

УДК 532.528

# УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖИДКОСТИ С ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. Н. САВЧЕНКО, Ю. А. СЕМЕНОВ, Е. И. НАУМОВА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4  
e-mail office@hydromech.com.ua

Получено 01.12.2014

В статье исследуется ударное гидродинамическое взаимодействие жидкости и твердой перфорированной либо пористой поверхности тела. Жидкость в форме клина предполагается идеальной и несжимаемой, гравитация и поверхностное натяжение не учитываются. Форма тела также предстает собой клин с углом, изменяющимся от 0 до 180 градусов. Это включает рассмотрение удара жидкости о плоскую перфорированную стенку как частный случай. Рассматривается автомодельная постановка задачи, соответствующая начальной стадии взаимодействия тела и жидкости. Интегральный метод годографа применен для решения полностью нелинейной постановки задачи. Метод позволяет найти выражения комплексной скорости, производной комплексного потенциала и функцию конформного отображения первого квадранта на область течения в физической плоскости. Исходная краевая задача для функции комплексного потенциала сведена к системе интегральных уравнений для нахождения величины и направления скорости жидкости на границе всей области течения. Влияние степени проницаемости твердой поверхности на конфигурацию свободных границ, снижение давления на твердой поверхности исследовано детально путем представления численных результатов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** удар жидкости, проницаемая поверхность, автомодельное течение

В статті досліджується ударна гідродинамічна взаємодія рідини і твердої перфорованої або пористої поверхні тіла. Рідина у формі клина вважається ідеальною і нестисливою, гравітація і поверхневий натяг не враховуються. Форма тіла також предстала собою клин з кутом, що змінюється від 0 до 180 градусів. Це включає розгляд удара рідини по плоскій перфорованій стінці як окремих випадок. Розглядається автомодельна постановка задачі, що відповідає початковій стадії взаємодії тіла і рідини. Застосовується інтегральний метод годографа для розв'язання повністю нелінійної постановки задачі. Метод дозволяє знайти вираз комплексної швидкості, похідної комплексного потенціала і функцію конформного відображення першого квадранта на область течії у фізичній площині. Початкова крайова задача для функції комплексного потенціала зведена до системи інтегральних рівнянь для знаходження величини і напрямку швидкості рідини на межі всієї області течії. Вплив ступеню проникності твердої поверхні на конфігурацію вільних меж, зниження тиску на твердій поверхні досліджено детально шляхом представлення чисельних результатів.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** удар рідини, проникна поверхня, автомодельна течія

The free surface flow and the hydrodynamic loads generated by the water impact between a liquid wedge and perforated/porous solid wedge/surface are investigated. The liquid is assumed to be ideal and incompressible; gravity and surface tension effects are ignored. The formulation of the problem also enable to study the problem of a block sliding along an inclined sea bed. The study is carried out within simplified assumptions under which the problem admits a self-similar solution. An integral hodograph method is employed to derive the solution consisting of analytical expressions for the complex-velocity potential, the complex-conjugate velocity, and the mapping function. The original boundary value problem is reduced to a system of integro-differential equations in terms of the velocity magnitude and the velocity angle to the liquid boundary. They are solved numerically using the method of successive approximations. The role played by the permeability and/or speed of the solid surface on the flow configuration, reduction of the pressure distribution on the solid surface are carefully analyzed.

**KEY WORDS:** liquid impact, permeable surface, self-similar flow

## ВВЕДЕНИЕ

Ударное взаимодействие волн с корпусами морских судов и конструкций платформ включает широкий круг задач, связанных с нестационарным взаимодействием жидкости и тела. Процессы удара жидкости длятся весьма короткое время, однако при этом возникают большие гидродинамические нагрузки. Примерами таких процессов являются удар волн о палубные надстройки судов, слемминг корпуса судна, удары волн по элементам конструкций морских платформ и прибрежных объектов.

В настоящей работе исследуется возможность снижения гидродинамических нагрузок путем использования пористых или перфорированных тел, при которых уменьшается как площадь взаимодействия с жидкостью, так и гидродинамическое давление на участках взаимодействия. Задача имеет практическое приложение к созданию и повышению надежности береговых укреплений, проектированию защитных экранов для объектов, установленных на дне прибрежной зоны, повышению надежности конструкций, подверженных волновому воздействию.

Одной из областей приложения задач удара те-

ла о поверхность жидкости является вход в жидкость клинообразного тела. Если поверхность клина имеет пористую или перфорированную структуру, то это приводит к уменьшению давления на тело. В работе [1] изучен случай перфорированного клина, скользящего вдоль наклонной поверхности водоема с помощью метода граничных элементов. Интерес к задаче вызван попыткой моделировать течение, возникающее на морском побережье вследствие массивного сползания в воду большого массива горной породы либо вулканической лавы, которое может вызвать цунами. В работе [2] приведен пример такой ситуации, возникшей вследствие извержения вулкана, при котором прибрежные волны достигали высоты восьми метров.

В данной работе рассматривается обобщенная задача соударения жидкости, первоначально имеющей форму клина, и твердого клинообразного тела, имеющего пористую или перфорированную структуру. Ранее эта задача при отсутствии проникания жидкости в тело была рассмотрена многими авторами, в частности в работах [3, 4].

Для изучения влияния эффекта проникания жидкости через поверхность твердого тела на поле скоростей и распределения давления вдоль смоченной поверхности тела в данной работе применяется интегральный метод годографа, позволяющий свести краевую задачу для уравнения Лапласа к системе интегральных уравнений. Предполагается, что жидкость невязкая, невесомая и несжимаемая, область течения симметрична вдоль оси, совпадающей с направлением скорости движения жидкости, которая полагается постоянной. Скорость проникания жидкости через пористую или перфорированную поверхность зависит от величины давления. Эта зависимость может быть линейной для пористого тела, течение в котором подчиняется закону Дарси, либо степенной для перфорированного твердого тела. В рамках этих предположений течение, возникающее вследствие удара жидкости и перфорированного тела, является автомодельным. Интегральный метод годографа [5] позволяет получить полное решение задачи путем нахождения выражений комплексной скорости и производной комплексного потенциала, определенных в области параметрического переменного. Эти выражения содержат некоторые неизвестные функции, которые определяются из системы интегральных уравнений, полученной в результате применения кинематического и динамического граничных условий как на свободной границе, так и на проницаемой поверхности тела. Система интегральных уравнений решается численно методом последовательных приближений.

Результаты расчетов представлены в виде контуров свободной границы жидкости и линий тока, контактного угла между свободной границей и телом, распределения давления на теле для различных конфигураций течения и условий проницаемости твердого тела.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Течение, образующееся в результате удара твердого пористого либо перфорированного клина с полууглом  $\alpha_s$  и жидкости в виде клина с полууглом  $\alpha_l$ , рассматривается в системе координат, связанной с твердым клином. Каждый из углов  $\alpha_s$  и  $\alpha_l$  может изменяться от 0 до  $180^\circ$ , при этом должно выполняться условие  $\alpha_s + \alpha_l < \pi$ . Рассматривается случай симметричного течения относительно оси  $y$ . В момент времени  $t = 0$  точки  $A$  и  $O$  совпадают и находятся в точке  $A$ , в которой находятся вершины жидкого и твердого клинов. Схема течения и обозначения показаны на рис. 1, а.

