

УДК 537.84

# УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПРИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Н. Ф. ПАЦЕГОН, С. И. ПОЦЕЛУЕВ

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,  
61022, Харьков, пл. Свободы, 4  
patcegon@gmail.com

Получено 12.04.2014

Рассматриваются задачи параметрической и статической неустойчивостей свободной поверхности вязкой нелинейно намагничивающейся жидкости и динамической стабилизации такого рода неустойчивостей с помощью осциллирующих магнитных и гравитационных полей. Предполагается, что жидкость находится в произвольно ориентированном к ее свободной поверхности магнитном поле, которое состоит из постоянной и осциллирующей частей, а также под воздействием модулированного гравитационного ускорения. Исследуется структура областей неустойчивости для свободной поверхности феррожидкости, которая параметрически возбуждается полигармоническим воздействием.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** нелинейно намагничивающаяся жидкость, параметрическая и статическая неустойчивость, магнитное поле, гравитационное поле

Розглядаються задачі параметричної та статичної нестійкостей вільної поверхні в'язкої рідини, що нелінійно намагнічується, а також динамічної стабілізації такого роду нестійкостей за допомогою осцилюючих магнітних та гравітаційного полів. Припускається, що рідина знаходиться в довільно орієнтованому до її вільної поверхні магнітному полі, яке складається з постійної та осцилюючої частин, а також під впливом модульованого гравітаційного прискорення. Досліджується структура областей нестійкості для вільної поверхні феррорідини, яка параметрично збуджується полігармонічною дією.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** рідина, що нелінійно намагнічується, параметрична та статична нестійкість, магнітне поле, гравітаційне поле

The problem of parametric and static instabilities of the free surface of viscous nonlinear magnetizable fluid and dynamic stabilization of such instabilities using oscillating magnetic and gravitational fields is considered. It is assumed that the fluid is in an arbitrarily oriented towards its free surface magnetic field, that is consist of a constant and the oscillating parts, as well as under the influence of modulated gravitational acceleration. The structure of the instability regions for the free surface of a ferrofluid, which is parametrically excited by polyharmonic impact is investigated.

**KEY WORDS:** nonlinear magnetizable fluid, parametric and static instabilities, magnetic field, gravitational field

## ВВЕДЕНИЕ

Одно из важных направлений в теории волновых движений составляют задачи устойчивости поверхности раздела жидкостей, в частности свободной поверхности, в однородных нестационарных полях различной природы. Периодическая модуляция, обуславливающая возникновение параметрического резонанса (параметры модуляции – частота и амплитуда периодических воздействий), представляет значительный интерес как для приложений, в связи с широкой распространенностью в технике (колебания температуры, механические вибрации, звуковые и электромагнитные поля и т.д.), так и для идентификации параметров, характеризующих саму жидкость.

Интерес к задачам устойчивости поверхности жидкости в переменных полях связан также с тем, что во многих гидродинамических системах, неустойчивых в стационарных полях, возможна

динамическая стабилизация равновесия параметрическим воздействием. Таким образом, с помощью специально подобранных параметров модуляции можно эффективно управлять гидродинамической устойчивостью.

Первые исследования стоячих поверхностных волн принадлежат М. Фарадею [1], обнаружившему, что при определенной вынуждающей частоте колебаний сосуда на свободной поверхности возникают волны с половинной частотой колебаний (субгармонические колебания) либо той же частоты (гармонические колебания), соответствующие параметрическому резонансу.

Задача устойчивости поверхности раздела двух ньютоновских несмешивающихся вязких жидкостей, подвергающихся периодическим колебаниям, сводится к интегро-дифференциальному уравнению для амплитуды возмущений поверхности [2], что вызывало определенные затруднения в ее исследовании. Окончательно она была решена в

работах [3,4], где с использованием теории Флоке был предложен метод сведения ее к задаче на собственные значения для матрицы бесконечного порядка и построения нейтральных кривых устойчивости.

Современное состояние проблемы о влиянии вибраций на гидродинамические системы со свободной поверхностью жидкости или поверхностью раздела несмешивающихся жидкостей представлено в работах [5,6]. Рассмотрены различные обобщения классической задачи Фарадея о развитии параметрического резонанса в механических системах, находящихся в изотермических условиях.

Первые исследования устойчивости свободной поверхности однородно намагничивающейся жидкости в постоянном магнитном поле принадлежат Р. Розенцвейгу [7]. Он обнаружил, что однородное стационарное магнитное поле, приложенное перпендикулярно к плоскому слою магнитной жидкости, вызывает спонтанное образование на ее поверхности упорядоченной структуры из острых пиков, когда величина поля превышает критическое значение (неустойчивость Розенцвейга).

Влиянию постоянного магнитного поля на устойчивость свободной поверхности магнитной жидкости при вертикальных вибрациях контейнера посвящены работы [8,9]. Показано, что механизм параметрического возбуждения может привести к задержке неустойчивости Розенцвейга в вертикальном магнитном поле, т.е. к увеличению критического значения нормального поля. Обнаружено, что наложение горизонтального к свободной поверхности стационарного магнитного поля может стабилизировать неустойчивость Фарадея.

В случае идеальной нелинейно намагничивающейся жидкости уравнение для амплитуды малых возмущений свободной поверхности в периодических магнитных полях сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами [10]. В работе [11] определены критические значения напряженности магнитного поля при возникновении параметрической и статической неустойчивостей свободной поверхности жидкости во вращающемся в вертикальной плоскости однородном магнитном поле и чисто осциллирующих касательных либо нормальных к свободной поверхности магнитных полях. Проанализирована последовательность наступления этих неустойчивостей.

Исследованию устойчивости поверхности раздела феррожидкости в вертикальном магнитном поле, которое состоит из постоянной и осциллирующей частей, посвящены работы [12–15]. Экспериментально обнаружено, что наложение осциллиру-

ющей добавки к постоянному значению напряженности вертикального магнитного поля приводит к ускорению наступления неустойчивости Розенцвейга. Показано, что уравнение для амплитуды малых периодических возмущений свободной поверхности сводится к уравнению Хилла, что обобщает уравнение Матъе для чисто осциллирующих магнитных полей.

Двухчастотное параметрическое возбуждение поверхностных волн вертикальным магнитным полем рассмотрено в работе [16].

В отличие от приведенных выше работ, в которых параметрическое возбуждение имеет одну природу (либо гравитационную, либо магнитную), в настоящей работе рассматриваются случаи, когда модулированное гравитационное ускорение, касательная и нормальная составляющие напряженности магнитного поля представляются в виде синусоидальных процессов, частоты которых находятся в простом кратном отношении. Это позволяет проанализировать влияние отношений амплитуд и частот различных параметрических воздействий на изменение структуры областей неустойчивости. Кроме того, поскольку в линейном приближении движение нелинейно намагничивающейся жидкости является изоэнтропийным при равном нулю коэффициенте теплопроводности, а не изотермическим, как в приведенных выше работах, мы исследуем влияние температурных изменений на границу областей неустойчивости. При этом не учитываются эффекты, связанные с наличием внутреннего момента количества движения [17] и конечной скорости распространения тепла [18].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается безграничный слой магнитной жидкости, над которой сверху находится немагнитная среда меньшей плотности, например воздух (см. рис. 1), влиянием которой на движение жидкости в дальнейшем пренебрегается. Предполагается, что нелинейно намагничивающаяся жидкость находится в произвольно ориентированном к ее свободной поверхности однородном нестационарном магнитном поле, а также под воздействием модулированного гравитационного ускорения  $\vec{g}_e$ .  $z = \zeta(x, y, t)$  – поверхность раздела двух полубесконечных слоев, причем в состоянии относительного равновесия  $z = 0$  – уравнение равновесной поверхности раздела. Феррожидкость считается вязкой, непроводящей, несжимаемой и однородной.

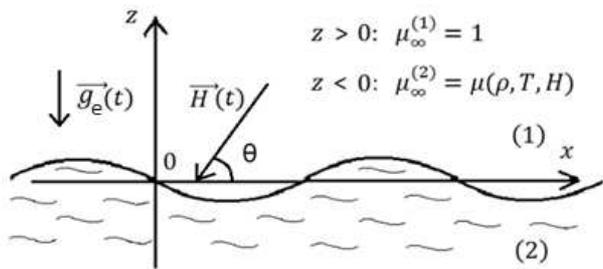


Рис. 1. К постановке задачи

Уравнение изменения энтропии имеет вид:

$$\frac{dS}{dt} = \kappa \Delta T + 2\eta v_{ik} v_{ik}.$$

В случае нетеплопроводной жидкости ( $\kappa = 0$ ) и малых возмущений ( $v_{ik} v_{ik} \approx 0$ ) имеем:

$$\frac{dS}{dt} = 0; \quad S = S(\rho, T, H) = \text{const.}$$

Следовательно, движение жидкости будет адиабатическим (изоэнтропийным), если начальное состояние феррожидкости является однородным.

