = \sqrt{P_2 p_2}=1163$, $A_1=660.9$, $A_2=1321.3$, $B_1=660.9$, $\tilde{A}=0.500$, $\tilde{B}=0.500$.

Решение (29) для вычисленных величин принимает вид

$$T_2^c(x, t) = e^{p_2 t} \left[\tilde{A} e^{a(x^*-1)} + \tilde{B} e^{-a(x^*-1)} \right] + 1. \quad (34)$$

При $\tilde{A} = \tilde{B} = 0.500$ и $a = 1163$ получаем из (34):

$$T_2^c(x, t) = e^{p_2 t} 0.5 \left[e^{1.163 \cdot 10^3(x^*-1)} + e^{-1.163 \cdot 10^3(x^*-1)} \right] + 1. \quad (35)$$

Выражение (35) означает, что исходная система координат: от 0 до $1=h/h$ изменилась на новую: от $1=h/h$ до 0. Это означает, что начало координат $x=0$ (поверхность вала) теперь есть $x^* = 1$, т. е. $x^* - 1 = 0$. При проведении расчетов интервал $x=1$ разделяем на 5 частей. Результаты расчетов по формуле (35) представлены в таблице 1, а от времени – в таблице 2.

Табл. 1. Зависимость температуры от радиальной координаты в зазоре при $a = 1163$

$x^* - 1$	x^*	$x^* - 1$	$\left[\tilde{A} e^{a(x^*-1)} + \tilde{B} e^{-a(x^*-1)} \right]$
0	1.0000	0	1.000
0.2	1.00004	0.00004	1.0011
0.4	1.00008	0.00008	1.0044
0.6	1.00012	0.00012	1.0098
0.8	1.00016	0.00016	1.0174
1.0	1.0002	0.00020	1.0271

Решение (29) для вычисленных величин принимает вид

$$T_2^c(x, t) = e^{p_2 t} \left[\tilde{A} e^{a(x^*-1)} + \tilde{B} e^{-a(x^*-1)} \right] + 1. \quad (36)$$

При $\tilde{A} = \tilde{B} = 0.500$ и $a = 1163$ получаем из (34):

$$T_2^c(x, t) = e^{p_2 t} 0.5 \left[e^{1.163 \cdot 10^3(x^*-1)} + e^{-1.163 \cdot 10^3(x^*-1)} \right] + 1. \quad (37)$$

Выражение (35) означает, что исходная система координат: от 0 до $1=h/h$ изменилась на новую: от $1=h/h$ до 0. Это означает, что начало координат $x=0$ (поверхность вала) теперь есть $x^* = 1$, т. е. $x^* - 1 = 0$. При проведении расчетов интервал $x=1$ разделяем на 5 частей. Результаты расчетов по (35) представлены в таблице 1, а от времени – в таблице 2.

Табл. 2. Зависимость температуры в зазоре от времени при $p_2 = 473.53$ при мгновенном включении без отвода тепла

t^* безразм.	t , час	$p_2 t^*$	$e^{p_2 t^*}$
0	0	0	1
0.00720	0.2	3.4094	30.25
0.01440	0.4	6.8188	91.49·10 ¹
0.02160	0.6	10.2282	27.67·10 ³
0.02880	0.8	13.6377	83.71·10 ⁴
0.036000	1.0	17.0471	25.32·10 ⁶

4. РЕШЕНИЕ ДЛЯ НАРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ РАЗОГРЕВА

На рис. 2 показаны реальные функции разогрева b_1 , b_2 , b_3 в зависимости от времени t , $b_1 < b_2 < b_3$, которые отличаются от функции Хевисайда постепенным нарастанием разогрева от $t^* = 0$ до $t = 1.0$:

$$f(t) = 1 - e^{-bt} \quad \text{при } t \geq 0, \quad (38)$$

в то время как функция Хевисайда (единичная функция) определяется как

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (39)$$

Решение для функции разогрева (36) может быть построено по формуле Дюамеля по известному решению $T_2^c(x, t)$ (34) для функции Хевисайда (37):

$$\hat{T}_2^c(x, t) = \int_0^t (1 - e^{-b\tau}) \frac{\partial T_2^c(x, t - \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (40)$$

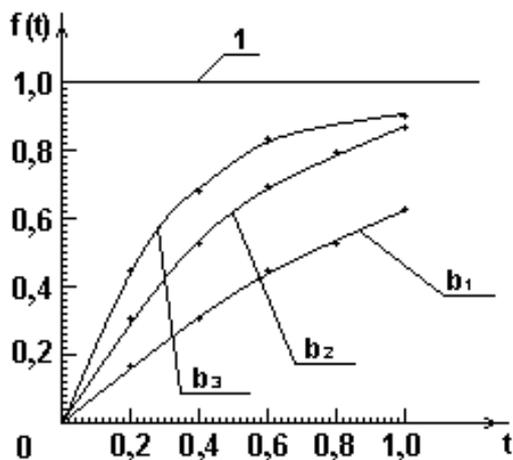


Рис. 2. Изменение функции разогрева во времени

Решение $T_2^c(x, t)$ на основе (29) представим в виде

$$T_2^c(x, t) = e^{p_2 t} \left[\tilde{A}e^{a(x-1)} + \tilde{B}e^{-a(x-1)} \right] + 1 = e^{p_2 t} E(x) + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \quad (41)$$

где

$$E(x) = \tilde{A}e^{a(x-1)} + \tilde{B}e^{-a(x-1)}.$$

В дальнейшем производная решения (39) подставляется в (38) и проводится вычисление интегралов.

