

УДК 532.591

О РАССЕЙАНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ТОНКИМИ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ БАРЬЕРАМИ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, Т. Н. МИРГОРОДСКАЯ, В. И. НИКИШОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4
email: vinihm@gmail.com

Получено 07.04.2015

В работе предложен метод улучшенной редукции для расчета рассеяния поверхностных гравитационных волн тонкими погруженными в жидкость барьерами, основанный на разложении решения в ряд по собственным функциям задачи. Асимптотические свойства неизвестных коэффициентов разложения находятся на основе выделения локальной особенности по скоростям в вершине барьера. Проведен анализ замыкания системы уравнений. Показано, что использование метода улучшенной редукции позволяет уменьшить объем расчетов и повысить качество получаемого решения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: поверхностные волны, рассеяние, барьер, собственные функции

В роботі запропоновано метод поліпшеної редукції для розрахунку розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль тонкими зануреними в рідину бар'єрами, що ґрунтується на розкладанні розв'язку в ряд по власним функціям задачі. Асимптотичні властивості невідомих коефіцієнтів розкладання знаходяться на основі виділення локальної особливості по швидкості у вершині бар'єра. Проведено аналіз замыкання системи рівнянь. Показано, що застосування методу поліпшеної редукції призводить до зменшення об'єму розрахунків і підвищення якості отриманого розв'язку.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поверхневі хвилі, розсіювання, бар'єр, власні функції

The method of advanced reduction for the calculations of surface gravity wave scattering by thin submerged barriers that is based on eigenfunction expansion of solution has been presented. Asymptotic behaviors of unknown coefficients of expansion are found on basis of extraction of local singularity in respect to velocity in the tip of barrier. The analysis of closing of the equation system has been fulfilled. It is shown that the using of the method of advanced reduction allows to diminish the volume of calculations and to improve the property of obtained solution.

KEY WORDS: surface waves, scattering, barrier, eigenfunctions

ВВЕДЕНИЕ

Для защиты берегов и гидротехнических конструкций от разрушительного воздействия волн, как правило, используют различного вида волноломы. Одними из простейших, но часто применяемых волноломов из-за простоты и низкой стоимости, являются конструкции, представляющие погруженный в жидкость непроницаемый барьер. Волны отражаются от него или обрушаются, что приводит к увеличению диссипации волновой энергии, а следовательно, к уменьшению степени воздействия волн. В зависимости от условий применяют также частично погруженные в воду барьеры и барьеры с промежуточным зазором, в частности, внутри гаваней для уменьшения высоты волн до требуемого уровня [1].

Проблемы рассеяния поверхностных волн указанными типами волноломов, имеющих вид вертикального тонкого барьера, интенсивно изучаются на протяжении многих лет. Влияние волн на вертикальный тонкий барьер для случая нормального падения волн исследовалось в работе [2]. В рабо-

тах [3, 4] проведено численное моделирование рассеяния поверхностных волн в случае нормального и наклонного падения соответственно. Использовался метод представления решения в виде ряда по собственным функциям задачи. На основе свойства ортогональности указанных функций задача сводилась к бесконечной системе алгебраических уравнений, решение которой находится методом редукции. Однако сходимость численного решения получаемой системы является медленной, что приводит к необходимости увеличивать число уравнений. Как указано в работах [5, 6], для получения точности до второго знака приходится рассматривать порядка $N = 400$ уравнений.

Особенностью рассматриваемых конструкций волноломов является наличие острой кромки на вершине барьера. Это приводит к появлению корневой сингулярности в выражении для скорости потока [7], что и обуславливает необходимость увеличения числа используемых уравнений, т.е. учета мод высокого порядка. Для ряда задач рассеяния волн тонкими вертикальными барьерами в работе [5] предлагается использовать в качестве базисных функций полиномы Чебышева для получения при-

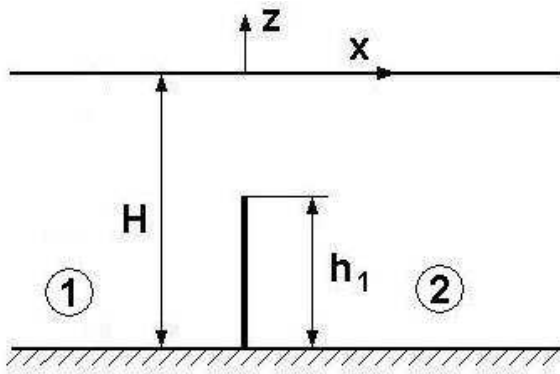


Рис. 1. Схема расположения барьера и системы координат

емлемых численных результатов с умеренно большим количеством уравнений.

В данной работе рассматривается задача рассеяния поверхностных гравитационных волн одиночным вертикальным тонким барьером в случае нормального падения, выполняется выделение указанной выше особенности. На основе разложения этой особенности в ряд по собственным функциям задачи находится асимптотика неизвестных коэффициентов разложения для больших значений N . Это позволило улучшить качество решения при использовании меньшего количества уравнений. Проведено сравнение применяемого метода улучшенной редукции по сравнению с обычной редукцией. Осуществлена проверка точности выполнения граничных условий и условий сопряжения. Показаны преимущества метода по сравнению с методом обычной редукции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тонкий, погруженный в жидкость барьер, параллельный оси z . На барьер падает распространяющаяся вдоль горизонтальной оси x из $x = -\infty$ монохроматическая волна с частотой ω_{dim} . Барьер высотой h_1 находится на дне потока глубиной H . Расположение барьера и системы координат с началом отсчета на свободной поверхности представлено на рис. 1. Обозначим область, занимаемую барьером $-H < z < -h_1$, через L_b и область над барьером $-h_1 < z < 0$ – через L_g .