Для областей, занятых воздухом и вязкой нелинейно намагничивающейся жидкостью, имеем систему уравнений [7,19]:

$$\text{div } \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla (p_0 + \phi^{(\rho)}) + M \nabla H + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}_e, \tag{2}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad S = S_0 + \frac{1}{\rho} \int_0^H \frac{\partial M}{\partial T} dH = \text{const}, \tag{3}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} = 0, \tag{4}$$

$$\vec{B} = \mu(\rho, T, H) \vec{H}, \quad \vec{M} = M(\rho, T, H) \frac{\vec{H}}{H}, \tag{5}$$

$$S_0 = c_v \ln T + \text{const}, \tag{6}$$

$$\phi^{(\rho)} = \int_0^H \left( M - \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} \right) dH, \tag{7}$$

где  $\vec{g}_e = (-g + \omega_e^2 a_e \cos(\omega_e t)) \vec{e}_z$  – модулированное гравитационное ускорение.

Тензор напряжений вязкой намагничивающейся жидкости имеет вид:

$$P_{jk} = - \left( p_0 + \phi^{(\rho)} + \frac{H^2}{8\pi} \right) \delta_{jk} + \frac{H_j B_k}{4\pi} + 2\eta v_{jk} - \rho g_e \zeta \delta_{j3} \delta_{k3}, \tag{8}$$

где последнее слагаемое обусловлено наличием модулированного гравитационного ускорения  $\vec{g}_e$ .

Граничные условия в задаче о параметрической устойчивости поверхности раздела включают кинематическое условие, условие непрерывности касательных напряжений и условие Лапласа для нормальных напряжений:

$$v_n = D \quad \text{при } z = \zeta, \tag{9}$$

$$\langle P_{jk} \tau_{1j} n_k \rangle = 0, \langle P_{jk} \tau_{2j} n_k \rangle = 0 \quad \text{при } z = \zeta, \tag{10}$$

$$\langle p_0 + \phi^{(\rho)} + 2\pi M_n^2 \rangle = -\sigma \text{div } \vec{n} \quad \text{при } z = \zeta, \tag{11}$$

условия для электромагнитного поля:

$$\langle B_n \rangle = 0, \quad \langle \vec{H}_\tau \rangle = 0 \quad \text{при } z = \zeta, \tag{12}$$

граничные условия на бесконечности:

$$\vec{v}^{(i)} = 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \tag{13}$$

$$\vec{H}^{(i)} = \left( H_x, H_y, \frac{H_z}{\mu} \right) = \vec{H}_\infty^{(i)} \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \tag{14}$$

где  $\langle a \rangle = a^{(2)} - a^{(1)}$  – скачок соответствующих величин;  $i = 1, 2$  – индекс среды (1 – для воздуха, 2 – для магнитной жидкости);  $D$  – скорость распространения свободной поверхности,

$$D = - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}}.$$

Внешняя нормаль и касательные векторы к поверхности раздела имеют вид:

$$\vec{n} = \frac{(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}},$$

$$\vec{\tau}_1 = \frac{(1, 0, \zeta_x)}{\sqrt{1 + \zeta_x^2}}, \quad \vec{\tau}_2 = \frac{(0, 1, \zeta_y)}{\sqrt{1 + \zeta_y^2}}.$$

Величины, входящие в (1)–(14), обозначают:  $\vec{v}$  – скорость среды;  $\rho$  – плотность;  $p_0$  – механическое давление;  $\phi^{(\rho)}$  – магнитоэлектрическое давление;  $M$  – намагниченность среды;  $\mu$  – магнитная проницаемость;  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\eta$  – динамическая вязкость;  $S$  – массовая плотность энтропии;  $c_v$  – теплоемкость;  $T$  – температура среды;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. По повторяющимся индексам производится суммирование в пределах их изменения.

**1.1. Постановка задачі в термінах потенціала напруженності магнітного поля**

Інтеграл адиабатичності (3) дозволяє визначити температуру як функцію напруженності магнітного поля:

$$T^{(i)} = T^{(i)}(\rho, H^{(i)}), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому намагніченість в кожній з областей являється функцією напруженності поля:

$$M = M(\rho, T(\rho, H), H) = \tilde{M}(H).$$

Таким образом, пондеромоторная сила потенциальна:

$$M \nabla H = \nabla \int_0^H \tilde{M}(H) dH.$$

В рассматриваемом случае, при наличии интеграла адиабатичности течения, задача сводится к исследованию течений жидкости со специальным уравнением магнитного состояния, в котором намагніченість может рассматриваться только функцией плотности среды и напруженності магнітного поля.

В силу уравнения  $\text{rot } \vec{H} = 0$ , напруженність магнітного поля может быть представлена в виде:

$$\vec{H} = \nabla \Phi,$$

где  $\Phi$  – потенциал напруженності магнітного поля. Тогда из уравнения  $\text{div } \vec{B} = 0$  получаем:

$$\Delta \Phi = -4\pi \text{div} \left( \frac{M(\rho, T(|\nabla \Phi|), |\nabla \Phi|)}{|\nabla \Phi|} \nabla \Phi \right).$$

Граничные условия (12),(14) для электромагнитного поля примут вид:

при  $z = \zeta(x, y, t)$ :

$$\langle \mu \Phi_z \rangle = \zeta_x \langle \mu \Phi_x \rangle + \zeta_y \langle \mu \Phi_y \rangle, \quad (15)$$

$$\langle \Phi_x \rangle + \zeta_x \langle \Phi_z \rangle = 0, \quad (16)$$

$$\langle \Phi_y \rangle + \zeta_y \langle \Phi_z \rangle = 0, \quad (17)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$\nabla \Phi^{(i)} = \vec{H}_\infty^{(i)} \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

**1.2. Постановка задачі в термінах функции тока**

Рассмотрим плоский случай:

$$v_x = v_x(x, z, t), \quad v_z = v_z(x, z, t).$$

Введем функцию тока  $\psi = \psi(x, z, t)$ :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда система уравнений и граничных условий преобразуются к виду:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta \psi + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \psi = 0, \quad (19)$$

$$\Delta \Phi = -4\pi \text{div} \left( \frac{M(\rho, T(|\nabla \Phi|), |\nabla \Phi|)}{|\nabla \Phi|} \nabla \Phi \right); \quad (20)$$

при  $z = \zeta(x, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \zeta = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (21)$$

$$\langle p_0 + \phi^{(\rho)} + 2\pi M_n^2 \rangle = -\sigma \text{div } \vec{n}, \quad (22)$$

$$\langle \mu \Phi_z \rangle = \zeta_x \langle \mu \Phi_x \rangle, \quad (23)$$

$$\langle \Phi_x \rangle + \zeta_x \langle \Phi_z \rangle = 0; \quad (24)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (25)$$

$$\nabla \Phi = \vec{H}_\infty, \quad (26)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость.

**1.3. Линеаризованная постановка задачі**

Обозначим  $\vec{H}' = \nabla \Phi' = \nabla \Phi - \vec{H}_0$  – возмущение магнітного поля. Для исследования устойчивости горизонтальной поверхности  $z = 0$  линеаризуем сформулированную задачу, предполагая, что

$$\frac{k}{2\pi} |\zeta|, |\zeta_x|, \frac{|\vec{H}'|}{|\vec{H}_0|} \sim \epsilon \ll 1,$$

где  $\frac{2\pi}{k}$  – длины волн, возникающих на свободной поверхности при потере устойчивости.

В случае общего закона намагнічивания (5) для возмущения намагніченності однородной несжимаемой жидкости получим:

$$\vec{M}' = \left( \frac{M}{H} \vec{H} \right)' = \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial M}{\partial H} + \frac{\partial M}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial H} - \frac{M}{H} \right) \vec{H} (\vec{H} \vec{H}') + \frac{M}{H} \vec{H}',$$

где коэффициенты при возмущениях напруженності магнітного поля вычисляются в равновесном состоянии, определяемом значениями параметров при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Из условия адиабатичности течения (3), учитывая, что для несжимаемой жидкости выполняется (6), получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -\frac{T}{c_v \rho} \frac{\partial M}{\partial T}.$$

Поэтому

$$\vec{M}' = \frac{1}{H^2} \left[ \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_{\infty} - \frac{T}{c_v \rho} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\infty} - \left( \frac{M}{H} \right)_{\infty} \right] (\vec{H}_{\infty} \vec{H}') \vec{H}_{\infty} + \frac{M_{\infty}}{H_{\infty}} \vec{H}'.$$

На свободной поверхности имеет место условие отсутствия касательных напряжений (в линейном приближении граничные условия снесены на невозмущенную поверхность):

$$P_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Следовательно, получаем уравнение:

$$\eta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Нормальная компонента тензора напряжений (8) удовлетворяет формуле Лапласа. Пренебрегая величинами второго порядка малости, можем записать:

$$P_{zz} = \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Подставляя значения компонент тензора напряжений (8), на свободной поверхности находим:

$$p_0 = -\frac{H^2}{8\pi} - \phi^{(\rho)} + \frac{H_z B_z}{4\pi} + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \rho g_e \zeta. \quad (27)$$

Применяя операцию  $\frac{\partial}{\partial x}$  к уравнению движения (2), получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (p_0 + \phi^{(\rho)}) = \left( \eta \Delta - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}.$$

Исключив отсюда давление  $p_0$  с помощью (27), получим дополнительное граничное условие на свободной поверхности.