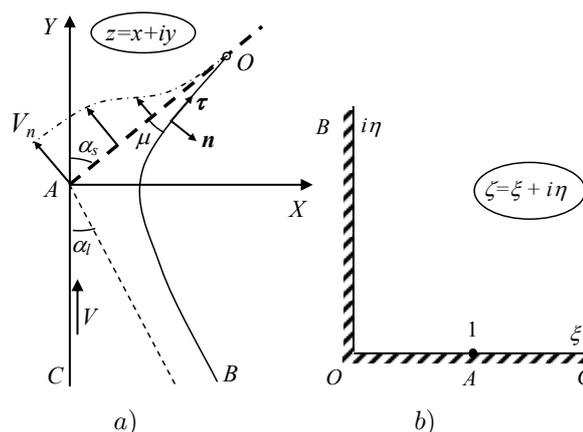


Рис. 1. Схема соударения жидкого (сплошная линия) и твердого проницаемого клина (штриховая линия): а – автомодельная область течения, б – область параметрического переменного. Пунктирная линия соответствует положению жидкого клина в момент времени  $t = 0$

Для пористого твердого клина толщина щеки полагается достаточно малой, а движение жидкости внутри капиллярных каналов в теле подчиняется закону Дарси. В этом случае, интегрируя градиент давления поперек щеки клина, можно получить достаточно простое соотношение для величины нормальной компоненты скорости жидкости на поверхности щеки клина. При этом полагается, что на противоположной стороне щеки клина давление постоянно и равно давлению окружающей

среды. При сделанных предположениях нормальная компонента скорости пропорциональна перепаду давления на щеке клина [6]:

$$V_n = \alpha(P - P_a) = \alpha_0 V c_p. \quad (1)$$

В этом уравнении коэффициент  $\alpha$  характеризует пористость материала и толщину щеки клина;  $P_a$  – давление окружающей среды;  $\alpha_0 = \alpha \rho V$  – безразмерный коэффициент, характеризующий проводимость стенки клина;  $c_p = (P - P_a)/(\rho V^2)$  – коэффициент давления;  $V$  – скорость жидкости на бесконечности, принятая в качестве характерной скорости течения. При  $\alpha \rightarrow 0$  скорость  $V_n \rightarrow 0$ , что соответствует условию непротекания на твердой поверхности.

В случае перфорированной щеки клина течение сквозь нее определяется балансом инерции жидкости перепада давления. В этом случае нормальная компонента скорости находится из выражения, предложенного в работе [7]:

$$V_n = \chi_0 \sqrt{(P - P_a)/\rho}, \quad \chi_0 = \frac{2\nu\kappa^2}{(1 - \kappa)}, \quad (2)$$

где  $\nu$  – коэффициент расхода через отверстия;  $\kappa$  – отношение площади отверстий к полной площади смоченной поверхности;  $\rho$  – плотность жидкости. При  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $V_n \rightarrow 0$ , что соответствует непроницаемой твердой поверхности.

Поскольку давление на щеке клина неизвестно до решения задачи, то влияние безразмерных коэффициентов  $\alpha_0$  и  $\chi_0$  на параметры течения, а также снижение давления на щеке клина определяются итерационным путем: при выбранном распределении давления находится нормальная компонента скорости из выражений (1) либо (2). Затем из решения гидродинамической задачи вычисляется распределение давления на щеке клина. Далее процесс повторяется до достижения сходимости итерационного процесса.

При постоянной скорости жидкости на бесконечности задача нестационарного движения жидкости в физической плоскости  $Z = X + iY$  может быть сформулирована в стационарной авторемальной плоскости  $z = x + iy$ , в которой авторемальными переменными являются  $x = X/(Vt)$  и  $y = Y/(Vt)$ . Комплексный потенциал течения  $W(Z, t) = \Phi(X, Y, t) + i\Psi(X, Y, t)$  может быть записан в виде

$$W(Z, t) = V^2 t w(z). \quad (3)$$

Задача состоит в нахождении комплексной функции  $w(z)$ , которая конформно отображает стационарную плоскость  $z$  на область изменения

области комплексного потенциала  $w$ . В качестве области параметра выбран первый квадрант плоскости  $\zeta$ , в котором выражения безразмерной комплексной скорости  $\frac{dw}{dz}$  и производной комплексного потенциала  $\frac{dW}{d\zeta}$  должны быть найдены. Если эти выражения известны, то поле скоростей, а также функция, отображающая область параметра на область течения в плоскости, могут быть определены из выражений:

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz}(\zeta), \quad z(\zeta) = z(0) + \int_0^\zeta \frac{dW}{d\zeta} / \frac{dW}{dz} d\zeta. \quad (4)$$

Теорема о конформных отображениях позволяет произвольно выбрать положение трех точек в области параметра. Этими точками являются  $O$ ,  $B$  и  $A$ , как показано на рис. 1, *b*. При этом, как видно из рисунка, положительная часть мнимой оси ( $0 < \eta < \infty, \xi = 0$ ) соответствует свободной границе  $OB$ . На действительной оси интервал ( $0 < \xi < 1, \eta = 0$ ) соответствует проницаемой щеке клина  $OA$ , а остальная часть действительной оси ( $1 < \xi < \infty, \eta = 0$ ) соответствует оси симметрии  $AC$ . Точка  $\zeta = 1$  в области параметра соответствует точке  $A$  в стационарной плоскости  $z$ .

### 1.1. Выражения для комплексной скорости и производной комплексного потенциала в области параметра

В предыдущих задачах авторемальных течений, рассмотренных в литературе, принималось условие непротекания на смоченной части тела. В этом случае направление скорости жидкости вдоль щеки клина известно, так как оно определяется направлением щеки клина. В отличие от предыдущих исследований, в рассматриваемой задаче направление скорости неизвестно, поскольку оно зависит от нормальной компоненты скорости, что приводит к усложнению нахождения решения задачи.

Краевую задачу для функции комплексной скорости можно сформулировать в области параметрического переменного следующим образом. Введем в рассмотрение функцию угла наклона вектора скорости на проницаемой границе контакта жидкости и тела,  $\beta(\xi) = -\arg(dw/dz)$ , то есть на интервале  $0 < \xi < 1$  действительной оси области параметра, и величину скорости на свободной границе  $v(\eta)$  как функцию координаты мнимой оси области параметра  $\eta$ . С учетом этих обозначений граничные условия для функции комплексной ско-

рости можно записать в виде:

$$\chi(\xi) = \arg\left(\frac{dw}{dz}\right) = \begin{cases} -\beta(\xi), & 0 < \xi < 1, & \eta = 0, \\ -\pi/2, & 1 < \xi < \infty, & \eta = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$v(\eta) = \left|\frac{dw}{dz}\right|, \quad 0 < \eta < \infty, \quad \xi = 0. \quad (6)$$