Поведение линейных поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, описывается

уравнением Лапласа для потенциала скорости [8]:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H, \quad (3)$$

где g – ускорение силы тяжести.

Полагаем, что переменные изменяются во времени по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$. Разделяя переменные в уравнении (1), получаем выражение для волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси x :

$$\Phi = \frac{ag \operatorname{ch} k(z + H)}{\omega \operatorname{ch} kh} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4)$$

где a – амплитуда падающей волны, здесь также учтен сдвиг по фазе между отклонением свободной поверхности от положения равновесия и потенциалом. Волновое число падающей волны k является действительным положительным корнем дисперсионного уравнения

$$\omega_{dim}^2 = kgth kH. \quad (5)$$

Приведем все величины к безразмерному виду, введя характерные масштабы длины $L_{ch} = H$ и времени $T_{ch} = \sqrt{H/g}$. Тогда в безразмерном виде выражения для потенциала (4) и дисперсионного уравнения (5) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi(z) e^{i(kx - \omega t)} = \\ &= \frac{a \operatorname{ch} k(z + H)}{\omega \operatorname{ch} kh} e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\omega^2 = kH \operatorname{th} kH. \quad (7)$$

Отметим, что в этих выражениях все величины являются безразмерными. Для удобства величина H оставлена в прежнем виде, однако ее значение равно единице.

Введем норму функции $\|\varphi\| = \int_{-H}^0 \varphi\varphi^* dz$. Тогда ее нормированный вид будет описываться выражением

$$\varphi_0(z) = \sqrt{N} \operatorname{ch} k(z + H), \quad (8)$$

где

$$N = \frac{4k}{\operatorname{sh} 2kH + 2kH}. \quad (9)$$

Как отмечено выше, k является действительным положительным корнем дисперсионного уравнения (7). Это уравнение имеет также бесконечное множество чисто мнимых корней κ_n , которые являются как решение следующего уравнения:

$$\omega^2 = -\kappa_n H \operatorname{tg} \kappa_n H. \quad (10)$$

Корни уравнения (10) характеризуют неоднородные (нераспространяющиеся) волны, которые возбуждаются по обе стороны барьера. Им соответствуют следующие нормированные ортогональные собственные функции:

$$\varphi_n = \sqrt{M_n} \cos \kappa_n (z + H), \quad (11)$$

где

$$M_n = \frac{4\kappa_n}{\sin 2\kappa_n H + 2\kappa_n H}. \quad (12)$$

Энергия, связанная с падающей волной, которая сталкивается с волновым барьером, частично переносится за барьер и частично отражается. Результирующее волновое движение в области 1 (см. рис. 1) состоит из падающей и отраженной волн, в то время как в области 2 формируется прошедшая волна. Общее решение задачи для потенциала скорости, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), в области 1 ($x < 0$) можно записать в виде

$$\Phi_1 = (e^{ikx} + R e^{-ikx}) \varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\kappa_n x} \varphi_n(z) \quad (13)$$

и в области 2 ($x > 0$)

$$\Phi_2 = T e^{ikx} \varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\kappa_n x} \varphi_n(z). \quad (14)$$

Здесь полагается, что амплитуда падающей волны равна 1; R и T – коэффициенты отражения и прохождения соответственно.

Потенциалы Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять ряду условий сопряжения при $x = 0$. Рассмотрим их последовательно. Горизонтальная скорость потока, нормальная к барьеру, должна равняться нулю:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad z \in L_b, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad z \in L_b. \quad (16)$$

Горизонтальные компоненты скорости над барьером равны между собой, т.е.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad z \in L_g. \quad (17)$$

Непрерывность давления (что эквивалентно потенциалу) над барьером приводит к следующему условию:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{при} \quad z \in L_g. \quad (18)$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Условия (15) и (17) могут быть представлены как смешанное граничное условие [9, 10], которое устанавливает связь потенциалов или скоростей вдоль оси z :

$$G_1(z) = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0 & \text{при} \quad z \in L_b, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при} \quad z \in L_g. \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя в это условие выражения для потенциалов (13) и (14), получаем систему бесконечных функциональных уравнений, умножая которые на собственные функции задачи $\varphi_0(z)$ и $\varphi_n(z)$ и используя свойство ортогональности, осуществляем так называемую алгебраизацию системы, в результате чего находим бесконечную систему алгебраических уравнений, которые, как правило, решаются методом редукции.

Аналогичным образом поступаем и с условиями (16) и (18), объединяя которые, запишем смешанное граничное условие:

$$G_2(z) = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0 & \text{при} \quad z \in L_b, \\ \Phi_1 = \Phi_2 & \text{при} \quad z \in L_g. \end{cases} \quad (20)$$

Дальнейшие вычислительные шаги – те же, что и при рассмотрении условия (19).

В отличие от обычного метода редукции, в работе предлагается применить метод улучшенной редукции, который заключается в использовании асимптотических представлений для коэффициентов разложения A_n и B_n для больших значений n . Эти асимптотические представления находятся на основе рассмотрения конкретного вида сингулярности, возникающего в задаче. Для рассматриваемого типа задач характерно существование локальных особенностей по скоростям. Стремление к бесконечности скорости частицы жидкости в окрестности вершины барьера в рамках модели идеальной жидкости с малыми амплитудами ставит вопрос о достоверности полученного решения. В

связи с этим отметим, что возникновение локальных особенностей следует рассматривать как “расплату” за слишком грубое моделирование реального процесса. При этом имеется в виду не только моделирование свойств среды (идеальная жидкость), но и постановка граничной задачи в целом, речь идет о моделировании характера границы, которая представляет собой также существенную идеализацию [11].