Таким образом, линеаризованная задача для функции тока  $\psi$  и потенциала напряженности поля  $\Phi$  записывается в виде:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta \psi = 0, \quad (28)$$

$$\Delta \Phi^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad z > 0, \quad (29)$$

$$\Delta \Phi = -c_{\infty} \vec{H}_{\infty} \nabla (\vec{H}_{\infty} \nabla \Phi) \quad \text{при} \quad z < 0, \quad (30)$$

при  $z = 0$ :

$$\eta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (31)$$

$$\left( \eta \Delta - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = -\sigma \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - 2\eta \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial z} - \rho g_e \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{(\mu-1)^2}{\mu} H_{0z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - H_{0x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{(\mu-1)(\mu+c_{\infty} H_{0z}^2)}{\mu} H_{0x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right], \quad (32)$$

$$\mu \Phi_z - \Phi_z^{(1)} + c_{\infty} H_{0z} (\vec{H}_0 \nabla \Phi) = (\vec{H}_0 \nabla \zeta) (\mu-1), \quad (33)$$

$$\Phi_x - \Phi_x^{(1)} + H_{0z} \zeta_x \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (35)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (36)$$

$$\nabla \Phi^{(1)} = 0, \quad \nabla \Phi = 0. \quad (37)$$

Здесь введены обозначения:  $\Phi \equiv \Phi^{(2)}$ ,

$$c_{\infty} = \frac{4\pi}{\mu_{\infty} H_{\infty}^2} \left( \frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_v \rho} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right) - \frac{M}{H} \right)_{\infty}.$$

Сформулированная задача позволяет исследовать вопрос о параметрической неустойчивости свободной поверхности магнитной жидкости в случае нелинейной зависимости намагниченности от напряженности поля и температуры.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи (28)–(37) ищем в виде:

$$\psi(t, x, z) = \psi^0(t, z) e^{ikx}, \quad (38)$$

$$\zeta(t, x) = \zeta^0(t) e^{ikx}, \quad (39)$$

$$\Phi^{(1)} = c^{(1)}(t) \varphi^{(1)}(z) e^{ikx}, \quad (40)$$

$$\Phi = c(t) \varphi(z) e^{ikx}. \quad (41)$$

Решая уравнения для потенциала напряженности магнитного поля (29)–(30), получим:

$$\Phi^{(1)} = c^{(1)}(t) e^{ikx - kz}, \quad (42)$$

$$\Phi = c(t) e^{ikx + \lambda z}, \quad (43)$$

где

$$\lambda = k \frac{-ic_{\infty} H_{0z} H_{0x} + \mu \sqrt{1 + c_{\infty} H_{0z}^2}}{\mu \left( 1 + c_{\infty} \frac{H_{0z}^2}{\mu} \right)}. \quad (44)$$

Отметим, что в случае  $\mu = \text{const}$ :  $\lambda = k$ .

Используя граничные условия для потенциала напряженности магнитного поля (33),(34), находим:

$$c(t) - c^{(1)}(t) = \frac{\mu - 1}{\mu} H_{0z} \zeta^0, \quad (45)$$

$$c(t) = \frac{\zeta^0(\mu - 1) \left[ iH_{0x}k + \frac{kH_{0z}}{\mu} \right]}{\lambda\mu + k + c_\infty H_{0z} \left[ iH_{0x}k + \frac{\lambda H_{0z}}{\mu} \right]}. \quad (46)$$

Граничное условие (32) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \left( -\rho \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 3\eta k^2 \right) i \frac{\partial \psi^0}{\partial z} = \\ = \rho g_e k \zeta^0 - \sigma k^3 \zeta^0 + F_M, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$F_M = \frac{k}{4\pi} \left[ \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} H_{0z} (\lambda c(t) - i\zeta^0 H_{0x}k) + c(t) \frac{(\mu - 1)(\mu + c_\infty H_{0z}^2)}{\mu} \left( iH_{0x}k + \frac{\lambda H_{0z}}{\mu} \right) \right]. \quad (48)$$

Подставляя выражения (44)–(46) в (48), получаем:

$$F_M = \frac{k^2(\mu - 1)^2}{4\pi\mu} \left( \frac{H_{0z}^2 \sqrt{1 + c_\infty H_0^2} - H_{0x}^2 \mu}{1 + \mu \sqrt{1 + c_\infty H_0^2}} \right). \quad (49)$$

Следовательно, условие (47) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \left( -\rho \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 3\eta k^2 \right) i \frac{\partial \psi^0}{\partial z} = \rho g_e k \zeta^0 - \\ - \sigma k^3 \zeta^0 + \frac{k^2(\mu - 1)^2}{4\pi\mu} \left( \frac{H_{0z}^2 \sqrt{1 + c_\infty H_0^2} - H_{0x}^2 \mu}{1 + \mu \sqrt{1 + c_\infty H_0^2}} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

С учетом (38), задача (28), (31), (35), (36) для функции тока примет вид:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \psi^0 = 0, \quad (51)$$

$$\eta \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi^0 = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \zeta^0}{\partial t} = -ik\psi^0 \quad \text{при } z = 0 \quad (53)$$

$$ik\psi^0 = 0, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (54)$$

Функции  $H_{0x}(t)$ ,  $H_{0z}(t)$ ,  $g_e(t)$  предполагаются периодическими с общим периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Решение

задачи (50)–(54) ищем, используя представление Флоке:

$$\zeta^0(t) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{in\omega t}, \quad (55)$$

$$\psi^0(z, t) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^0(z) e^{in\omega t}, \quad (56)$$

где  $\gamma = s + i\alpha$  – показатель Флоке.

Тогда из уравнения (51) получаем:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - q_n^2 \right) \psi_n^0 = 0, \quad (57)$$

где

$$q_n^2 = k^2 - \frac{s + i(\alpha + n\omega)}{\nu}.$$

Общее решение уравнения (57) имеет вид:

$$\psi_n^0(z) = a_n e^{kz} + b_n e^{-kz} + c_n e^{q_n z} + d_n e^{-q_n z}. \quad (58)$$

Неизвестные коэффициенты определяются из граничных условий (52)–(54):

$$b_n = 0, \quad d_n = 0,$$

$$a_n = \frac{i\nu}{k} (q_n^2 + k^2) \zeta_n^0,$$

$$c_n = -2ik\nu \zeta_n^0.$$

Окончательно для функции тока получаем:

$$\psi_n^0(z) = i\nu \left( \frac{q_n^2 + k^2}{k} \zeta_n^0 e^{kz} - 2k \zeta_n^0 e^{q_n z} \right). \quad (59)$$

Подставляя выражения (55), (56), (59) в (50), получим соотношение:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 [-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} \left( -\frac{\sigma k^3}{\rho} + g_e(t)k + \right. \\ \left. + \frac{k^2(\mu - 1)^2}{4\pi\rho\mu} \frac{H_{0z}(t)^2 \sqrt{1 + c_{1\infty}} - H_{0x}(t)^2 \mu}{1 + \mu \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$c_{1\infty} = \frac{4\pi}{\mu_\infty} \left( \frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_\nu \rho} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 - \frac{M}{H} \right)_\infty.$$

### 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ВНЕШНИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

При задании конкретных функциональных зависимостей  $H_{0z}(t)$  и  $H_{0x}(t)$ , из (60) следуют рекуррентные соотношения относительно  $\zeta_n^0$  для расчета нейтральных кривых устойчивости. Сначала рассмотрим случай  $\mu = \text{const}$ . Во всех расчетах принимались типичные значения параметров жидкости [11]:  $\nu = 0.1(\Pi)$ ,  $\mu = 5$ ,  $\sigma = 30 \left(\frac{\text{Эрг}}{\text{см}^2}\right)$ ,  $\rho = 1 \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$ .