Отметим, что  $\beta(\xi) = \arctan(v_y/v_x) \rightarrow \pi/2$  при  $\xi \rightarrow 1$  с обеих сторон точки  $A$ . Это следует из того, что  $x$ -компонента скорости  $v_x(\xi)_{\xi \rightarrow 1} \rightarrow 0$  вследствие симметрии течения относительно оси  $y$ , а  $y$ -компонента скорости  $v_y(\xi)_{\xi \rightarrow 1} > 0$  для любой сколь угодно малой проницаемости щеки клина,  $\alpha > 0$  либо  $\chi_0 > 0$ . Таким образом, функция  $\chi(\xi)$  остается непрерывной при движении вдоль границы течения в окрестности угловой точки  $A$ . Задача состоит в нахождении выражения комплексной скорости,  $\frac{dw}{dz}$ , в первом квадранте области параметра, которая удовлетворяет граничным условиям (5) и (6). Интегральная формула [5]

$$F(\zeta) = v_\infty \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\chi}{d\xi} \ln \left( \frac{\zeta + \xi}{\zeta - \xi} \right) d\xi - \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \left( \frac{\zeta - i\eta}{\zeta + i\eta} \right) d\eta + i\chi_\infty \right] \quad (7)$$

позволяет найти решение краевой задачи (5) и (6) с точностью до произвольных постоянных  $v_\infty$  и  $\chi_\infty$ , которые выбираются из условия, позволяющего удовлетворить направлению скорости на бесконечности. В самом деле, подставляя в выражение (7)  $\zeta = \xi$  и находя аргумент функции  $F(\zeta) = \frac{dw}{dz}$ , можно видеть, что  $\arg[F(\zeta)_{\zeta=\xi}] = \chi(\xi)$ . Аналогично, подставляя в выражение (7)  $\zeta = i\eta$  и находя модуль функции  $F(\zeta) = \frac{dw}{dz}$ , можно видеть, что  $|F(\zeta)| = v(\eta)$ , то есть условия (5) и (6) удовлетворяются. Таким образом, выражение комплексной скорости можно получить в виде

$$\frac{dw}{dz} = v_0 \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\beta}{d\xi} \ln \left( \frac{\xi - \zeta}{\xi + \zeta} \right) d\xi - \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \left( \frac{i\eta - \zeta}{i\eta + \zeta} \right) d\eta - i\beta_0 \right], \quad (8)$$

где  $v_0 = v(\eta)_{\eta=0}$  и  $\beta_0 = \beta(\xi)_{\xi=0} = \pi/2 - \alpha_s$  – величина и направление скорости в точке  $O$ . Давление в точке контакта свободной границы и тела (точка  $O$ ) равно давлению окружающей среды, поэтому

нормальная компонента скорости в соответствии с уравнениями (1) и (2) равна нулю. Следовательно, скорость в точке  $O$  направлена вдоль щеки клина.

Для анализа поведения потенциала вдоль свободной границы введем единичные векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$ , нормальный и касательный к свободной границе соответственно. Вектор нормали  $\vec{n}$  направлен в сторону, внешнюю к области жидкости, а в направлении вектора  $\vec{\tau}$  дуговая координата  $s$  вдоль свободной поверхности увеличивается, как показано на рис. 1, а. С учетом принятых обозначений можно записать

$$dw = (v_s + iv_n)ds, \quad (9)$$

где  $v_s$  и  $v_n$  – тангенциальная и нормальная компоненты скорости вдоль границы области течения. Пусть  $\theta(\eta)$  и  $\gamma(\xi)$  – функции угла между вектором скорости и вектором  $\vec{\tau}$  на свободной границе и на поверхности проницаемой щеки клина. Эти функции, согласно их определению, можно выразить следующим образом:  $\theta(\eta) = \text{tg}^{-1}(v_n(\eta)/v_s(\eta))$ ,  $\gamma(\xi) = \text{tg}^{-1}(v_n(\xi)/v_s(\xi))$ . Уравнение (9) позволяет определить аргумент производной комплексного потенциала,  $\theta = \arg(dw/d\zeta)$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} \vartheta(\zeta) &= \arg\left(\frac{dw}{d\zeta}\right) = \arg\left(\frac{dw}{ds}\right) + \arg\left(\frac{ds}{d\zeta}\right) = \\ &= \theta(\zeta) + \begin{cases} 0, & 0 < \xi < 1, & \eta = 0, \\ \pi/2, & \xi = 0, & 0 < \eta < \infty. \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

Поведение угла вектора скорости к границе области течения приведено на рис. 2, которое соответствует конфигурации течения, показанной на рис.1, а.

Проанализируем поведение функций  $\theta(\eta)$  и  $\gamma(\xi)$  вдоль границы области течения, то есть вдоль действительной и мнимой оси области параметра  $\zeta$ , которые соответствуют смоченной поверхности щеки клина и свободной поверхности, показанной на рис. 1, а. Между точками  $C$  и  $A_-$ ,  $1 < \xi < \infty$ , функция  $\gamma \equiv -\pi$ , поскольку  $v_n = 0$ ,  $v_s < 0$ . При обходе точки  $A$  в плоскости параметра по полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в точке  $\zeta = 1$  функция  $\gamma(\xi)$  изменяется скачком от значения  $-\pi$  в точке  $A_-$  до значения  $-\pi - \alpha_s$ . Поскольку компонента скорости  $v_x \rightarrow 0$ , а  $v_y > 0$ , то  $v_s = -v \cos \alpha_s$ ,  $v_n = v \sin \alpha_s$ . Таким образом, скачок функции  $\gamma(\xi)$  при подходе слева и справа к точке  $A$  равен  $\Delta_A = -\alpha_s$ . При движении от точки  $A_+$  к точке  $O_-$  вдоль проницаемой твердой поверхности функция  $\gamma(\xi)$  изменяется непрерывно от значения  $\gamma_A = -\pi - \alpha_s$  до значения  $\gamma_0 = \gamma(\xi)_{\xi=0}$  в точке  $O_-$ , принадлежащей проницаемой твердой

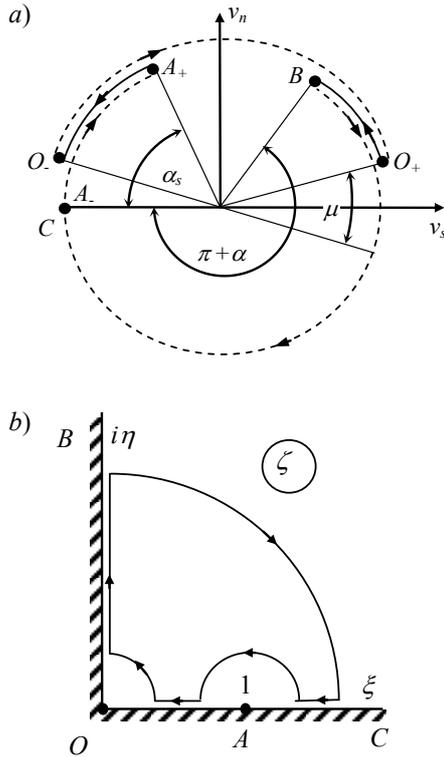


Рис. 2. Поведение угла вектора скорости к границе области течения,  $\operatorname{tg}^{-1}(v_n/v_s)$  (a), соответствующий обход границы области параметра (b)