Окончательное решение (38) записывается в виде

$$\hat{T}_2^c(x, t) = -E(x) \times \left[\left(1 - \frac{p_2}{p_2 + b} \right) e^{p_2 t} - \left(1 - \frac{p_2}{p_2 + b} e^{-bt} \right) \right]. \quad (42)$$

Результаты расчетов по (40) представлены в таблице 3.

Табл. 3. Зависимость температуры в зазоре от времени при нарастающей функции разогрева без отвода тепла

t^* безразм.	t , час	t , мин	$\hat{T}(t)$, $b_1 = 100$
	0	0	0
0.00720	0.2	12	29.64
0.01440	0.4	24	$91.45 \cdot 10^1$
0.02160	0.6	36	$27.67 \cdot 10^3$
0.02880	0.8	48	$83.71 \cdot 10^4$
0.036000	1.0	60	$23.32 \cdot 10^6$

В реальных условиях разогрев происходит довольно быстро. Поэтому температурное поле $\hat{T}(t)$

только при малых начальных моментах времени от включения будет мало отличаться от решения, полученного для функции Хевисайда $T(x)$. Из сравнения таблиц 2 и 3 можно установить, что в случае постепенного нагрева в начальные моменты времени температура несколько меньше.

Проведенный анализ характеризует изменение температурного поля $T_2^c(x, t)$ в зазоре в безразмерном виде. Для вычисления температуры T_2^c/T_0 в зазоре h из (35) с учетом (39) получаем соотношение

$$\frac{T_2^c(x, t)}{T_0} = T_0 C [e^{p_2 t} E(x) + 1] = \frac{\eta_d V_{0\theta}^s \chi_2}{k_t h} \{ \}, \quad (43)$$

где $\{ \}$ соответствует (10).

В реальных условиях тепловая энергия от разогрева феррожидкости, которую можно вычислить по формуле (41), передается во внешний корпус, а от него излучается в окружающую среду. В результате через некоторое время от включения наступит тепловой баланс, так что температура будет порядка 50° .

5. О ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМАХ ПОВЕДЕНИЯ ФЕРРОЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ УПЛОТНИТЕЛЯ

При изменении скорости вращения вала даже при всех остальных фиксированных параметрах возможны различные режимы движения жидкости внутри зазора. Эти явления обусловлены сингулярным вырождением уравнения движения вязкой жидкости по числу Рейнольдса $Re = V_{0\theta}^s h / \nu$, где $V_{0\theta}^s$ – тангенциальная скорость вращения вала, h – толщина зазора, ν – коэффициент вязкости. При таком вырождении возможно множество режимов [16]. Например, если принять величину зазора и коэффициент вязкости фиксированными, то при уменьшении скорости вращения вала режимы движения жидкости будут существенно изменяться. При вращении вала в феррожидкости, заполняющей зазор, порождаются вихревые волны Тейлора. Их окружные моды (гармоники) определяются периодической функцией $\cos m\theta$. Число мод определяется дискретной величиной $m = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0$ – осесимметричная мода, $m = 1$ – неэксцентричная мода, $m = 2$ – третья гармоника – самый опасный режим. Это значит, что величины, характеризующие феррожидкость: давление и скорость, будут изменяться по представленному закону, т.е. проходить через нули. При $m = 2$ (третья гармоника) имеем сильно возмущенные поля. При дальнейшем увеличении количество окружных вихрей будет увеличи-

ваться и они будут более мелкие. Поэтому самый опасный – это первый режим $m = 2$ (третья гармоника).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено преобразование полученных ранее решений для температурных полей в зазоре МЖ – уплотнителя и примыкающих областях МЖ – корпуса и МЖ – вала при мгновенном включении разогрева в начальный момент времени (функция Хевисайда). Построено также новое решение для нарастающих во времени функций разогрева на основе интеграла Дюамеля. Проведен анализ при фиксированных параметрах устройства. Показано влияние функции разогрева на температурное поле, которое зависит от числа Бринкмана, включающего коэффициент вязкости магнитной жидкости, зависящий от величины магнитного поля. Влияние магнитного поля на тепловое состояние возможно только на основе численного моделирования, учитывающее некоторые функциональные зависимости параметров. В данном аналитическом рассмотрении влияние всех параметров (замороженных) учитывается в коэффициенте разогрева C и их влияние можно оценивать только различными заданиями фиксированных параметров. Конечно, проведенный аналитический анализ весьма приближенный. Поэтому температурное поле будет разным при различных величинах магнитного поля.