#### 3.1. Случай стационарного вертикального и осциллирующего горизонтального магнитного поля

Рассмотрим случай, когда внешнее магнитное поле состоит из постоянной вертикальной и осциллирующей горизонтальной частей, а гравитационная модуляция отсутствует:

$$g_e = -g, \quad H_{0z} = \text{const}, \quad H_{0x} = m_x \cos(\omega t). \quad (61)$$

Подставляя выражения (61) в (60), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 [-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} \left( -\frac{\sigma k^3}{\rho} - gk + \right. \\ \left. + \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho(\mu+1)} \left[ \frac{H_{0z}^2}{\mu} - \frac{m_x^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) \right] \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Отметим, что для случая  $\mu = \text{const}$  :  $c_{1\infty} = 0$ . Используя равенство

$$m_x \cos \omega t = \frac{m_x}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

и переобозначая индексы суммирования в (62) так, чтобы показатели экспонент в рядах были одинаковыми, получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов  $\zeta_n^0$  ряда (55):

$$A_n \zeta_n^0 = m_x^2 \left( \zeta_n^0 + \frac{\zeta_{n-2}^0 + \zeta_{n+2}^0}{2} \right), \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} A_n = - \left( \nu^2 \left[ -4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \frac{8\pi\rho(\mu+1)}{(\mu-1)^2} + \frac{2H_{0z}^2}{\mu}. \end{aligned}$$

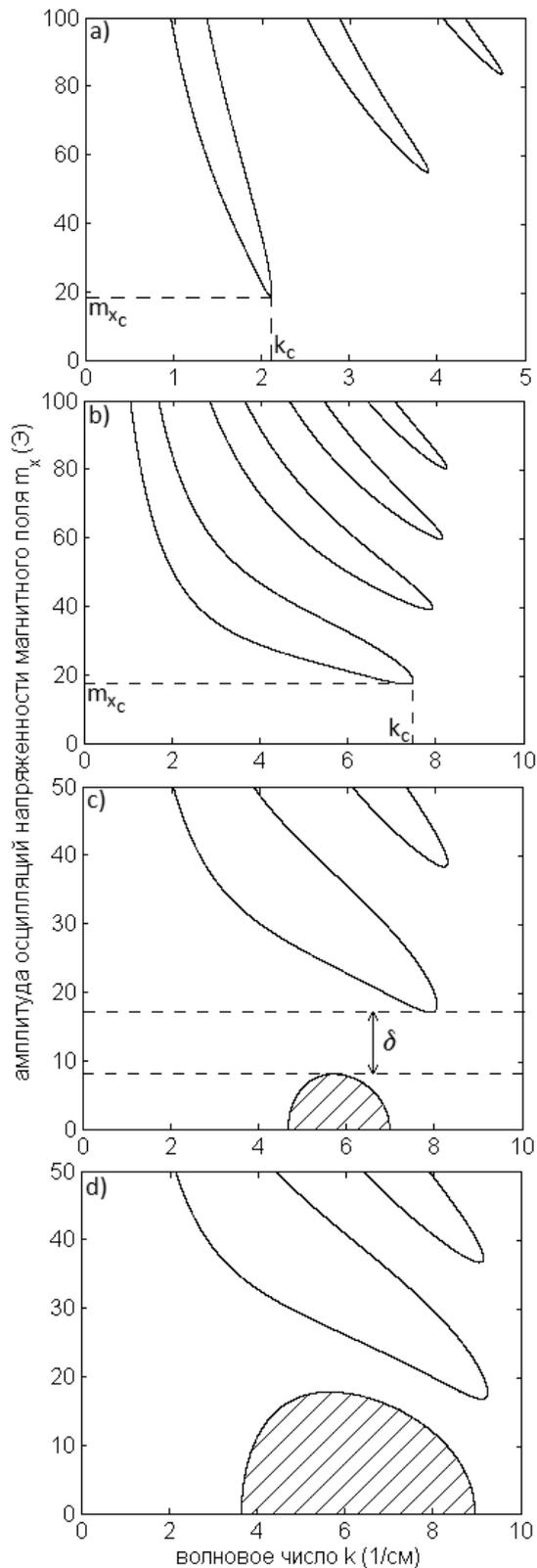


Рис. 2. Нейтральные кривые устойчивости  $m_x(k)$  для различных величин  $H_{0z}$ :  $H_{0z} = 0$ , (a),  $H_{0z} = 0.99H_R$ , (b),  $H_{0z} = 1.01H_R$ , (c),  $H_{0z} = 1.05H_R$ , (d) при частоте осциллирующего поля  $\omega = 50(\Gamma\text{ц})$

Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев

Соотношение (63) запишем в матричном виде:

$$= m_x^2 \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & A_{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & A_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \zeta_{-2}^0 \\ \zeta_{-1}^0 \\ \zeta_0^0 \\ \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ = m_x^2 \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \zeta_{-2}^0 \\ \zeta_{-1}^0 \\ \zeta_0^0 \\ \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

или в символьном виде:

$$A\zeta^0 = m_x^2 B\zeta^0,$$

где  $A$  – диагональная матрица с комплексными коэффициентами;  $B$  – трёхдиагональная матрица. Обратив матрицу  $A$ , получим задачу на собственные значения:

$$(A^{-1}B)\zeta^0 = \frac{1}{m_x^2}\zeta^0.$$

Критерием устойчивости служит значение показателя Флоке  $\gamma = s + i\alpha$ . При  $s > 0$  ( $s < 0$ ) решение (55) будет возрастать (убывать) с течением времени, что соответствует неустойчивости (устойчивости) движения. Для построения нейтральных кривых устойчивости в плоскости  $(k, m_x)$  нужно положить  $s = 0$ , а также задать значения  $\alpha = 0$  или  $\alpha = 1/2$ , что соответствует случаям гармонических и субгармонических колебаний. Матрицы  $A$  и  $B$  обрезаются до размеров, обеспечивающих необходимую точность вычислений. В проведенных расчетах размеры матриц не превышали размеров  $100 \times 100$ . Из собственных значений выбирается наибольшее или несколько наибольших положительных вещественных собственных значений  $\frac{1}{m_x^2}$ , соответствующих минимальной амплитуде возбуждения  $m_x$ . Изложенный метод является довольно общим и может быть использован для построения переходных кривых устойчивости в случае произвольного периодического возбуждения [3].

Границы областей неустойчивости для магнитного поля, которое состоит из постоянной вертикальной и осциллирующей горизонтальной частей, представлены на рис. 2.

На рис. 2, *a* показаны области параметрической неустойчивости свободной поверхности феррожидкости только в осциллирующем тангенциальном магнитном поле. Переходные кривые устойчивости образуют области ("языки"), значения параметров внутри (вне) этих областей соответствуют неустойчивости (устойчивости) свободной поверхности. Абсолютный минимум нейтральных кривых определяет критическое волновое число  $k_c$  и критическое значение амплитуды осциллирующего магнитного поля  $m_{xc}$ , необходимые для возникновения неустойчивости.

В результате расчетов обнаружено, что для безграничного слоя жидкости наложение вертикального стационарного магнитного поля, меньшего критического поля Розенцвейга, приводит к увеличению критического волнового числа  $k_c$  (см. рис. 2, *b*). Напряженность стационарного магнитного поля  $H_{0z}$  на рис. 2, *b* меньше критического поля Розенцвейга  $H_R$  [7] всего на 1%:

$$H_R^2 = \frac{8\pi\sqrt{\sigma\rho g\mu}(\mu+1)}{(\mu-1)^2}.$$

Таким образом, добавление стационарного вертикального магнитного поля  $H_{0z} < H_R$  к только осциллирующему горизонтальному приводит к возникновению более мелкомасштабных структур на свободной поверхности при потере устойчивости. При дальнейшем увеличении напряженности вертикального магнитного поля начинает развиваться статическая неустойчивость (неустойчивость Розенцвейга), что на рис. 2, *c* и рис. 2, *d* отражается возникновением дополнительной (заштрихованной) области неустойчивости. При этом из рис. 2, *c* видно, что для определенного промежутка  $\delta$  значений амплитуды параметрического возбуждения  $m_x$  все волновые числа  $k$  попадают в область устойчивости. Таким образом, наложением касательного к свободной поверхности осциллирующего магнитного поля, заданной амплитуды и частоты, можно отодвинуть порог наступления неустойчивости Розенцвейга. Однако из рис. 2, *d* видно, что такая возможность существует, если напряженность вертикального магнитного поля не существенно превышает критическое поле Розенцвейга  $H_R$ , в противном случае, в зависимости от параметров системы, всегда будут развиваться либо статическая, либо параметрическая неустойчивости.

**3.2. Случай вертикального магнитного поля, которое состоит из постоянной и осциллирующей частей**

Пусть параметрическое воздействие имеет вид:

$$g_e = -g, H_{0z} = H_{00z} + m_z \cos \omega t, H_{0x} = 0. \quad (64)$$

Рассматриваемый случай, при котором осциллирующее магнитное поле нормально к свободной поверхности, интересен тем, что помимо неустойчивости относительно параметрических колебаний, может наблюдаться возникновение статической неустойчивости с образованием пикообразной формы свободной поверхности (неустойчивость Розенцвейга), даже в отсутствие стационарного поля [11].