поверхности. При движении по дуге бесконечно малого радиуса с центром в точке  $\zeta = 0$  против часовой стрелки в области параметра будем иметь линию, охватывающую точку  $A$  в стационарной плоскости  $z$  и соединяющую поверхность тела и свободной границы. При этом скачок функции  $\operatorname{tg}^{-1}(v_n/v_s)$  будет  $\Delta = \mu - \pi$ , как можно видеть из рис. 2. Угол  $\mu = \theta_0 + \pi - \gamma_0$ , где  $\theta_0 = \theta(\eta)_{\eta=0}$  и  $\gamma_0 = \gamma(\xi)_{\xi=0}$ . Принимая во внимание уравнение (10), можно заметить, что скачок функции  $\arg(dw/d\zeta)$  будет  $\Delta_{\vartheta} = \Delta + \pi/2 = \mu - \pi/2$ . При обходе точки  $O$  в области параметра изменение аргумента  $\arg \zeta$  равно  $\pi/2$ , то есть мы можем ожидать, что функция  $dw/d\zeta$  в точке  $O$  ( $\zeta = 0$ ) имеет особенность порядка  $dw/d\zeta \sim \zeta^{2\Delta_{\vartheta}/\pi}$ . При движении от точки  $O$  к точке  $B$  вдоль мнимой оси области параметра, функция  $\theta(\eta)$  изменяется непрерывно от значения  $\theta_0$  до значения  $\theta_B = \theta(\eta)_{\eta \rightarrow \infty}$ .

Можно записать функцию  $\vartheta(\eta)$  следующим образом:

$$\vartheta(\zeta) = \arg \left( \frac{dw}{d\zeta} \right) = \quad (11)$$

$$= \begin{cases} -\pi, & 1 < \xi < \infty, \quad \eta = 0, \\ -\pi + \Delta_A + \gamma(\xi), & 0 < \xi < 1, \quad \eta = 0, \\ \theta(\eta) + \Delta_{\vartheta}, & 0 < \eta < \infty, \quad \xi = 0. \end{cases}$$

Задача состоит в нахождении функции  $dw/d\zeta$  в области параметра, которая удовлетворяет граничному условию (11). Решение этой однородной краевой задачи находится с помощью интегральной формулы, предложенной в работе [5]:

$$G(\zeta) = K \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\vartheta}{d\xi} \ln(\zeta^2 - \xi^2) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\vartheta}{d\eta} \ln(\zeta^2 + \eta^2) d\eta + i\vartheta_{\infty} \right], \quad (12)$$

где  $K$  – действительный коэффициент;  $\vartheta_{\infty} = \vartheta(\zeta)|_{|\zeta| \rightarrow \infty}$ . Подставляя в выражение (12) функцию  $\vartheta$  из выражения (11) и интегрируя на участках, соответствующих скачкообразному изменению функции  $\vartheta$ , можно получить выражение для производной комплексного потенциала в виде

$$\frac{dw}{d\zeta} = K \frac{\zeta^{\frac{2\mu}{\pi}-1}}{(1-\zeta^2)^{\alpha_s/\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\gamma}{d\xi} \ln(\xi^2 - \zeta^2) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{d\eta} \ln(\zeta^2 + \eta^2) d\eta \right]. \quad (13)$$

Интегрированием выражения (13) в области параметра можно получить функцию комплексного потенциала течения, которая конформно отображает область параметра на область комплексного потенциала:

$$w(\zeta) = w_A + K \int_1^{\zeta} \frac{\zeta^{\frac{2\mu}{\pi}-1}}{(1-\zeta^2)^{\alpha_s/\pi}} \times \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\gamma}{d\xi} \ln(\xi^2 - \zeta'^2) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{d\eta} \ln(\zeta'^2 + \eta^2) d\eta \right] d\zeta',$$

в котором  $w_A$  – аддитивная постоянная.

Из выражений (8) и (13) можно получить выражение для производной отображающей функции:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta} / \frac{dz}{dz} = \frac{K}{v_0} \frac{\zeta^{\frac{2\mu}{\pi}-1}}{(1-\zeta^2)^{\alpha_s/\pi}} \times \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\gamma}{d\xi} \ln(\xi^2 - \zeta^2) d\xi + \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{d\eta} \ln(\eta^2 + \zeta^2) d\eta - \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\beta}{d\xi} \ln\left(\frac{\xi - \zeta}{\xi + \zeta}\right) d\xi + \\
 & + \left. \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \ln v}{d\eta} \ln\left(\frac{\eta - \zeta}{\eta + \zeta}\right) d\eta + i\beta_0 \right]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Интегрируя производную отображающей функции в выражении (15), можно получить саму отображающую функцию  $z = z(\zeta)$ . Выражения (8), (13) и (15) содержат параметр  $K$  и функции  $\gamma(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\theta(\eta)$  и  $v(\eta)$ , которые должны быть определены из физических условий задачи, включающих условие для длины смоченной части щеки клина, динамическое и кинематическое граничные условия на свободной поверхности, а также условие (1) либо (2).

В физической плоскости течения положение точки  $O$  определяется выражением:  $Z_O = V_0 t z_0 = V_0 t e^{i\beta_0} = V t v_0 e^{i\beta_0}$ . Соответствующая смоченная длина щеки клина  $OA$  в стационарной плоскости равна  $v_0$ , следовательно, параметр  $K$  может быть найден из условия

$$K \int_0^1 \left| \frac{1}{K} \frac{ds}{d\xi} d\xi \right| = v_0, \quad (16)$$

если функции  $\gamma(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\theta(\eta)$  и  $v(\eta)$  известны.

### 1.2. Динамическое и кинематическое граничные условия

Динамическое и кинематическое граничные условия для произвольного автомодельного течения могут быть получены из двух нижеследующих условий. Записывая интеграл Бернулли в автомодельных переменных и дифференцируя полученное выражение вдоль дуговой координаты  $s$ , приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{v + s \cos \theta}{s \sin \theta} \frac{d \ln v}{ds}. \quad (17)$$

Вторым условием является то, что ускорение жидкой частицы на свободной границе, где давление постоянно, направлено перпендикулярно касательной к свободной границе. В автомодельных переменных это условие принимает вид

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{d \ln v}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \arg \left( \frac{dw}{dz} \right) \right]. \quad (18)$$

Уравнения (17) и (18) были получены в работе [8]. Умножая обе части уравнения (17) на  $ds/d\eta = |dz/d\zeta|_{\zeta=i\eta}$ , можно получить следующее интегро-дифференциальное уравнение для функции  $\theta(\eta)$ :

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{v + s \cos \theta}{s \sin \theta} \frac{d \ln v}{d\eta}, \quad (19)$$

где дуговая координата  $s = s(\eta)$  находится интегрированием выражения  $-|dz/d\zeta|_{\zeta=i\eta}$  вдоль мнимой оси области параметра. Определяя аргумент комплексной скорости из выражения (8) при  $\zeta = i\eta$  и подставляя результат в уравнение (18), можно получить следующее интегральное уравнение относительно функции  $d \ln v/d\eta$ :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{d \ln v}{d\eta} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \ln v}{d\eta'} \frac{2\eta'}{\eta'^2 - \eta^2} d\eta' = \\
 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{d\xi} \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} d\xi. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Система уравнений (19) и (20) позволяет определить функции  $\theta(\eta)$  и  $d \ln v/d\eta$  вдоль мнимой оси области параметра, тогда величина скорости на свободной границе получается интегрированием функции  $d \ln v/d\eta$ :

$$v(\eta) = v_{\infty} \exp \left( - \int_{\eta}^{\infty} \frac{d \ln v}{d\eta'} d\eta' \right), \quad (21)$$

где  $v_{\infty}$  – заданная скорость на бесконечности. Это позволяет определить скорость в точке  $O$ ;  $v_0 = v(\eta)_{\eta=0}$ .

