

УДК 532.5

## ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ В КАНАЛІ, УТВОРЕНІ РУХОМОЮ ОБЛАСТЮ ПОВЕРХНЕВОГО ТИСКУ

В. М. ІЛЬЧЕНКО, О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ  
03680 Київ – 180, МСП, вул. Желябова, 8/4  
office@hydromech.com.ua

Одержано 14.06.2013

Розв'язана лінійна задача генерації та еволюції поверхневих хвиль та затухаючих збурень на вільній поверхні каналу прямокутного поперечного перерізу при русі зі стану спокою з постійною швидкістю області поверхневого тиску прямокутної форми. Для знаходження розв'язку для потенціалу швидкостей використані інтегральні перетворення по поздовжній координаті і часу та розклад у ряд Фур'є по поперечній координаті. Одержано в явному вигляді розв'язок для хвильового поля та у вигляді квадратур для затухаючих складових. В результаті виконаних розрахунків проаналізовано особливості формування та структуру корабельних (баричних) хвиль у залежності від режиму руху та характеристик рухомої області та каналу.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** нестационарний рух, математична модель, канал, збурення, поверхневі хвилі, потенціал швидкості, число Фруда.

Решена линейная задача генерации и эволюции поверхностных волн и затухающих возмущений на свободной поверхности канала прямоугольного поперечного сечения при движении из состояния покоя с постоянной скоростью области поверхностного давления прямоугольной формы. Для нахождения решения задачи для потенциала скоростей использованы интегральные преобразования по продольной координате и времени и разложение в ряд Фурье по поперечной координате. Получено в явном виде решение для волнового поля и в виде квадратур для затухающих составляющих. В результате выполненных расчетов проанализированы особенности формирования и структура корабельных (барических) волн в зависимости от режима движения и характеристик движущейся области и канала.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** нестационарное движение, математическая модель, канал, возмущение, поверхностные волны, потенциал скорости, число Фруда.

The linear problem of generation and evolution of the surface waves, and convergent responses on the free surface of a channel of rectangular cross-section when the rectangular surface pressure region moves at a constant velocity from the state of rest is solved. In order to solve a problem in respect of a velocity potential, the integral transformations for longitudinal coordinate and time and expansion into a Fourier series for a transverse coordinate are used. The explicit solution for a wave field in quadratures for damped components is obtained. Based on the calculations performed, the peculiarities of forming and structure of the ship (pressure) waves are analysed depending on the movement mode and characteristics of the moving region and channel.

**KEY WORDS:** non-stationary movement, mathematical model, channel, response, surface waves, velocity potential, Froude number.

### ВСТУП

Вивчення корабельних хвиль має достатньо довгу історію, однак інтерес до цього напрямку досліджень залишається і в сучасній гідромеханіці. Це обумовлено важливістю і необхідністю розв'язання ряду науково-технічних і прикладних проблем, пов'язаних з судноплавством як у відкритих морських акваторіях, так і в умовах обмеженого фарватеру. В останньому випадку, при русі суден у каналах, окрім визначення їхніх гідромеханічних характеристик, важливою є проблема взаємодії генерованих ними збурень з берегами каналів та різного роду розташованих на них споруд. Тому визначення картини такого роду поверхневих хвиль є важливою прикладною проблемою.

Переважає більшість досліджень гідромеханіки

судна стосувалась вивчення в лінійній постановці гідродинамічної картини його обтікання в умовах глибокого моря або водойм сталої глибини з метою визначення сили опору. Хвильова картина за рухомим судном визначає хвильову складову цієї величини. До 70–80-х років минулого століття при побудові відповідних теоретичних моделей головним чином використовувались спрощені представлення суден (тонке судно Мічелла, тонке видовжене тіло, яке замінюється розподіленими джерелами, спрощені обводи корпусу, заміна його рухомою областю поверхневого тиску). Лінійна теорія корабельних хвиль, незважаючи на наближений характер одержаних результатів, дозволила побудувати достатньо повну і цілісну картину хвильових збурень за судном та визначати хвильову складову його опору (див. бібліографію в [1, 2]).