Подставляя выражения (64) в (60), получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 [-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho\mu(\mu+1)} [H_{00z}^2 + 2H_{00z}m_z \cos \omega t + \right. \\ & \left. + \frac{m_z^2}{2}(1 + \cos 2\omega t)] - \frac{\sigma k^3}{\rho} - gk \right) \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t}. \end{aligned}$$

Откуда следует рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда  $\zeta_n^0$ :

$$C_n \zeta_n^0 = m_z H_{00z} (\zeta_{n-1}^0 + \zeta_{n+1}^0) + m_z^2 \left( \frac{\zeta_n^0}{2} + \frac{\zeta_{n-2}^0 + \zeta_{n+2}^0}{4} \right), \quad (65)$$

где

$$C_n = \left( \nu^2 \left[ -4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} \right] + \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \frac{4\pi\rho\mu(\mu+1)}{(\mu-1)^2} - H_{00z}^2.$$

Выражение (65) запишем в матричном виде:

$$(m_z^2 A + m_z B - C) \zeta^0 = 0, \quad (66)$$

где

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$B = H_{00z} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & C_{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & C_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Уравнение (66) представляет собой уравнение для квадратичного пучка матриц. В дальнейшем удобно перейти к линейной алгебраической задаче. Введением вектор-столбца  $\xi^0 := m_z \zeta^0$  задача (66) сводится к задаче на собственные значения для матрицы с увеличенным вдвое размером:

$$\begin{pmatrix} -A^{-1}B & A^{-1}C \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix} = m_z \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

где  $I$  – единичная матрица такого же размера, как  $A, B$  и  $C$ .

В отличие от предыдущего случая собственным значением задачи (67) является амплитуда параметрического воздействия  $m_z$ . Для построения границ областей неустойчивости на плоскости изменения параметров  $(k, m_z)$  находим наименьшее или несколько наименьших положительных вещественных собственных значений  $m_z$  задачи (67).

Области параметрической и статической неустойчивостей свободной поверхности феррожидкости только в осциллирующем вертикальном магнитном поле представлены на рис. 3, а. В низкочастотном приближении (при  $\omega \rightarrow 0$ ) критическая амплитуда параметрического воздействия стремится к критическому полю Розенцвейга развития статической неустойчивости ( $m_{zc} \rightarrow H_R$ ), при этом наиболее опасными являются возмущения с длиной волнового вектора  $k_R = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}$ .

При высокочастотном возбуждении существует диапазон  $\delta$  значений амплитуды переменного поля  $m_z$ , в котором образуется только характерная для параметрических колебаний волнистая структура свободной поверхности. При дальнейшем увеличении амплитуды переменного поля наступает

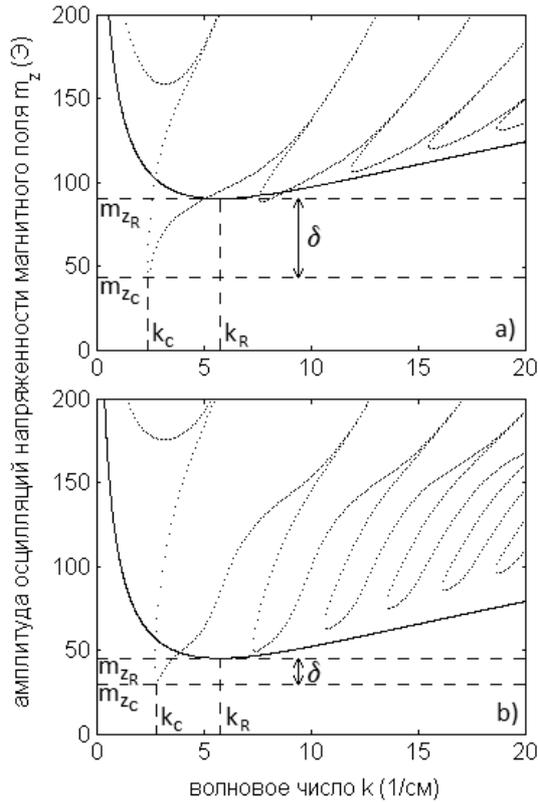


Рис. 3. Переходные кривые устойчивости  $m_z(k)$  для значений  $H_{0z} = 0$ , (a) и для  $H_{0z} = 0.5H_R$  (b) при частоте осцилляций поля:  $\omega \rightarrow 0$  (сплошные кривые),  $\omega = 50$  (Гц) (точечные кривые)

статическая неустойчивость и формируется пикообразная структура гораздо большей амплитуды. Отметим, что такая последовательность развития неустойчивостей в чисто осциллирующем вертикальном магнитном поле обсуждалась в работе [11].

Добавление стационарной компоненты к только осциллирующему вертикальному магнитному полю приводит как к уменьшению критической амплитуды  $m_{zc}$ , необходимой для развития параметрической неустойчивости, так и к уменьшению критической амплитуды  $m_{zR}$  развития статической неустойчивости в переменном поле (см. рис. 3, b). В то же время, за счет наложения осциллирующей добавки к постоянному значению напряженности вертикального магнитного поля можно приблизить наступление неустойчивости Розенцвейга, что было экспериментально подтверждено в работе [12].

### 3.3. Случай осциллирующего вертикального и стационарного горизонтального магнитных полей

В этом случае параметрическое воздействие имеет вид:

$$g_e = -g, H_{0z} = m_z \cos \omega t, H_{0x} = \text{const}. \quad (68)$$

Аналогично предыдущим случаям, из (60) с использованием (68) получаем:

$$A_n \zeta_n^0 = m_z^2 \left( \zeta_n^0 + \frac{\zeta_{n-2}^0 + \zeta_{n+2}^0}{2} \right), \quad (69)$$

где

$$A_n = \left( \nu^2 \left[ -4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} \right] + \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \frac{8\pi\rho\mu(\mu+1)}{(\mu-1)^2} + 2\mu H_{0x}^2.$$

Рекуррентное соотношение (69) запишем в матричном виде:

$$(A^{-1}B) \zeta^0 = \frac{1}{m_z^2} \zeta^0, \quad (70)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & A_{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & A_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Граница областей неустойчивости на плоскости параметров  $(k, m_z)$  строится аналогично ранее рассмотренным случаям в результате определения собственных значений задачи (70).

В результате расчетов установлено, что для безграничного слоя жидкости добавление тангенциального к свободной поверхности стационарного

магнитного поля к только осциллирующему вертикальному приводит к уменьшению критического волнового числа  $k_c$  (см. рис. 2, а и рис. 2, б), т.е. к возникновению более крупномасштабных структур на свободной поверхности при потере устойчивости. Кроме того, стационарная компонента касательного к свободной поверхности магнитного поля отодвигает порог наступления статической неустойчивости в переменном магнитном поле, т.е. приводит к увеличению критического значения амплитуды нормального поля  $m_{zR}$ .

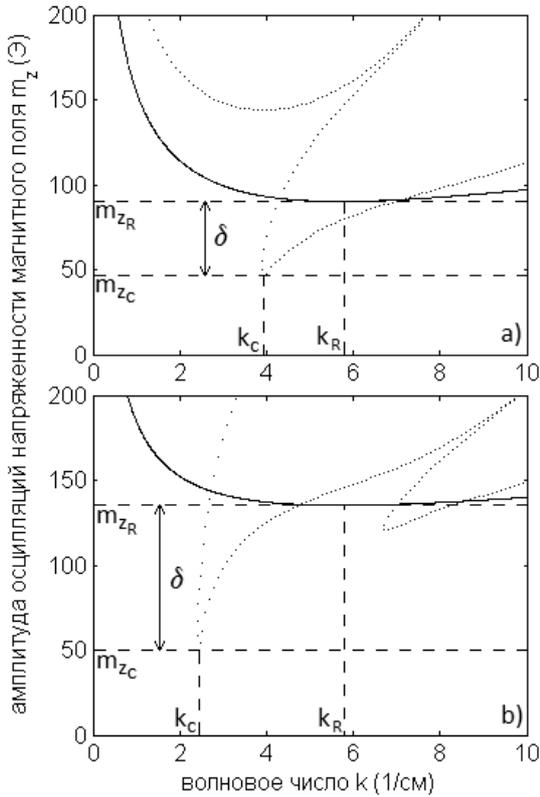


Рис. 4. Нейтральные кривые устойчивости  $m_z(k)$  для значений  $H_{0x} = 0$ , (а), и для  $H_{0x} = 0.5H_R$ , (б), при частоте осцилляций поля:  $\omega \rightarrow 0$  (сплошные кривые),  $\omega = 70$  (Гц) (точечные кривые)

### 3.4. Случай осциллирующих вертикального и горизонтального магнитных полей

Рассмотрим параметрическое воздействие вида:

$$\begin{aligned} g_e &= -g, & H_{0z} &= m_z \cos n_z \omega t, \\ & & H_{0x} &= m_x \cos n_x \omega t, \end{aligned} \quad (71)$$

где  $n_z, n_x$  – натуральные числа. Аналогично предыдущим случаям, из (60) с использованием (71) получаем рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} A_n \zeta_n^0 &= m_z^2 \left( \frac{\zeta_n^0}{\mu} + \frac{\zeta_{n-2n_z}^0 + \zeta_{n+2n_z}^0}{2\mu} \right) - \\ &- m_x^2 \left( \zeta_n^0 + \frac{\zeta_{n-2n_x}^0 + \zeta_{n+2n_x}^0}{2} \right), \end{aligned} \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \left( \nu^2 \left[ -4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \frac{8\pi\rho(\mu + 1)}{(\mu - 1)^2}. \end{aligned}$$

Зафиксировав одну из амплитуд  $m_z$  либо  $m_x$  из рекуррентного соотношения (72), получим задачу на собственные значения, решение которой позволит построить нейтральные кривые устойчивости на плоскости  $(k, m_x)$  либо  $(k, m_z)$  соответственно. В зависимости от значений  $n_z$  и  $n_x$  будет изменяться структура матриц спектральной задачи. Как видно из соотношения (72), номера поддиагоналей матриц будут соответствовать значениям  $-2n_z, 2n_z, -2n_x, 2n_x$ .