При существовании локальных особенностей в характеристиках волновых полей, как правило, возникает неоднозначность в решении граничной задачи. При этом возможно построение нескольких решений, удовлетворяющих основным уравнениям задачи и отличающихся только скоростью стремления к бесконечности той или иной характеристики поля. Тогда для построения единственного решения необходимо определить характер особенности. Как показано в работе [7], выражение для скорости в окрестности вершины барьера пропорционально $r^{-1/2}$ (здесь r – радиальная координата локальной полярной системы координат с началом в вершине барьера).

В плоскости сопряжения $x = 0$ выражение для горизонтальной компоненты скорости в области 1, как следует из (13), имеет вид (множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем)

$$U_1|_{x=0} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = ik(1 - R)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n A_n \varphi_n(z). \quad (21)$$

Введем в рассмотрение функцию, которая отражает особенность распределения скорости в окрестности вершины барьера:

$$F_1(z) = \begin{cases} \frac{V_1}{(\tilde{h}_1^2 - z^2)^{1/2}} & \text{при } z \in L_g, \\ 0 & \text{при } z \in L_b, \end{cases} \quad (22)$$

где V_1 – некоторая неизвестная постоянная, подлежащая определению; $\tilde{h}_1 = H - h_1$.

Раскладываем эту функцию в ряд по собственным функциям:

$$F_1(z) = V_1 C_0 \varphi_0(z) + V_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(z). \quad (23)$$

Добавляя и вычитая функцию $F_1(z)$ из выражения (21), после ряда преобразований с использованием разложения (23) находим:

$$U_1|_{x=0} = ik(1 - R)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^N \kappa_n A_n \varphi_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z). \quad (24)$$

Здесь было сделано предположение, что при достаточно больших значениях n (больших некоторого N) характер постоянных разложения A_n определяется поведением скорости вблизи ребра. При достаточно большом N можно записать

$$\kappa_n A_n \cong V_1 C_n \quad \text{при } n > N. \quad (25)$$

Возвращаясь к выражению (22), умножаем его на собственные функции $\varphi_n(z)$ и интегрируем по интервалу от $-H$ до 0:

$$\int_{-H}^0 F_1(z) \varphi_n(z) dz = V_1 \sqrt{M_n} \left[\cos \kappa_n H \int_{-\tilde{h}_1}^0 \frac{\cos \kappa_n z dz}{(\tilde{h}_1^2 - z^2)^{1/2}} - \sin \kappa_n H \int_{-\tilde{h}_1}^0 \frac{\sin \kappa_n z dz}{(\tilde{h}_1^2 - z^2)^{1/2}} \right].$$

С использованием табличного интеграла [12]

$$\int_0^a (a^2 - t^2)^{\beta-1} \left\{ \frac{\sin bt}{\cos bt} \right\} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \left\{ \frac{H_{\beta-1/2}(ab)}{J_{\beta-1/2}(ab)} \right\},$$

где $\Gamma(\beta)$, $H_{\beta-1/2}(ab)$, $J_{\beta-1/2}(ab)$ – гамма-функция, функции Струве и Бесселя первого рода соответственно, находим

$$\int_{-H}^0 F_1(z) \varphi_n(z) dz = V_1 \sqrt{M_n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \left[\cos \kappa_n H J_0(\kappa_n \tilde{h}_1) + \sin \kappa_n H H_0(\kappa_n \tilde{h}_1) \right].$$

В то же время, умножая выражение (23) на собственные функции $\varphi_m(z)$ и интегрируя по интервалу от $-H$ до 0, получаем с учетом свойства ортогональности функций

$$\int_{-H}^0 F_1(z) \varphi_m(z) dz = V_1 \int_{-H}^0 C_0 \varphi_0(z) \varphi_m(z) dz + V_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{-H}^0 \varphi_n(z) \varphi_m(z) dz = V_1 C_m.$$

В результате, используя асимптотики для функций Струве и Бесселя для больших значений κ_n , получаем следующее выражение для коэффициентов C_n для больших значений n :

$$C_n = \sqrt{M_n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times (\Pi_1 \cos \kappa_n H + \Pi_2 \sin \kappa_n H), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa_n\tilde{h}_1}} \left[\cos\left(\kappa_n\tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{8\kappa_n\tilde{h}} \sin\left(\kappa_n\tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ \Pi_2 &\approx \frac{2}{\pi\kappa_n\tilde{h}_1} + \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa_n\tilde{h}_1}} \left[\sin\left(\kappa_n\tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8\kappa_n\tilde{h}} \cos\left(\kappa_n\tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом поступаем и с выражением для горизонтальной компоненты скорости в области 2. Введем в рассмотрение функцию

$$F_2(z) = \begin{cases} \frac{V_2}{(\tilde{h}_1^2 - z^2)^{1/2}} & \text{при } z \in L_g, \\ 0 & \text{при } z \in L_b, \end{cases} \quad (27)$$

которую раскладываем в ряд по собственным функциям $\varphi_n(z)$:

$$F_2(z) = V_2 E_0 \varphi_0(z) + V_2 \sum_{n=1}^{\infty} E_n \varphi_n(z).$$

Здесь, как и в выражении (22), постоянная V_2 является неизвестной.