### 1.3. Определение функций $\gamma(\xi)$ и $\beta(\xi)$ на проницаемой поверхности щеки клина $OA$

Тангенциальная компонента скорости на твердой проницаемой поверхности может быть определена из уравнения (9) следующим образом. Умножая правую и левую части уравнения (9) на выражение

$$\frac{1}{dz} \frac{dz}{ds} = \frac{1}{dz} \exp(i\delta) \quad (22)$$

(здесь  $\delta = -\pi/2 - \alpha_s$  – угол между вектором  $\vec{\tau}$  и осью  $x$ ), получим следующее выражение для тангенциальной компоненты скорости:

$$v_s = \operatorname{Re} \left( \frac{dw}{dz} \frac{dz}{ds} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{dw}{dz} \Big|_{\zeta=\xi} e^{i\delta} \right). \quad (23)$$

Из уравнения (1) либо (2) безразмерная величина нормальной компоненты скорости на проницаемой поверхности определяется как  $v_n = \alpha_0 c_p$  либо как  $v_n = \chi_0 \sqrt{c_p}$ . Согласно определению функции  $\gamma(\xi) = \tan^{-1}(v_n/v_s)$ , получим следующее выражение для функции  $\gamma(\xi)$ :

$$\gamma(\xi) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{v_n(\xi)}{\operatorname{Re} \{ dw/dz|_{\zeta=\xi} e^{i\delta} \}} \right). \quad (24)$$

Угол  $\delta$  можно выразить через углы  $\beta$  и  $\gamma$  в виде  $\delta = \beta + \gamma$ , если взять аргумент производной отображающей функции (15). Так как угол  $\delta = -\pi/2 - \alpha_s$ , то функцию  $\beta(\xi)$  можно определить из уравнения

$$\beta(\xi) = \delta - \gamma(\xi). \quad (25)$$

Из решения системы интегральных уравнений (19)–(20) можно найти функции  $\theta(\eta)$  и  $v(\eta)$ , а из уравнений (23) и (24) – функции  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$ . Если эти функции известны, скорость в точке  $O$   $v_0 = v(\eta)_{\eta=0}$  и контактный угол  $\mu = \theta(\eta)_{\eta=0} + \pi - \gamma(\xi)_{\xi=0}$  могут быть найдены (см. рис. 2, а).

Выражения (6), (11)–(13) позволяют определить из интеграла Бернулли коэффициент давления в любой точке области течения. Полагая, что в точке  $A$  давление  $P_A$  и скорость  $v_A = |dw/dz|_{\zeta=1}$  известны, а также потенциал  $w_A = 0$ , с использованием автомодельных переменных можно получить следующее выражение:

$$c_p^* = \frac{(P - P_A)}{\rho V^2} = \operatorname{Re} \left( -w + z \frac{dw}{dz} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 + \frac{1}{2} v_A^2, \quad (26)$$

где  $P$  – давление в некоторой точке течения  $z$ ;  $P_A$  – давление в точке  $A$ . Потенциал  $w$ , координата точки  $z$  и комплексная скорость  $dw/dz$  находятся из уравнений (14), (15) и (8) при  $\zeta = \xi$  соответственно. Коэффициент давления, определенный относительно окружающего давления  $P_a$ , можно найти относительно точки  $O$ , в которой  $P = P_a$ , и выразить следующим образом:

$$c_p(\xi) = \frac{(P - P_a)}{\rho V^2} = c_p^*(\xi) - c_p^*(0). \quad (27)$$

## 2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

### 2.1. Численный метод

В настоящей работе используется метод последовательных приближений для численного решения системы интегральных уравнений, разработанный

ранее при решении задачи соударения твердого и жидкого клина. В дискретном виде задача решается на множестве точек  $0 < \xi_j < 1$ ,  $j = 1, \dots, M$ , расположенных на действительной оси области параметра, а также на множестве точек, распределенных вдоль мнимой оси,  $0 < \eta_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Точкам  $\xi_j$  и  $\eta_i$  соответствуют точки  $s_{\xi j}$  и  $s_{\eta i}$  на смоченной части клина и свободной поверхности. Функции  $s_\xi = s(\xi)$  и  $s_\eta = s(\eta)$  получаются интегрированием модуля производной отображающей функции (14) соответственно вдоль действительной и мнимой оси области параметра. В точке пересечения свободной границы и клина  $\zeta = 0$  выражения производной комплексного потенциала (13) и производной отображающей функции (15) имеют особенность вида  $\zeta^{2\mu/\pi-1}$ . При малых углах контакта свободной поверхности  $\mu \rightarrow 0$  эта особенность становится логарифмической. Поэтому точки  $s_{\xi 1}$  и  $s_{\eta 1}$ , ближайшие к точке  $O$ , должны быть определены аналитически интегрированием модуля выражения (15) на интервалах  $0 < \xi < \xi_1$  и  $0 < \eta < \eta_1$  соответственно:

$$\{s_{\xi 1}, -s_{\eta 1}\} = \frac{\pi K}{2\mu v_0} \exp \left[ -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{d\gamma}{d\xi} \ln \xi \, d\xi + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\theta}{d\eta} \ln \eta \, d\eta \right] \{\xi_1, \eta_1\}^{2\mu/\pi}. \quad (28)$$

Длины  $s_{\xi 1}$  и  $s_{\eta 1}$  соответствуют длине тонкой концевой струи в точках пересечения поверхности клина и свободной границы. При малых углах  $\mu$  величина  $s_{\xi 1}$  может составлять половину смоченной длины щеки клина, как ранее было показано Логвиновичем [9].

### 2.2. Верификация численного метода и анализ влияния пористости твердого клина

Для оценки точности численного метода и независимости результатов расчета от выбора множества узловых точек на действительной и мнимой осях области параметра результаты расчетов были получены для нескольких распределений узловых точек с различным числом точек дискретизации  $N$  и  $M$ . В табл. 1 представлены значения угла контакта  $\mu/\pi$ , максимального давления на щеке клина  $c_{p \max}$ , найденные для пористой поверхности клина с полууглом при вершине  $\alpha_s = 60^\circ$ , проникающего в полупространство жидкости,  $\alpha_l = 90^\circ$ . Полученные результаты для различных значений  $N$  сравниваются с результатами Иафрати и Коробкина (I & K), представленными в работе [6] с

использованием метода граничных элементов. Вычисления сделаны для параметра пористости  $\alpha_0$  в диапазоне значений  $0 \div 0.5$ . Из табл. 1 видно, что контактный угол  $\mu/\pi$  сходится к предельному значению, которое совпадает с полученным в работе [6]. Как ожидалось, и это видно из таблицы, при увеличении пористости клина  $\alpha_0$  контактный угол  $\mu/\pi$  и максимальное давление на щеке клина  $c_{p\max}$  уменьшаются.