Критические значения напряженности магнитного поля при возникновении параметрической неустойчивости свободной поверхности жидкости в только осциллирующих касательных либо нормальных к свободной поверхности магнитных полях определены в работе [11]:

$$\begin{aligned} m_{xc} &= \frac{64\pi\eta_x\omega(\mu + 1)}{(\mu - 1)^2}, \\ m_{zc} &= \frac{64\pi\eta_z\omega\mu(\mu + 1)}{(\mu - 1)^2}. \end{aligned}$$

Границы областей неустойчивости в случае магнитного поля, которое состоит из только осциллирующих вертикальной и горизонтальной частей, представлены на рис.5. При одинаковых частотах параметрического воздействия за счет осциллирующего вертикального поля, амплитуду которого  $m_z$  не превышает критическую  $m_{zc}$ , можно отодвинуть порог наступления параметрической неустойчивости в тангенциальном магнитном поле (см. рис. 5, а), наиболее опасное волновое число при этом не изменяется.

Если же частота вертикального поля вдвое больше частоты горизонтального, то при заданных параметрах (см. рис. 5, б) может сложиться бикритическая ситуация, когда одной критической амплитуде  $m_{xc}$  соответствуют два различных волновых

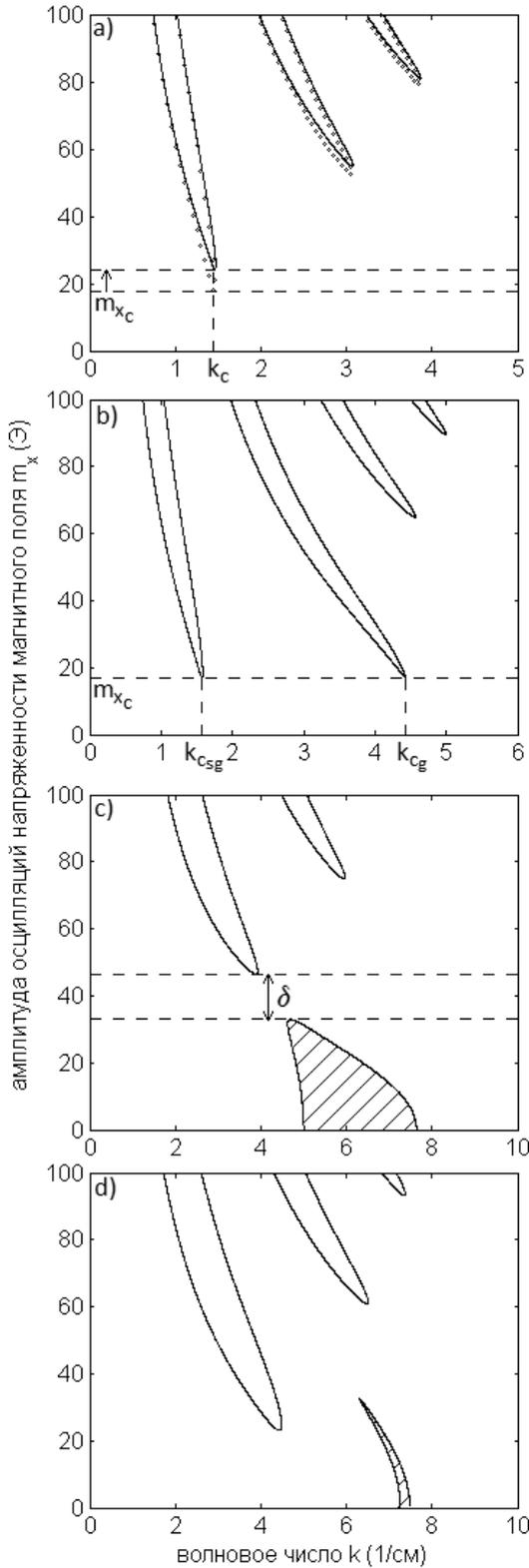


Рис. 5. Переходные кривые устойчивости  $m_x(k)$  для значений параметров системы:  $a - n_x = 1, n_z = 1, m_z = 0$  (кружочки),  $m_z = 0.97m_{zc}$  (сплошные кривые);  $b - n_x = 1, n_z = 2, m_z = 0.93m_{zc}$ ;  $c - n_x = 2, n_z = 2, m_z = H_R$ ;  $d - n_x = 2, n_z = 3, m_z = 0.7H_R$ ; при частоте

Н. Ф. Пацегон, С. И. Подолуев

числа  $k_{csg}$  (субгармоническое) и  $k_{cg}$  (гармоническое). Таким образом, может происходить переход от субгармонических к гармоническим колебаниям системы.

В результате расчетов обнаружено, что если амплитуда вертикального поля превышает критическую (как параметрическую  $m_{zc}$  так и статическую  $m_{zR}$ ), возникают дополнительные (заштрихованные) области неустойчивости (см. рис. 5,  $c$  и рис. 5,  $d$ ). При этом для одинаковых частот параметрического воздействия осциллирующим касательным магнитным полем можно отодвинуть порог наступления статической неустойчивости в вертикальном поле, тогда как при различных частотах не всегда удается стабилизировать даже параметрическую неустойчивость в нормальном к свободной поверхности поле.

### 3.5. Случай осциллирующего горизонтального магнитного поля при наличии гравитационной модуляции

Пусть параметрическое воздействие имеет вид:

$$\begin{aligned} g_e &= -g + a \cos(n_g \omega t), \\ H_{0z} &= 0, \quad H_{0x} = m_x \cos(n_x \omega t), \end{aligned} \quad (73)$$

где  $n_g, n_x$  – натуральные числа. Подставляя выражения (73) в (60), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 [-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{k^2(\mu-1)^2 m_x^2}{4\pi\rho(\mu+1)} \frac{1}{2} [1 + \cos(2n_x \omega t)] + \right. \\ \left. + ka \cos(n_g \omega t) - \frac{\sigma k^3}{\rho} - gk \right) \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t}. \end{aligned} \quad (74)$$

Из (74) следует рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда  $\zeta_n^0$ :

$$\begin{aligned} A_n \zeta_n^0 &= a \frac{k}{2} (\zeta_{n-n_g}^0 + \zeta_{n+n_g}^0) - \\ &- m_x^2 \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho(\mu+1)} \left( \frac{\zeta_n^0}{2} + \frac{\zeta_{n-2n_x}^0 + \zeta_{n+2n_x}^0}{4} \right), \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$A_n = \nu^2 [-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2] + gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}.$$

Аналогично предыдущему случаю, зафиксировав значения  $n_g$  и  $n_x$ , а также одну из амплитуд  $a$  либо  $m_x$  из соотношения (75), получим задачу