Выражение для горизонтальной компоненты скорости в области 2 с учетом вышеизложенного, основываясь на представлении для потенциала скорости (14), можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_2|_{x=0} &= ikT\varphi_0(z) - \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n \varphi_n(z) - \\ &- V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n \varphi_n(z). \end{aligned} \quad (28)$$

Умножая функцию (27) на собственные функции $\varphi_n(z)$ и интегрируя от $-H$ до 0, находим аналогично выражение для коэффициентов разложения E_n для больших значений n , которое совпадает с выражением (26).

Таким образом, задача сводится к определению коэффициентов A_n и B_n , которые находятся из условий (19) и (20) с учетом асимптотических представлений неизвестных коэффициентов разложения, т.е. с учетом выражения (26). В ито-

ге, выражение (19) примет вид

$$G_1(z) = \begin{cases} ik(1-R)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^N \kappa_n A_n \varphi_n(z) + \\ + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) = 0 & \text{при } z \in L_b, \\ -ik(1-R)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^N \kappa_n A_n \varphi_n(z) + \\ + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) - ikT\varphi_0(z) + \\ + \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n \varphi_n(z) + \\ + V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) = 0 & \text{при } z \in L_g \end{cases} \quad (29)$$

и выражение (20) преобразуется к такому:

$$G_2(z) = \begin{cases} ikT\varphi_0(z) - \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n \varphi_n(z) - \\ - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n \varphi_n(z) = 0 & \text{при } z \in L_b, \\ (1+R-T)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^N A_n \varphi_n(z) + \\ + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) - \sum_{n=1}^N B_n \varphi_n(z) - \\ - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n} \varphi_n(z) = 0 & \text{при } z \in L_g. \end{cases} \quad (30)$$

Дальнейшая процедура расчетов проводится следующим образом. Умножаем выражения (29) и (30) последовательно на собственные функции $\varphi_0(z)$ и $\varphi_m(z)$, а затем интегрируем по полному промежутку от $-H$ до 0. Рассчитывая получаемые интегралы с учетом условия ортогональности собственных функций, приходим к системе $2N+2$ уравнений с $2N+2$ неизвестными, но также с пока неопределенными постоянными V_1 и V_2 :

$$\begin{aligned} ik(1-R) - ikT \cdot I_{00} + \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n \cdot I_{n0} + \\ + V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n I_{n0} = 0, \\ \kappa_m A_m - ikT \cdot I_{0m} + \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n \cdot I_{nm} + \\ + V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n I_{nm} = 0, \\ ikT \cdot P_{00} - \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n \cdot P_{n0} - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n P_{n0} + \\ + \sum_{n=1}^N A_n Q_{n0} + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{C_n}{\kappa_n} Q_{n0} - \\ - \sum_{n=1}^N B_n Q_{n0} - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n} Q_{n0} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 ikT \cdot P_{0m} - \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n \cdot P_{nm} - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n P_{nm} + \\
 + (1 + R - T)Q_{0m} + \sum_{n=1}^N A_n Q_{nm} + \\
 + V_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\kappa_n} Q_{nm} - \sum_{n=1}^N B_n Q_{nm} - \\
 - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n} Q_{nm} = 0.
 \end{aligned}$$

Структура системы (31) указывает на важную особенность алгебраических соотношений, вытекающих из условий сопряжения (19), (20) на поверхности $x = 0$. Полученная система является системой первого рода. Такие системы, как правило, плохо обусловлены, что значительно усложняет их численную реализацию. Это связано, в определенной мере, с наличием в вершине барьера корневой особенности по скоростям [7, 13]. Как уже отмечалось, существование особенности по скоростям может привести к тому, что ряды для скоростей на поверхности $x = 0$ сходятся медленно. Для получения решения, адекватно описывающего рассеянное на барьере поле, в работе учтены асимптотические свойства неизвестных. Переход к конечной системе выполнен с учетом асимптотического поведения неизвестных A_n, B_n для $n > N$.

Последующее построение алгоритма решения системы связано со способом замыкания системы. В работе использован подход, основанный на задании асимптотических выражений для A_n и B_n для больших номеров n . В этом случае V_1 и V_2 являются неизвестными, а коэффициенты A_n для всех $n > N$ задаются в асимптотическом виде (25). Аналогичным образом поступаем с B_n и V_2 . Возможны иные способы замыкания системы. При этом, на основе численного эксперимента было показано, что точность удовлетворения условий сопряжения на плоскости $x = 0$ очень чувствительна к выбору способа замыкания системы. Оказалась, что возможна ситуация, когда точность удовлетворения условий сопряжения при использовании асимптотических свойств неизвестных, учитывающих характер локальной особенности по скоростям в точке смены типа граничных условий, может оказаться даже хуже, чем при использовании метода простой редукции. На этом вопросе остановимся более подробно в следующем разделе.

3. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

В предыдущем разделе был рассмотрен метод решения граничной задачи. Целью дальнейшего

изложения является анализ особенностей численной реализации и оценка точности выполнения граничных условий. В рамках используемого метода определялись, через известный характер особенности по скоростям, асимптотические свойства неизвестных. Это позволило учитывать большое количество членов ряда в представлении для поля $(\Phi_{(1,2)})$ и его производной $(U_{(1,2)})$, в то же время бесконечные системы алгебраических уравнений заменялись конечными. При этом возникают погрешности, обусловленные как редукцией системы, так и выбором величины N , начиная с которого переходим к асимптотическим значениям неизвестных. В этой ситуации главным критерием качества полученного решения является контроль точности выполнения условий сопряжения (15-18). Отметим, что в рассматриваемом классе задач, как правило, точность выполнения граничных условий на поверхностях $z = 0, z = -1$ не проверяется, так как эти условия выполняются со значительно большей точностью, чем условия сопряжения. В качестве дополнительных критериев правильности полученного решения можно рассматривать сходимость полученного решения при увеличении порядка конечной системы уравнений и выполнение закона сохранения энергии, который в данном случае заключается в требовании:

$$R^2 + T^2 = 1. \tag{32}$$

Важным моментом при выполнении численных расчетов является нахождение корней дисперсионного уравнения (9). Для $kH = 10$ из уравнения (7) была найдена круговая частота $\omega = 3.16$, для которой проводились последующие вычисления, представленные в таб. 1.

Табл. 1.

n	κ_n	κ_n^*
2	5.19122	5.63231
4	11.8661	11.8882
6	18.3500	18.3539
8	24.7487	24.7496
10	31.1049	31.1051
12	37.4381	37.4382
14	43.7576	43.7577
16	50.0683	50.0684
18	56.3731	56.3731
20	62.6736	62.6736

Здесь представлены значения чисто мнимых корней дисперсионного уравнения, полученные при непосредственном решении дисперсионного

уравнения (κ_n) и вычисленные по асимптотическому соотношению для больших значений $n(\kappa_n^*)$ для различных номеров корней (n).

Выражение для асимптотических значений корней имеет вид (Linton, 2001) [6]:

$$\kappa_n^* \approx \frac{n\pi}{H} - \frac{\omega^2}{n\pi H} - \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{\omega^2}{n\pi}\right)^3 \frac{1}{H}. \quad (33)$$

Как видно из сравнения значений корней дисперсионного уравнения, найденных как решения уравнения и асимптотически, начиная с $n = 18$, точные значения корня и его асимптотические значения совпадают до шести значащих цифр. Для более низких частот ω совпадение между точно вычисленными корнями дисперсионного уравнения и приближенными значениями корней начинается с меньших номеров n . Например, волновому числу падающей волны $kH = 2$ соответствует круговая частота $\omega = 1.39$ и совпадение точного и асимптотического значений корней с указанной точностью наблюдается, начиная с $n = 7$. Поэтому для всех дальнейших вычислений для $n = (N + 1) \geq 20$ использовались асимптотические значения корней дисперсионного уравнения.

Прежде чем перейти к анализу качества полученного решения, приведем зависимость модуля амплитуды коэффициента отражения и прохождения от kH для различных соотношений $\alpha = h_1/H$. На рис. 2 представлены такие зависимости при условии, что $N = 50$, а во вторых суммах в правых частях выражений (24) и (28) вместо бесконечности учитывали 400 членов ряда. Номер кривой соответствует различным значениям α : $1 - \alpha = 0.25$, $2 - \alpha = 0.5$, $3 - \alpha = 0.75$. Напомним, что коэффициенты отражения обозначены R , коэффициенты прохождения через T . Приведенные данные с графической точностью совпадают с результатами работы (Abul-Azm, 1993) [3].

Как видно из рисунка, наибольшей величины коэффициент отражения достигает при $kH = 1.2$ для $\alpha = 0.75$. Именно для этих исходных параметров рассмотрим точность выполнения условий сопряжения при изменении числа членов ряда с учетом асимптотических свойств неизвестных и способа замыкания системы.

При выполнении численных расчетов, начиная с $N = 10$, наблюдалась устойчивость решения, которая проявлялась в том, что при увеличении числа членов рядов в выражениях (24), (28) величины коэффициентов отражения R и прохождения T изменялись в третьем знаке. В качестве следующего критерия качества полученного решения рассматривались интегральные характеристики, ко-

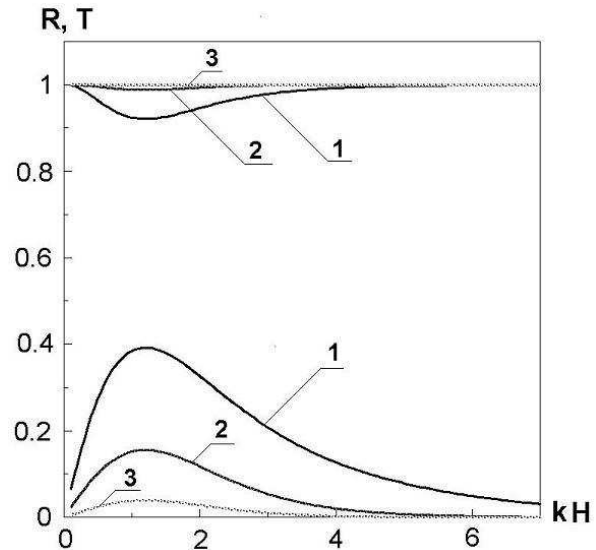


Рис. 2. Распределения коэффициентов отражения и прохождения в зависимости от волнового числа падающей волны