Табл. 1. Влияние числа дискретизации действительной и мнимой оси области параметра на величину угла  $\mu/\pi$  и максимальное давление на щеке клина

$\alpha_0$	$\mu/\pi, N = 150$	$\mu/\pi, N = 300$	$\mu/\pi, N = 600$
0	0.00962	0.00985	0.00989
0.1	0.00534	0.00562	0.00567
0.2	0.00281	0.00310	0.00315
0.3	0.00139	0.00165	0.00170
0.4	0.00066	0.00085	0.00089
0.5	0.00031	0.00043	0.00045

$\alpha_0$	$c_{p\max}, N = 150$	$c_{p\max}, N = 300$	$c_{p\max}, N = 600$	$c_{p\max}, I\&K$
0	6.99	6.90	6.88	6.88
0.1	5.82	5.70	5.68	5.68
0.2	5.05	4.90	4.88	4.88
0.3	4.49	4.32	4.29	4.29
0.4	4.03	3.86	3.83	3.83
0.5	3.65	3.49	3.46	3.45

Из расчетов видно, что контактный угол  $\mu$  стремится к нулю и концевая струя становится очень тонкой при увеличении проницаемости щеки клина. Это приводит к резкому изменению угла касательной к свободной границе при переходе от концевой струи к основному потоку, как видно на рис. 3. Как отмечалось в работе [6], при очень малых контактных углах  $\mu$  либо для больших значений пористости клина  $\alpha_0$  получение численных результатов становится затруднительно, поскольку требует большого числа узлов дискретизации на действительной и мнимой осях области параметра.

Линии тока и распределение давления вдоль смоченной части щеки клина показаны на рис. 3 для нескольких значений коэффициента пористости  $\alpha_0$ . Можно видеть, что увеличение коэффициента  $\alpha_0$  приводит к уменьшению максимального давления и к некоторому уменьшению смоченной длины пористой поверхности клина. Касательная к линиям тока показывает мгновенное направление скорости, а густота линий тока ха-

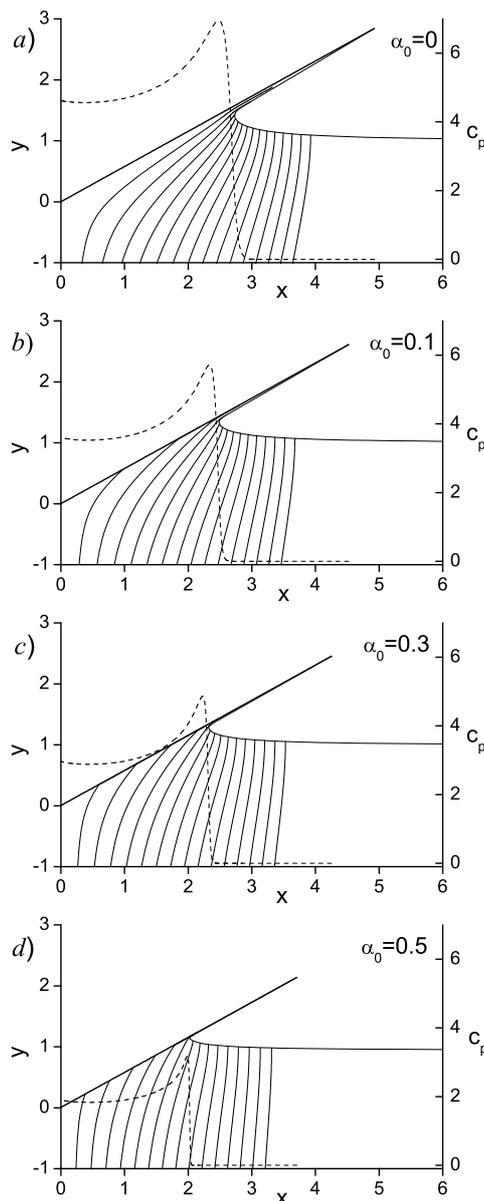


Рис. 3. Влияние коэффициента пористости  $\alpha_0$  на свободную поверхность и линии тока (сплошные линии), а также на распределение давления на щеке клина (штриховые кривые):  
 a –  $\alpha_0 = 0$ ; b –  $\alpha_0 = 0.1$ ; c –  $\alpha_0 = 0.3$ ; d –  $\alpha_0 = 0.5$

рактеризует величину скорости. Малая густота линий тока вблизи вершины клина соответствует минимальной скорости жидкости, которая обращается в ноль в вершине клина при нулевом значении  $\alpha_0$ , то есть для непроницаемой поверхности. При  $\alpha_0 = 0.5$  концевая струя настолько тонкая, что свободная поверхность струи становится неразличима с поверхностью клина. Это означает, что большая часть жидкости проникает через поверх-

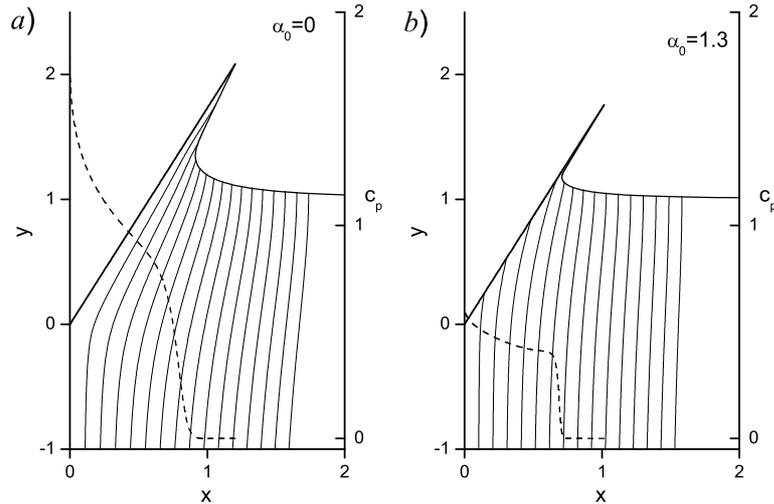


Рис. 4. Линии тока с приращением функции тока  $\Delta\psi = 0.1$  и свободная поверхность (сплошные линии), а также распределение давления (пунктирные линии) вдоль пористого клина для  $\alpha_l = 90^\circ$  и  $\alpha_s = 30^\circ$ :  
 а –  $\alpha_0 = 0$ ; б –  $\alpha_0 = 1.3$ .

ность щеки клина.

Для угла твердого клина  $\alpha_s = 30^\circ$  линии тока, свободная поверхность жидкости и распределение давления на щеке клина представлены на рис. 4. При  $\alpha_0 = 0$  давление на щеке клина значительно меньше, чем для твердого клина с углом  $\alpha_s = 60^\circ$ , при этом отсутствует максимум давления вблизи корневой области концевой струи, который видно на рис. 3. Это согласуется с результатами предыдущих исследований по входу твердого клина в полупространство жидкости [12]. Снижение давления для угла клина  $\alpha_s = 30^\circ$  уменьшает величину нормальной компоненты скорости в соответствии с уравнениями (1) либо (2), и, следовательно, приводит к уменьшению расхода жидкости через пористую поверхность. Несмотря на то, что коэффициент пористости  $\alpha_0$  больше, чем для случая  $\alpha_s = 60^\circ$  на рис. 3, расход жидкости через щеку клина, соответствующий 4-й линии тока, пересекающей поверхность клина на рис. 4, б, равен  $q = 4 \cdot \Delta\psi = 0.4$ , ( $\Delta\psi = 0.1$ ), или 70% от полного расхода  $Q = v_\infty \operatorname{tg} 30^\circ \approx 0.58$  проходящего через пересечение поверхности твердого клина и невозмущенной свободной поверхности. Хотя коэффициент пористости  $\alpha_0$  на рис. 4, б примерно в 2.6 раза больше, чем на рис. 3, d, относительный расход через пористую поверхность клина приблизительно такой же, как для случая  $\alpha_s = 60^\circ$  на рис. 3, d. Это результат того, что давление для клина  $\alpha_s = 30^\circ$  существенно меньше, чем для  $\alpha_s = 60^\circ$  в случае непроницаемой поверхности при  $\alpha_0 = 0$ .