1. Абдибеков У. С., Маканалина Г. С. Влияние магнитного поля и кривизны канала на турбулентную структуру течения // Вычислительные технологии.– 2004.– Т. 9, № 3.– С. 13–21.
2. Баштовой В. Г., Полевилов В. К., Альгадал А. М. Влияние процессов диффузии на статику магнитных жидкостей // Вести Национальной Академии наук Беларуси, Серия физико-технических наук.– 2006.– № 3.– С. 42–48.
3. Берковский Б. М., Медведев В. Ф., Краков М. С. Магнитные жидкости.– М.: Химия, 1989.– 240 с.
4. Вислович А. Н., Полевилов В. К. Влияние центробежных и капиллярных сил на форму свободной поверхности магнитоожидкостного уплотнения // Магнитная гидродинамика.– 1994.– № 1.– С. 77–86.
5. Вислович А. Н., Полевилов В. К. О численном моделировании разрушения магнитоожидкостного уплотнения с вращающимся внешним профилированным цилиндром // Инженерно-физический журнал.– 1997.– Т. 70, № 1.– С. 105–110.
6. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.– М.: Наука, 1965.– 288 с.
7. Зибольд А. Ф. Гидродинамические структуры, порождаемые вращающимся магнитным полем в цилиндре конечной длины // Прикладная гидромеханика.– 2011.– 13, № 2.– С. 17–27.
8. Зибольд А. Ф. Эволюция ламинарных течений, порождаемых в цилиндре вращающимся магнитным полем // Вісник Донецького Національного університету, Сер. А: Природничі науки.– 2009.– Вып. 2.– С. 77–88.
9. Краков М. С., Никифоров И. В. Влияние меридионального течения и термомагнитной конвекции на характеристики магнитоожидкостного уплотнения // Журнал технической физики.– 2011.– Том 81, вып. 12.– С. 47–55.
10. Краков М. С., Никифоров И. В. Скорость термоконвективного течения в высокоскоростном магнитоожидкостном уплотнении после его остановки // Журнал технической физики.– 2012.– Том 82, вып. 9.– С. 126–129.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1988.– 736 с.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
13. Полевилов В. К. Об устойчивости статического магнитоожидкостного уплотнения под действием внешнего перепада давления // Механика жидкости и газа.– 1997.– № 3.– С. 170–175.
14. Полевилов В. К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей // Дифференциальные уравнения.– 1999.– Т. 35, № 7.– С. 975–981.
15. Полевилов В. К., Тобиска Л. Моделирование динамического магнитоожидкостного уплотнения при наличии перепада давления // Механика жидкости и газа.– 2001.– № 6.– С. 42–51.
16. Селезов И. Т., Гайдук В. Ф., Кравцов А. И., Новак И. Л. Численное и экспериментальное исследование комбинированных магнитоожидкостных уплотнений. – Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости, Днепрпетровск: ДГУ, 1987. – С. 48–53.
17. Селезов И. Т., Корсунский С. В. Нелинейные волны в гидроупругих системах с магнитными жидкостями // Магнитная гидродинамика.– 1991.– № 2.– С. 41–44.
18. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Волновые задачи биогидродинамики и биофизики.– Киев: Наукова думка, 2013.– 308 с.
19. Селезов И. Т., Радионов А. В. Моделирование температурного поля ферроожидкости в зазоре // Науч. сб. "Физико-математическое моделирование и информационные технологии".– 2011.– Вып. 19.– С. 143–151.
20. Тактаров Н. Г., Рунова О. А. Моделирование волн на поверхности цилиндрической конфигурации магнитной жидкости, окружающей длинное пористое ядро // Вестник ПНИПУ: Механика.– 2013.– № 1.– С. 196–209.
21. Шалыбков Д. А. Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта // Успехи физических наук.– 2009.– Т. 179, № 9.– С. 971–993.
22. Charles S. W. Some properties of magnetic fluids // Proc. of the 3rd Int. Conf. on Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows. Aussois, France. Sept. 22–26.– 1997.– 2.– P. 529–534.

23. *Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.* The Feynman lectures on physics. Vol. 2. – Addison–Wesley Publishing Company, INC, 1964; русский перевод: *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. 7. Физика сплошных сред. – М.: Мир, 1966.– 292 с.
24. *Mitkova T., Tobiska L.* Isoparametric finite element approximation of the flow in magnetic fluid rotary shaft seals // Proc. Appl. Math. Mech.– 2004.– 4.– P. 644–645.
25. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics // The Physics of Fluids.– 1964.– 7, N 12.– P. 1927–1937.
26. *Patsegon N. F., Popova L N.* Space structures in the magnetic fluid // J. Math. Sci.– 2012.– 180, N 2.– P. 175–186.
27. *Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics.– Cambridge University Press, 1985; русский перевод: *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика.– М.: Мир, 1989.– 358 с.