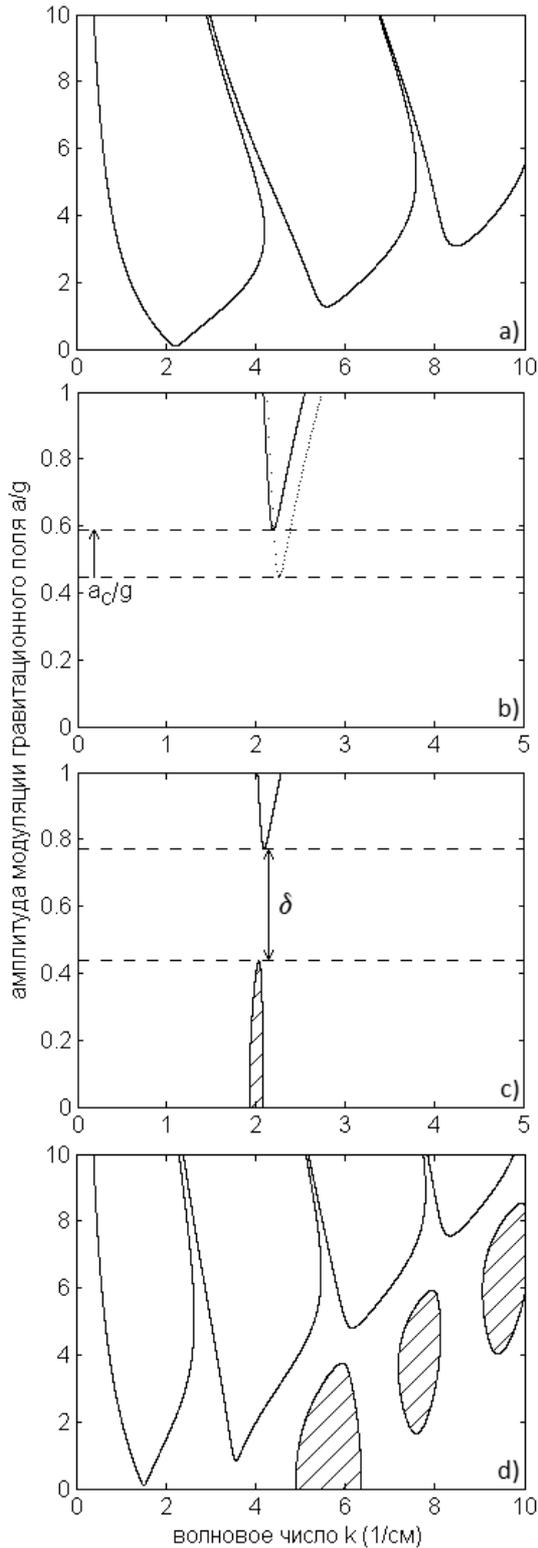


Рис. 6. Нейтральные кривые устойчивости  $a(k)$  для значений параметров системы:  
 а –  $m_x = 0$ ; б –  $n_g = n_x = 1$ ,  $m_x = 0$  (точечная кривая),  $m_x = 0.9m_{xc}$  (сплошная кривая);  
 с –  $n_g = n_x = 1$ ,  $m_x = 1.5m_{xc}$ , д –  $n_g = 2$ ,  $n_x = 3$ ,  $m_x = 2m_{xc}$  при частоте  $\omega = 50$  (Гц)

на собственные значения, решение которой позволит построить переходные кривые устойчивости на плоскости  $(k, m_x)$  либо  $(k, a)$  соответственно.

На рис. 6, а изображены области параметрической неустойчивости свободной поверхности феррожидкости при модуляции гравитационного ускорения с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$  в отсутствие магнитного поля. При наложении осциллирующего горизонтального магнитного поля, заданной амплитуды  $m_x$ , меньшей критической  $m_{xc}$ , и той же частоты  $\omega$ , критическая амплитуда  $a_c$  увеличивается (см. рис. 6, б). Таким образом, при помощи касательного к свободной поверхности магнитного поля можно отодвинуть порог наступления параметрической неустойчивости в осциллирующем гравитационном поле.

В результате расчетов также обнаружено, что если амплитуда горизонтального магнитного поля  $m_x$  превышает критическую  $m_{xc}$ , то возникают дополнительные (заштрихованные) области неустойчивости (см. рис. 6, с и рис. 6, д). При этом для одинаковых частот параметрического воздействия за счет модуляции гравитационного ускорения можно отодвинуть порог наступления параметрической неустойчивости в тангенциальном магнитном поле, тогда как для различных частот это не всегда удается.

#### 4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В РЕЗУЛЬТАТЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗА СЧЕТ МАГНИТОКАЛОРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Пусть  $\theta$  – угол ориентации магнитного поля (см. рис. 1). Тогда в отсутствии гравитационной модуляции ( $g_e = -g$ ) для наиболее общего изотропного закона намагничивания (5) из соотношения (60) получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 [-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} \left( -\frac{\sigma k^3}{\rho} - gk + \right. \quad (76)$$

$$\left. + \frac{4\pi}{\rho} k^2 M^2 \left[ \sin^2(\theta) - \frac{1}{1+r} \right] \right),$$

где

$$r = \sqrt{\left( 1 + 4\pi \frac{M}{H} \right) \left( 1 + 4\pi \left[ \frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_v \rho} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 \right] \right)}.$$

В качестве модели идеального парамагнетика

выберем феррожидкость, намагниченность которой можно описать формулой Ланжевена:

$$M = nm \left( \text{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi} \right), \quad \xi = \frac{mH}{k_B T}, \quad (77)$$

где  $n$  – число частиц в единице объема ферромагнитного коллоида;  $m$  – магнитный момент частицы;  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Начальный участок кривой намагничивания (77), соответствующий значениям напряженности магнитного поля  $H \ll k_B T/m$  (т.е.  $\xi \ll 1$ ), можно считать линейным [17]:

$$M = \frac{nm\xi}{3} = \frac{nm^2 H}{3k_B T}.$$

При приближении к температуре Кюри  $T_K$  магнитного материала феррочастицы ее магнитный момент стремится к нулю по закону  $m = m_0 \sqrt{T_k - T}$ , следовательно, намагниченность ферромагнитного коллоида стремится к нулю пропорционально разности  $(T_k - T)$  [17,20]:

$$M = C_K \left( \frac{T_k}{T} - 1 \right) H, \quad C_K = \frac{nm_0^2}{3k_B}.$$

Особый интерес представляют вещества, температура Кюри которых близка к комнатной. К ним относят гадолиний и некоторые сплавы, например пермаллой. Кроме того, за счет специальных полимерных поверхностно-активных добавок можно синтезировать ферроколлоиды с  $T_K \sim 40^\circ\text{C}$ , что позволяет использовать их термочувствительность в медицинских целях и в системах преобразования энергии [21].

Зададим напряженность магнитного поля таким образом, чтобы она содержала постоянную и колеблющуюся части:

$$H = H_0 \left( 1 + \frac{h}{H_0} \right), \quad h = \epsilon_H H_0 \cos \omega t,$$

где  $m_H = \epsilon_H H_0$  – амплитуда осциллирующей напряженности поля.

Тогда температура представляется в виде:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{T'}{T_0} \right), \quad T' = \epsilon_T T_0 \cos \omega t,$$

где  $m_T = \epsilon_T T_0$  – амплитуда колебаний температуры. Из интеграла адиабатичности (3) находим связь между возмущениями температуры  $T'$  и напряженности магнитного поля  $h$ :

$$T' = -\frac{T_0}{c_v \rho} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{H_0} \quad h = \frac{C_K T_K H_0}{c_v \rho T_0} h. \quad (78)$$

Величины  $\epsilon_H = \frac{m_H}{H_0}$  и  $\epsilon_T = \frac{m_T}{T_0}$  предполагаются малыми. Сохраняя  $\epsilon_H$  и  $\epsilon_T$  первого порядка малости, получаем:

$$M^2 = a_0 + (a_H \epsilon_H + a_T \epsilon_T) \cos(\omega t), \quad (79)$$

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+\sqrt{b_0}} - \frac{b_H \epsilon_H + b_T \epsilon_T}{2\sqrt{b_0}(1+\sqrt{b_0})^2} \cos(\omega t), \quad (80)$$

где

$$a_0 = C_K^2 H_0^2 \left( \frac{T_K}{T_0} - 1 \right)^2, \quad a_H = 2a_0; \quad (81)$$

$$a_T = -C_K^2 H_0^2 \left( \frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \frac{T_K}{T_0}; \quad (82)$$

$$b_0 = \left( 1 + 4\pi C_K \left( \frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \right) \left( 1 + 4\pi \left( C_K \left( \frac{T_K}{T_0} - 1 \right) - \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3} \right) \right); \quad (83)$$

$$b_H = 4\pi \left( 1 + 4\pi C_K \left( \frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \right) \left( -\frac{C_K T_K}{T_0} - \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3} \right) - 4\pi C_K \frac{T_K}{T_0} \left( 1 + 4\pi \left( C_K \left( \frac{T_K}{T_0} - 1 \right) - \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3} \right) \right); \quad (84)$$

$$b_T = 12\pi \left( 1 + 4\pi C_K \left( \frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \right) \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3}. \quad (85)$$

Подставляя выражения (79)–(85) в (76), получаем рекуррентное соотношение:

$$\left( 2\nu^2 \left[ -4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} + \frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k} \right] - 2d_0 \right) \zeta_n^0 = (d_H \epsilon_H + d_T \epsilon_T) (\zeta_{n-1}^0 + \zeta_{n+1}^0), \quad (86)$$

где

$$d_0 = \frac{4\pi}{\rho} a_0 \left( \sin^2(\theta) - \frac{1}{1+\sqrt{b_0}} \right);$$

$$d_H = \frac{4\pi}{\rho} \left( a_H \left( \sin^2(\theta) - \frac{1}{1+\sqrt{b_0}} \right) - \frac{b_H}{2\sqrt{b_0}(1+\sqrt{b_0})^2} \right);$$

$$d_T = \frac{4\pi}{\rho} \left( a_T \left( \sin^2(\theta) - \frac{1}{1+\sqrt{b_0}} \right) - \frac{b_T}{2\sqrt{b_0}(1+\sqrt{b_0})^2} \right).$$

Связь между амплитудами осцилляций температуры  $m_T$  и напряженности магнитного поля  $m_H$ , а, следовательно, между коэффициентами  $\epsilon_T = \frac{m_T}{T_0}$  и  $\epsilon_H = \frac{m_H}{H_0}$  находим из выражения (78):

$$m_T = \frac{C_K T_K H_0}{c_v \rho T_0} m_H, \quad \epsilon_T = \frac{C_K T_K H_0^2}{c_v \rho T_0^2} \epsilon_H. \quad (87)$$

Аналогично ранее рассмотренным случаям, из выражения (86) с использованием (87) получим задачу на собственные значения, решение которой позволит построить нейтральные кривые устойчивости на плоскости изменения параметров  $(k, m_H)$  либо  $(k, m_T)$ .