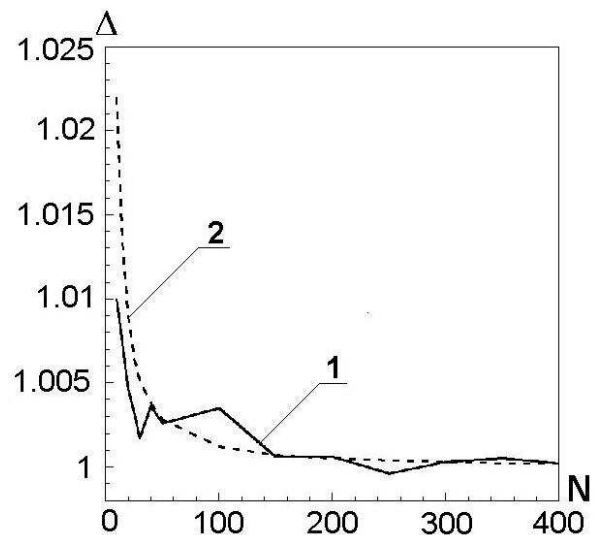


Рис. 3. Изменения величины Δ в зависимости от N

торые в данной задаче эквивалентны равенству (32).

На рис. 3 представлены изменения величины $\Delta = (R^2 + T^2)$ при увеличении N для случая простой редукции системы (кривая 2) и с учетом асимптотических свойств неизвестных (кривая 1). В данных расчетах при учете асимптотических свойств неизвестных система замыкалась, используя уравнения (25) для A_N и аналогичного выражения для B_N . Для $N \geq 10$ равенство (32) выполнялось с точностью до 2% как с учетом, так

и без учета асимптотических свойств неизвестных. Однако для величин $10 < N < 40$ интегральные оценки точности полученных результатов при учете асимптотических свойств неизвестных в 2 раза лучше, чем при простой редукции системы. Таким образом, даже интегральные оценки показывают, что при учете до 40 членов ряда в выражениях для поля $\Phi_{1,2}$ следует учитывать асимптотические свойства неизвестных. При дальнейшем увеличении количества членов ряда в обоих случаях значения коэффициентов отражения и прохождения практически не изменяются.

Отметим еще одну особенность рассматриваемых кривых. При простой редукции системы (кривая 2) увеличении числа членов ряда приводит к плавному увеличению точности интегральных характеристик. При учете асимптотических свойств неизвестных (кривая 1) с увеличением числа членов ряда точность выполнения интегральных характеристик имеет осциллирующий характер. Такая же особенность зависимости величины $\Delta = (R^2 + T^2)$ от N отмечалась в работе [14] и объяснялась осциллирующим характером поведения коэффициентов A_n, B_n больших номеров.

Основным критерием качества полученного решения является контроль точности выполнения условий сопряжения. В качестве примера ниже представлены результаты расчета погрешности выполнения условий сопряжения при учете 50 членов ряда для учета асимптотических свойств неизвестных и при простой редукции системы. Рассматривалась разность значений потенциала $\delta\Phi = |\Phi_1 - \Phi_2|$, которая не превышала в данном случае величины 0.2 % на всем промежутке $z \in L_g$. Для скорости – ситуация иная. В точке $z = 0.25$ в поле скоростей существует корневая особенность. Поэтому говорить о выполнении условий сопряжения в этой точке нет смысла. Следует анализировать точность выполнения условий сопряжения в окрестности точки $z = 0.25$.

На рис. 4 приведены зависимости погрешности выполнения условий сопряжения по скорости при учете 50 членов ряда. На рисунке 4, а представлен общий вид кривых $\delta U = |U_1 - U_2|/k$, на рисунке 4, б – их расположения вблизи точки сингулярности в увеличенном виде. Кривая 1 соответствует простой редукции системы, а кривая 2 построена при учете асимптотических свойств неизвестных. Анализ выполнения условий сопряжения по скоростям позволяет сделать следующие выводы. При учете асимптотических свойств неизвестных (штриховая кривая 2) в малой окрестности точки, в которой существует локальная особенность по скоростям ($z = 0.25 + 0.002$), точность удовлетво-

рения условий сопряжения хуже, чем при простой редукции (кривая 1). Однако область, в которой наблюдается увеличение погрешности выполнения условий сопряжения по скоростям при учете асимптотических свойств неизвестных, заметно уже, чем при простой редукции. Были проведены расчеты выполнения условий сопряжения для других значений N . Важно отметить, что при дальнейшем увеличении числа членов ряда при учете асимптотических свойств неизвестных указанная выше область сужается. При этом погрешность удовлетворения условий сопряжения по скоростям может даже незначительно увеличиться. Характерно, что при простой редукции системы точность выполнения условий сопряжения при увеличении числа членов ряда увеличивается, однако размер области, в которой наблюдается значительное увеличение ошибки, практически не изменяется. Это позволяет сделать вывод, что учет асимптотических свойств неизвестных позволяет более точно определить ближнее к барьеру поле. Отметим, что для оценки коэффициента отражения R и прохождения T , начиная с 40 членов ряда, можно использовать простую редукцию системы.