Можливості, обумовлені розвитком сучасної об-

числювальної техніки, дозволили розраховувати нелінійну гідродинаміку суден з максимальним наближенням до їхніх реальних форм з використанням чисельних методів, які постійно вдосконалюються (див. бібліографію в [3, 4]. На їхній основі вже розроблені і використовуються при проектуванні суден ряд прикладних обчислювальних пакетів, які дозволяють розраховувати картину обтікання судна та всі його гідродинамічні характеристики. Однак врахування реальних аспектів гідродинаміки руху судна пов'язане з рядом труднощів, обумовлених як їхньою вартістю, так і великим часом, необхідним для розрахунків власне характеристик судна, а також складністю задач нестационарних режимів руху різного типу, опису дальніх гідродинамічних полів від судна та їх взаємодії з берегами обмежених фарватерів та різного роду споруд, на них розташованих, врахування впливу особливостей топографії дна. Крім того, ці результати значно складніше піддаються узагальненій інтерпретації у вигляді характерних рівнянь, співвідношень, виразів, які мають місце в спрощених постановках. Тому використання наближених методів не втрачає своєї привабливості.

Помітно менша кількість досліджень стосується гідродинаміки руху суден у каналах скінченого поперечного перерізу. В частині вивчення корабельних хвиль це обумовлено складністю представлення характеру початкового збурення, яке формує хвильову картину за судном в рельєсних умовах його руху, та нелінійними граничними умовами на вільній поверхні. У виконаних роботах використовуються спрощені варіанти представлення рухомих суден. Так, в [2] для тонких тіл (відповідних руху розподілених джерел) у каналі з прямокутним поперечним перерізом використано розв'язок для басейну скінченої глибини з виконанням граничної умови на бокових поверхнях застосуванням методу зеркальних відображень. В роботах [5, 6] визначено хвильовий опір при стаціонарному русі вздовж поздовжньої вісі каналу прямокутного поперечного перерізу області поверхневого тиску (прямокутної або еліптичної форми в [5] та в точці, відповідній носу судна, в [6]). При цьому в роботі [5] використано підхід [2] з зеркальним відображенням, а в [6] використовуються лише хвильові складові розв'язку. Слід відмітити, що імітація рухомого судна рухом області поверхневого тиску при вивченні корабельних хвиль використовувалась у багатьох роботах [1, 7, 8 та ін.] В роботах [9–11] досліджена гідродинаміка стаціонарного руху суден з формами обводів, які описуються простими аналітичними залежностями. Лінійна задача для тонкого видовженого тіла в умовах значного міл-

ководдя розв'язана в [12]. Головною направленістю робіт [9–12] також є визначення хвильового опору рухові суден. Характер утворюваної рухомих збуренням хвильової картини та її взаємодія зі стінками каналу в них практично не розглядалась. В ряді теоретичних і експериментальних робіт досліджувались поодинокі хвилі, які утворюються в каналі попереду рухомого судна в скінченному діапазоні чисел Фруда, більших певного критичного значення [13–19]. В експериментальних роботах [17, 19] використовувались моделі суден. В теоретичних роботах судно моделювалось областю рухомого поверхневого тиску. У виконаних дослідженнях встановлено ряд важливих характерних особливостей, пов'язаних з поодинокими хвилями, які утворюються суднами. Так, виявлено важливість значення величини коефіцієнта блокування, рівного відношенню площі поперечного перерізу судна до площі поперечного перерізу каналу [14], та істотний вплив мілководдя [17] та топографії дна каналу [15] на їхні характеристики. Показано, що нестационарність процесу переходу режиму руху від понадкритичних режимів руху до докритичних супроводжується помітним збільшенням амплітуд [18]. Слід відмітити також роботи [20, 21], в яких на базі лабораторних вимірювань хвильових картин за моделями суден запропоновані прості моделі для визначення характеру зміни та максимальних амплітуд хвиль в області берегового схилу каналу.

Однак особливості гідродинаміки руху суден у каналах досліджені ще недостатньо повно. Особливо це стосується нестационарних режимів руху, впливу змінності донної топографії, взаємодії генерованих хвиль з берегами каналів.

В даній роботі розв'язується задача генерації лінійних поверхневих хвиль за рухомою областю поверхневого тиску в каналі прямокутного поперечного перерізу в процесі виходу її режиму руху на стаціонарний. В результаті використання запропонованого підходу одержано точний розв'язок відповідної нестационарної задачі у вигляді, який включає як хвильові, так і затухаючі складові.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається поле поверхневих хвиль, утворене в каналі прямокутного поперечного перерізу глибини  $h$  і ширини  $2l$  областю поверхневого тиску, яка в початковий момент часу почала рухатись з постійною швидкістю  $U$  вздовж поздовжньої вісі симетрії каналу. Вибирається система координат, початок якої знаходиться в центрі області тиску на вільній поверхні, вісь  $ox$  направлена в бік,