Для расчетов использовались следующие параметры жидкости:  $T_K = 300(K)$ ,  $n = 10^{17}(\text{см}^{-3})$ ,  $m_0 = 10^{-16} \left( \frac{\text{дин см}}{\text{Гс}} \right)$ ,  $\nu = 0.1(\text{П})$ ,  $\rho = 1 \left( \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$ ,  $\sigma = 30 \left( \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2} \right)$ ,  $c_v = 4.184 \cdot 10^7 \left( \frac{\text{ерг}}{\text{см}^3 \text{К}} \right)$ .

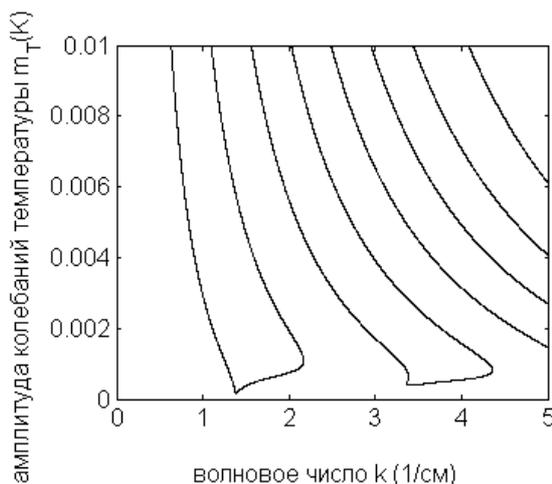


Рис. 7. Переходные кривые устойчивости  $m_T(k)$  для значений параметров системы:  $T_0 = 0.95T_K$ ,  $\theta = 0$ ,  $H_0 = 100(\text{Э})$ ,  $\omega = 50(\text{Гц})$

На рис.7. показана принципиальная возможность возбуждения параметрической неустойчивости свободной поверхности намагничивающейся жидкости в результате гармонического возмущения ее температуры за счет магнитокалорического эффекта. В результате колебаний температуры возникают осцилляции магнитного поля, так что рассматриваемый случай параметрического возбуждения волн может быть сведен к ранее изученным.

Основные результаты настоящей статьи представлены в работе [22]

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В терминах потенциала напряженности магнитного поля и функции тока сформулирована задача параметрической устойчивости свободной поверхности полубесконечного слоя вязкой капиллярной нелинейно намагничивающейся жидкости с наиболее общим изотропным законом намагничивания и при произвольной ориентации магнитного поля по отношению к равновесной поверхности. Показано, что при пренебрежении теплопроводностью жидкости эта задача сводится к исследованию устойчивости для жидкости со специальным уравнением магнитного состояния, зависящим только от напряженности поля.

Исследованы области неустойчивости для случаев параметрических воздействий различной природы: касательной и нормальной составляющих магнитного поля, гравитационной и температурной модуляций. Установлены способы стабилизации (дестабилизации) равновесной поверхности феррожидкости. Обнаружено, что добавление тангенциального (нормального  $H_{0z} < H_R$ ) к свободной поверхности стационарного магнитного поля к только осциллирующему вертикальному (горизонтальному), приводит к возникновению более крупномасштабных (мелкомасштабных) структур на свободной поверхности при параметрической неустойчивости. Показано, что за счет наложения осциллирующей добавки к постоянному значению напряженности вертикального магнитного поля можно приблизить наступление неустойчивости Розенцвейга, что было экспериментально подтверждено в работе [12]. С другой стороны добавление стационарной компоненты  $H_{0z} < H_R$  к только осциллирующему вертикальному магнитному полю приводит к уменьшению критической амплитуды возникновения параметрической неустойчивости.

Установлено, что порог наступления параметрической и статической неустойчивостей в вертикальном магнитном поле, а также параметрической неустойчивости в осциллирующем гравитационном поле можно отодвинуть за счет наложения осциллирующего горизонтального магнитного поля. В случае двухчастотного параметрического воздействия проанализировано влияние отношений амплитуд и частот различных модуляций на структуру областей неустойчивости, например переход от субгармонических к гармоническим колебаниям либо возникновение дополнительных областей неустойчивости. Для нелинейно намагничивающейся жидкости показана возможность воз-

буждения параметрической неустойчивости свободной поверхности в результате гармонического возмущения температуры за счет магнитокалорического эффекта.

1. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces.– *Phil. Trans. of the Royal Society of London*: 121, 1831.– 319–346 p.
2. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхности раздела в вибрационных полях.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.– 216 с.
3. *Kumar K., Tuckerman L. S.* Parametric Instability of the Interface Between Two Fluids.– *J. Fluid Mech.*: 279, 1994.– 49–68 p.
4. *Kumar K.* Linear Theory of Faraday Instability in Viscous Fluids.– *Proc. Roy. Soc. London*: A452, 1996.– 1113–1126 p.
5. *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications.– Cambridge: Cambridge University Press, 2005.– 947 p.
6. Константінов О. В., Лимарченко О. С. Узагальнена задача Фарадея про рух резервуару з рідиною з вільною поверхнею.– *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*: 2012, Вип.3.– 100–110 с.
7. *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика: Пер. с англ.– М.: Мир, 1989.– 368 с.
8. *Muller H. W.* Parametrically driven surface waves on viscous ferrofluids.– *Phys. Rev.*: E 58, 1998.– 6199–6205 p.
9. *Mekhonoshin V. V., Lange A.* Faraday instability on viscous ferrofluids in a horizontal magnetic field: Oblique rolls of arbitrary orientation.– *Phys. Rev.*: E 65, 2002.– 061509-1–061509-7 p.
10. *Potseluev S. I., Patsegon M. F.* Parametric instability of the free surface of nonlinear magnetizable fluid.– *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*: Kharkov, «Apostrophe», 2011.– 104–120 p.
11. *Blums E., Cebers A., Maiorov M. M.* *Magnetic Fluids*.– Walter de Gruyter: Berlin, 1997.– 416 p.
12. *Mahr T., Rehberg I.* Magnetic Faraday instability.– *Europhys. Lett.*: 43 (1), 1998.– 23–28 p.
13. *Bajaj R., Malik S. K.* Parametric instability of the interface between two viscous magnetic fluids.– *J. Magn. Magn. Mater.*: 253, 2002.– 35–44 p.
14. *Hennenberg M., Slavtchev S., Weyssow B.* Modelling of an oscillatory magnetic field action on a ferrofluid layer.– *Microgravity Sci. Technol.*: 21(Suppl.1), 2009.– 45–50 p.
15. *Hennenberg M., Slavtchev S., Valchev G.* On the Hill Equation Describing Oscillations of a Ferrofluid Free Surface in a Vertical Magnetic Field.– *Microgravity Sci. Technol.*: 22, 2010.– 455–460 p.
16. *Bajaj R.* Two frequency parametric excitation of the surface of a viscous magnetic fluid.– *J. Magn. Magn. Mater.*: 261, 2003.– 29–47 p.
17. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей.– М.: ИВТАН, 1985.– 188 с.
18. *Selezov I.T., Krivonos Yu.G.* Modeling the effect of magnetic field on wave propagation in ferrofluids and elastic bodies with void fraction.– *Cybernetics and System Analysis*: Vol. 49, No. 4, 2013.– 569–577 p.
19. *Тарапов И.Е.* Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч. 2: Общие законы кинематики и динамики.– Харьков: Золотые страницы, 2002.– 516 с.
20. *Ахизер А.И.* Общая физика. Электрические и магнитные явления : справочное пособие.– Киев: Наукова думка, 1981.– 472 с.
21. *Kaiser A., Gelbrich T., Schmidt A.M.* Thermosensitive magnetic fluids.– *J. Phys.: Condens. Matter*, 18.– 2006 p.2563–2580
22. *Поцелуев С.И., Пацегон Н.Ф.* Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении.– *Матеріали конференції: Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки*, м. Київ, 23–24 квітня 2014 р.– 104 с.