### 2.3. Удар между жидким и перфорированным твердым клином

Перфорированные поверхности широко используются в морской технике для защиты сооружений, расположенных в прибрежной зоне и подверженных волновому воздействию [7, 10], как средство снижения волнового воздействия. Иафрати & Коробкин [6] рассматривали задачу входа перфорированного клина в полупространство жидкости, аналогичную пористому клину. Проницаемость поверхности клина характеризуется коэффициентом  $\chi_0$  в уравнении (2). Результаты расчетов при числе узлов дискретизации  $M = N = 300$  для коэффициента максимального давления  $c_{p \max}$ , его положения  $y_{\max}$ , а также координата точки контакта  $y_0$  показаны в табл. 2 для  $\alpha_l = 90^\circ$  и  $\alpha_s = 60^\circ$ . Как можно видеть, полученные результаты хорошо согласуются с результатами Иафрати и Коробкина (I&K) [6] на основе численного метода граничных элементов.

На рис. 5 показаны результаты расчетов удара жидкого клина с различными углами  $\alpha_l$  о непроницаемую стенку в случаях (a), (c), (e) и перфорированную стенку с коэффициентом  $\chi = 0.5$  для случаев (b), (d), (f). Показаны линии тока, свободная поверхность и распределение давления на стенке. Как ожидалось, давление на стенке снижается в результате перфорации. Снижение давления более существенно в области, где давление на непроницаемой поверхности выше. Это следствие большего расхода жидкости через перфорирован-

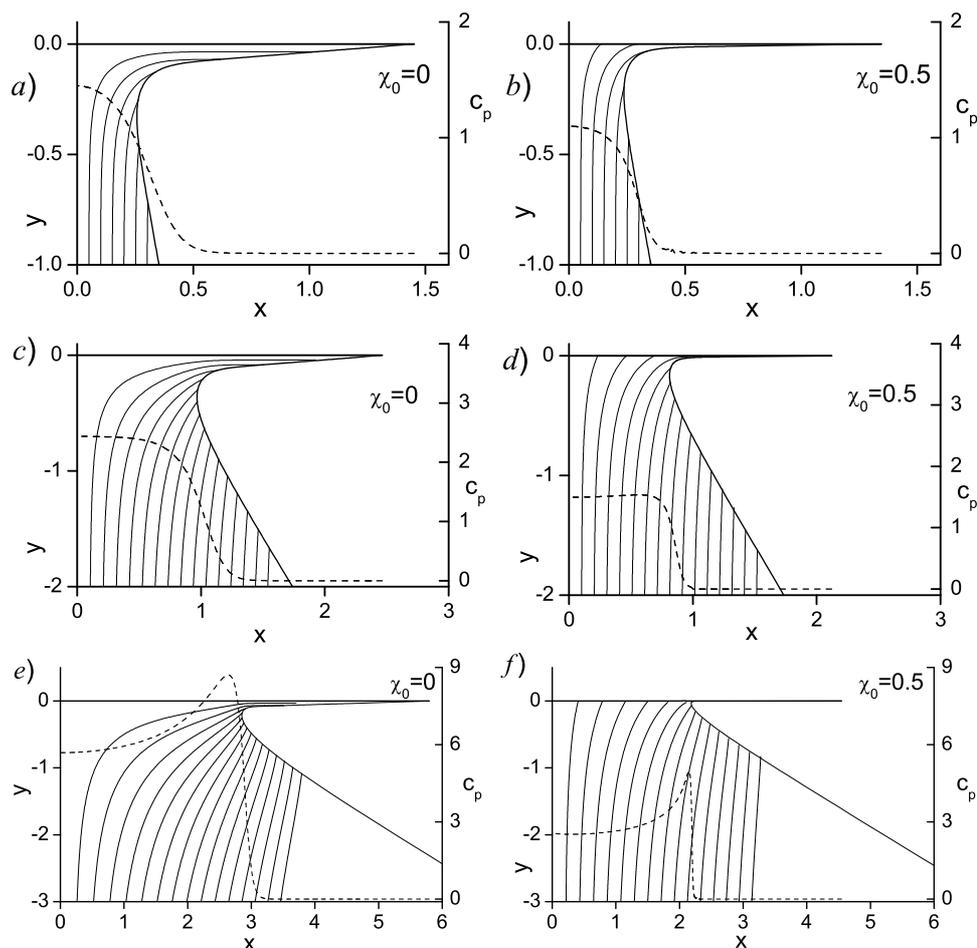


Рис. 5. Линии тока, свободная поверхность (сплошные линии) и распределение давления вдоль стенки (штриховая линия):

$\alpha_l = 10^\circ, \Delta\psi = 0.05, \chi = 0$  (a) и  $\chi = 0.5$  (b);  
 $\alpha_l = 30^\circ, \Delta\psi = 0.1, \chi = 0$  (c) и  $\chi = 0.5$  (d);  $\alpha_l = 60^\circ, \Delta\psi = 0.2, \chi = 0$  (e) и  $\chi = 0.5$  (f)

Табл. 2. Сравнение полученных основных параметров при входе перфорированного клина в жидкость с результатами Иафрати и Коробкина (I&K) [6] для различных значений коэффициента  $\chi_0$

$\chi_0$	$c_{p \max}$		$y_{\max}$		$y_0$	
	I&K		I&K		I&K	
0	6.92	6.88	1.43	1.42	2.84	2.83
0.1	6.05	6.03	1.37	1.37	2.67	2.67
0.2	5.34	5.33	1.32	1.31	2.54	2.53
0.3	4.74	4.74	1.27	1.27	2.42	2.42
0.4	4.24	4.24	1.23	1.23	2.32	2.32
0.5	3.80	3.81	1.20	1.20	2.25	2.25

ную поверхность в соответствии с уравнением (2). Также отметим, что положение максимума давления смещается к оси симметрии. Это уменьшает площадь стенки, подверженную высокому гидродинамическому давлению. Концевая струя становится значительно тоньше, а длина смоченной поверхности несколько уменьшается.