Остановимся еще на одном вопросе, связанным с выбором способа замыкания системы. Используя асимптотические представления для неизвестных в виде соотношения (25) для $A_n, n > N$ и аналогичного для $B_n, n > N$, мы не накладываем связи между V_1 и V_2 . В то же время, возможны иные способы замыкания системы. В работе [15] при рассмотрении задачи о распространении упругих волн в полуслое со свободными боковыми поверхностями и заземленным торцом, т.е. для волновода с точкой смены типа граничных условий, в которой существует локальная особенность по напряжениям, предлагалось замыкать систему, используя условия сопряжения для двух компонент перемещений в заданной точке. Это позволило несколько улучшить выполнение граничных условий на торцевой поверхности. В данной работе был также применен аналогичный подход. Для замыкания системы используем уравнения (25) для $A_n, n > N$, а в качестве второго уравнения – локальное условие сопряжения для функции (18) (непрерывность давления над барьером) в точке $z = 0$. Это уравнение имеет следующий вид:

$$G_2(z) = (1 + R)\varphi_0(0) + \sum_{n=1}^N A_n\varphi_n(0) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{C_n}{\kappa_n} \varphi_n(0) = T\varphi_0(0) + \sum_{n=1}^N B_n\varphi_n(0) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n} \varphi_n(0). \quad (34)$$

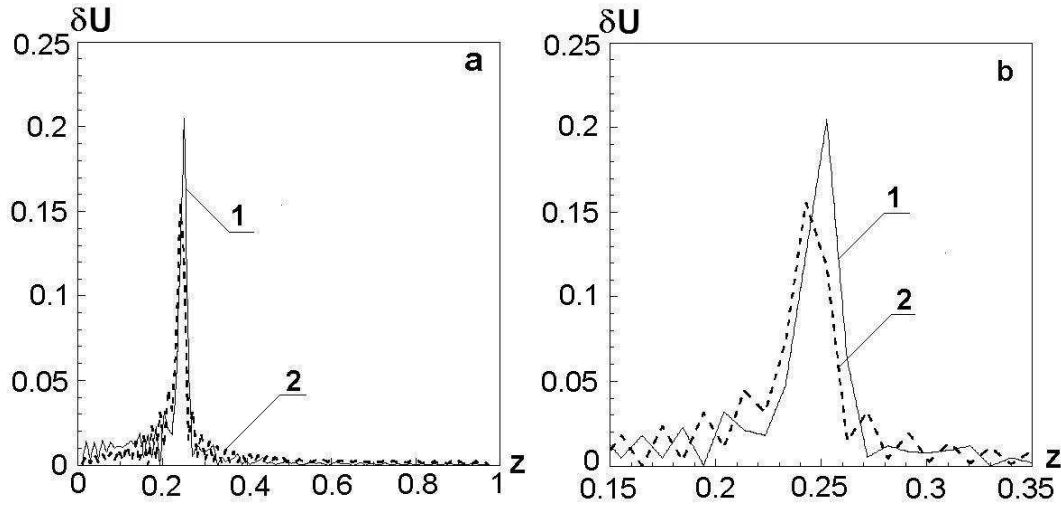


Рис. 4. Зависимости погрешности выполнения условий сопряжения по скорости для простой и улучшенной редукиций

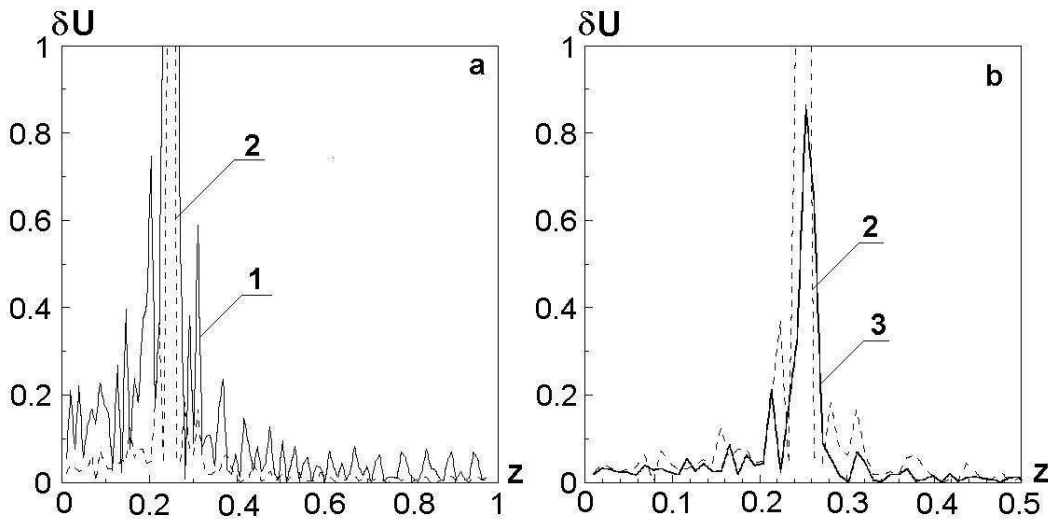


Рис. 5. Зависимость погрешности выполнения условий сопряжения по скорости для разных значений N

На рис. 5 представлено изменение погрешности выполнения условий сопряжения по скоростям δU на плоскости $x = 0$, $-1 \leq z \leq 0$. В точке $z = 0.25$ существует локальная особенность по скоростям. Кривая 1 на рис. 5, *a* соответствует 150 членам ряда в представлении для давления и скоростей, штриховая кривая 2 – 250. Аналогичные кривые представлены на рис. 5, *b*, на котором кривая 2 соответствует значению $N = 250$, а кривая 3 – 350. Как видно из рисунка, погрешность выполнения условий сопряжения значительно выросла, по сравнению с рассмотренным выше способом замыкания системы (с использо-

ванием уравнения (25)), и даже при простой редукиции системы. Для получения требуемой точности удовлетворения условий сопряжения необходимо учитывать значительно большее количество членов ряда. Отметим, что при увеличении членов ряда погрешность выполнения условий сопряжения уменьшается, а диапазон $0.25 - \varepsilon \leq z \leq 0.25 + \varepsilon$, в котором наблюдается значительный рост погрешности выполнения условий сопряжения, сужается.

Таким образом, при переходе от бесконечной системы уравнений к конечной с использованием метода улучшенной редукиции, учитывающим

асимптотические свойства неизвестных, использование традиционного способа замыкания системы (на основе учета уравнения (25)) дает меньшую погрешность выполнения условий сопряжения (по сравнению с использованием уравнения (34)), при учете одинакового числа членов ряда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача рассеяния поверхностных гравитационных волн одиночным вертикальным тонким барьером. Рассмотрен случай нормального падения волны. Один из эффективных методов решения данного класса задач – использование разложения решений в ряд по собственным функциям задачи. Известно, что распределение скорости потока имеет корневую особенность вблизи вершины барьера. В итоге решение задачи сводится к выполнению условий сопряжения над барьером и равенства нулю нормальных к плоскости барьера компонент скорости. Использованию свойств ортогональности системы собственных функций приводит задачу к необходимости решения бесконечной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений. Традиционные подходы к решению такой системы – это метод простой редукции. Однако, как указано в работах [5, 6], для получения точности до второго знака приходится рассматривать достаточно большое количество уравнений, порядка $N = 400$. Как отмечено выше, в работе [5] предлагается использовать в качестве базисных функций полиномы Чебышева для получения приемлемых численных результатов с умеренно большим количеством уравнений.

Особенно важным становится достижение необходимой точности вычислений в задачах рассеяния волн системой вертикальных барьеров, когда рассматриваются резонансные явления, связанные с возникновением стоячей волны в промежутке между барьерами. Для точного определения частоты запираания при рассмотрении волн высокой частоты, как показано в работе [16], необходимо использовать более 400 уравнений. Это вызвано наличием особенности распределения скорости вблизи вершины барьера. В работе [17] приведено спорное утверждение об исчезновении локальной особенности по скоростям при рассмотрении барьера конечной толщины. Локальная особенность по скоростям, обусловленная существованием точки смены типа граничных условий, не исчезает при замене бесконечно тонкого барьера на барьер конечной толщины. В этом случае, т.е.

при учете конечной толщины барьера, возникает степенная особенность с иным показателем степени [7], и трудности вычисления бесконечной системы алгебраических уравнений остаются.

В данной работе для рассмотрения класса задач рассеяния поверхностных гравитационных волн тонкими вертикальными барьерами предлагается использовать метод выделения особенностей и последующее использование асимптотических зависимостей, которые определяются видом указанных особенностей, для неизвестных коэффициентов разложения для больших значений N . Это дает возможность уменьшить не только размер системы алгебраических уравнений, но и существенно расширить область в окрестности точки смены типа граничных условий, в которой улучшается точность полученного решения. Проведенное сравнение результатов, полученных на основе применяемого метода и метода простой редукцией, показало, что предложенный подход улучшенной редукции является более эффективным для расчета задач рассеяния поверхностных гравитационных волн барьерами.

1. Lee J.L., Lee D.Y. Modeling of Wave Scattering by Vertical Barriers. Proc. of the Thirteenth International Offshore and Polar Engineering Conference, Honolulu, Hawaii, USA.– 2003.
2. Wiegel R. L. Transmission of waves Past a Rigid Vertical Thin Barrier // J. of the Waterways and Harbors Division // ASCE.– 1960.– vol. 86, No. WW1.– P. 1–12.
3. Abul-Azm A. G. Wave diffraction through submerged breakwaters // J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.– 1993.– 119(4).– P. 587–605.
4. Losada, I. J., Losada, M. A. & Roldan, A. J. Propagation of oblique incident waves past rigid, vertical thin barriers // Appl. Ocean Res.– 1992.– vol. 14.– P. 191–99.
5. Porter R., Evans D.V. Complementary approximations to wave scattering by vertical barriers // J. Fluid Mech. – 1995.– vol. 294.– P. 155–180.
6. Linton C.M., P. McIver P. Handbook of Mathematical Techniques for Wave / Structure Interactions. Chapman & Hull/CRC, 2001.– 298 p.
7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методы и физ.-мех. голя.– 1998.– Т. 41, №1.– С. 12–34.
8. Lamb H. Hydrodynamics.– Cambridge University Press, 1975.– 752 p.
9. Sneddon I.N. Mixed Boundary value Problems in Potential Theory / North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.– 292 p.
10. Dalrymple R.A., Martin P.A. Wave diffraction through offshore breakwaters // J. of the Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering.– 1990.– vol. 116, No. 6.– P. 727–741.

11. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– Киев: Наук. думка, – 1981.– 284 с.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.– 798 с.
13. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity: I. Removal, interpretation, and analysis // Appl. Mech. Rev.– 2004.– vol. 57, No.4.– P. 251-297.
14. *Мацьгура В.Т.* Акустические поля в неканонических областях // Диссертация на соиск. ученой степени докт. физ.-мат. наук.– Киев, Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2003.– 331 с.
15. *Городецкая Н.С.* К задаче об отражения первой симметричной нормальной волны от заземленного торца полуполосы // Акустический вестник.– 1999.– Т. 2, №2.– С. 26-34.
16. *McIver P.* Scattering of water waves by two surface-piercing vertical barriers // IMA J. of Applied Mathematics.– 1985.– vol. 35.– P. 339-355.
17. *Kagemoto H.* Revisiting the complete wave transmission and reflection due to an array of 2-D surface-piercing truncated plates fixed in regular incident waves // Ocean Engineering.– 2011.– vol. 38.– P. 976-982.