На рис. 6 представлны результаты расчетов для твердого клина, имеющего полуугол раствора  $\alpha_s = 135^\circ$ , и жидкого клина с углами  $\alpha_l = 10^\circ$  и  $\alpha_l = 30^\circ$ . При таких значениях углов клиньев угол между свободной поверхностью жидкости и щекой клина равен  $\Delta_f = 35^\circ$  для рис. 6, a, b и  $\Delta_f = 15^\circ$  для рис. 6, c, d. Для случаев (a) и (c) коэффициент  $\chi_0 = 0$ , что соответствует непроницаемой стенке. При этом можно видеть малую густоту линий тока вблизи вершины клина, что указывает на малые скорости жидкости, то есть в этой области

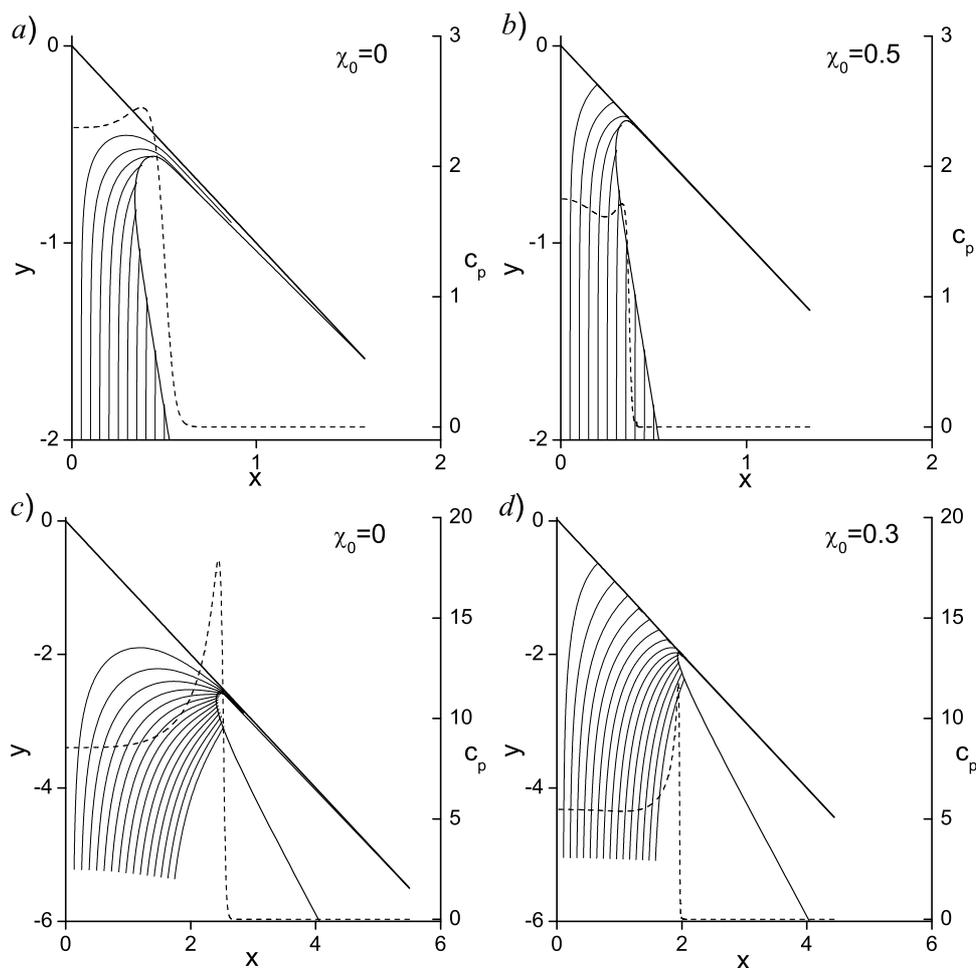


Рис. 6. То же, что на рис. 5 для  $\alpha_s = 135^\circ$ :  $\alpha_l = 10^\circ$ ,  $\Delta\psi = 0.05$ ,  $\chi = 0$  (a) и  $\chi = 0.5$  (b);  $\alpha_l = 30^\circ$ ,  $\Delta\psi = 0.1$ ,  $\chi = 0$  (c) и  $\chi = 0.3$  (d)

образуется практически застойная область. При  $\chi_0 = 0$  линии тока вблизи вершины расположены более густо, что обусловлено скоростью проникновения жидкости в перфорированную поверхность. При этом концевая струя становится очень тонкой и совпадает на рисунке со щекой клина. Заметим, что для  $\Delta_f = 15^\circ$  даже при относительно небольшом значении коэффициента  $\chi_0 = 0.3$  практически вся жидкость проникает через перфорированную поверхность.

Сравнивая результаты на рис. 5 и 6, можно видеть, что при меньшем угле  $\Delta_f$  давление на поверхности клина больше, включая пик давления вблизи корневой области концевой струи. Однако большее давление соответствует большему расходу жидкости сквозь стенку, что приводит к относительно большему снижению давления, обусловленного перфорацией стенки.

## ВЫВОДЫ

Ударное взаимодействие жидкости и проницаемой твердой поверхности исследовано на основе решения автомодельной задачи для потенциала течения. Автомодельное решение получено с использованием интегрального метода годографа и позволяет свести задачу к решению системы интегральных уравнений для величины и угла скорости жидкости на свободной границе. Исследованы различные конфигурации жидкости и твердого клина, для которых определены распределение давления на проницаемом теле и расход жидкости через поверхность. Исследованы два типа проницаемости, которые соответствуют пористой и перфорированной поверхности. Численные результаты позволили определить степень снижения давления при различных значениях коэффициента проницаемости.

1. *Iafrati A., Miloh T. and Korobkin A.A.* Oblique Water Entry of a Block Sliding along a Sloping Beach // Proceedings of International Conference on Violent Flows.–Fukuoka, Japan.– 2007.– <http://www.iwwwfb.org/>.
2. *Baldi P. et al.* Monitoring the morphological evolution of the Sciara del Fuoco during the 2002-2003 Stromboli eruption using multi-temporal photogrammetry // ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing.– Vol.59.– 2005.– P. 199 - 211.
3. *Добровольская З.Н.* О характере контакта свободной поверхности жидкости с твердой границей в задаче о проникании клина // ДАН СССР.– 1963.– Т. 153, № 4.– С. 783 – 786.
4. *Савченко Ю.Н., Семенов Ю.А.* Обобщенная авторемодельная задача соударения жидкого и твердого клина // В кн. «Суперкавиация: достижения и перспективы».– Киев: Ин-тут гидромеханики НАН Украины.– 2010.– С. 88 – 98.
5. *Семенов Ю.А.* Комплексный потенциал нестационарного течения со свободной границей // Вестник Херсонского университета.– Херсон.– 2003, Том 2.– С. 384 - 387.
6. *Iafrati A. and Korobkin A.A.* Self-similar solutions for porous/perforated wedge entry problem // In 20th IWWWFB Proc.– Oslo 29 May – 1 June.– 2005.– P. ...–<http://www.iwwwfb.org/>
7. *Molin B. and Korobkin A.A.* Water entry of perforated wedge // In 16th IWWWFB Proc // Eds. K. Mori and H. Iwashita.– Hiroshima 22-25 April.– 2001.– P. 121- 124.
8. *Semenov Y.A. and Iafrati A.* On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges // J. Fluid Mech.– 2006.– Vol. 547.– P. 231 – 256.
9. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами.– Киев: Наукова думка, 1969.– 215 с.
10. *Molin B.* Motion Damping by Slotted Structures. In Hydrodynamics: Computations, Model Tests // Reality and Developments in Marine Technology 10.– Elsevier.– 1992.– P. 297.