протилежний напрямку швидкості руху, а вісь  $oz$  направлена вгору (рис. 1). Область поверхневого тиску в такій системі координат задається у формі прямокутника з поздовжньою стороною  $2a$  і поперечною стороною  $2b$ , до неї прикладений рівномірний розподілений тиск  $P_0 = \text{const}$ , так що

$$P(x, y, t) = P_0 f(x, y, t),$$

де

$$f(x, y, t) = [H(x+a) - H(x-a)][H(y+b) - H(y-b)]H(t).$$

Тут  $H()$  – одиничні функції Хевісайда;  $f(x, y, t)$  може бути представлена рядом Фур'є по  $y$ , та інтегральними представленнями Фур'є по  $x$  і Лапласа по  $t$ .

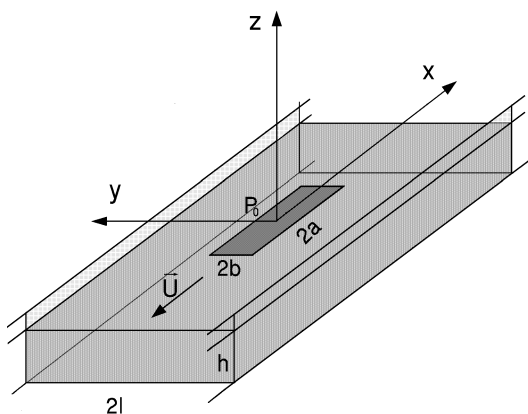


Рис. 1. Схема руху області тиску в каналі

Введення безрозмірних величин, де вибрані в якості масштабів: довжини – глибина каналу  $h$ , часу –  $hU^{-1}$ , тиску –  $\rho U^2$ , функції течії –  $Uh$ , дозволяє сформулювати наступну початково-граничну задачу для визначення потенціалу швидкості збуреної течії  $\phi(x, y, z, t)$ :

$$\Delta \phi = 0 \tag{1}$$

з граничними

$$D^2 \phi + \lambda \phi_z + P_0 f_x = 0 \quad \text{при } z = 0, \tag{2}$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{при } z = -1, \tag{3}$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{при } y = \pm l \tag{4}$$

і початковими умовами

$$\phi(x, y, z, 0) = 0, \quad D\phi + P_0 f = 0 \quad \text{при } t = 0, \tag{5}$$

$$\text{де } D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$\lambda = \frac{gh}{U^2}$  – обернене значення числа Фруда,

та умовою випромінювання

$$\phi(x, y, z, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \tag{6}$$

## 2. ПОВУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

Розв'язок задачі знаходиться у вигляді інтегральних перетворень – Фур'є по  $x$  і Лапласа по  $t$ :

$$\phi = \frac{P_0}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1 x} dk_1 \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} e^{st} \tilde{\phi}(k_1, y, z, s) ds. \tag{7}$$

Підстановка (7) у (1)–(5) з використанням (6) приводить до задачі знаходження функції-образу  $\tilde{\phi}(k_1, y, z, s)$ :

$$\tilde{\phi}_{zz} + \tilde{\phi}_{yy} - k_1^2 \tilde{\phi} = 0, \tag{8}$$

з граничними умовами

$$\lambda \tilde{\phi}_z + (s + ik_1)^2 \tilde{\phi} + \tilde{f} \left( 1 + \frac{ik_1}{s} \right) = 0 \quad \text{при } z = 0. \tag{9}$$

$$\tilde{\phi}_z = 0 \quad \text{при } z = -1, \tag{10}$$

$$\tilde{\phi}_y = 0 \quad \text{при } y = \pm l, \tag{11}$$

де

$$\tilde{f} = \frac{2 \sin(k_1 a)}{k_1} [H(y+b) - H(y-b)].$$

В силу симетричності задачі по  $y$  розв'язок для  $\tilde{\phi}(k_1, y, z, s)$  представляється у вигляді розкладу в ряд Фур'є по  $y$ :

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_0(k_1, z, s) + \sum_{k_2=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{k_2}(k_1, z, s) \cos(k_2 y), \tag{12}$$

де  $k_{2*} = \pi k_2 / l$ . Умова (11) при цьому задовольняється автоматично.

Підстановка представлення (12) у (8)–(10) приводить до простих граничних задач для  $\tilde{\phi}_0$  та  $\tilde{\phi}_{k_2}$ , розв'язок яких може бути представлений у єдиній формі для всіх  $k_2 \geq 0$

$$\tilde{\phi} = - \frac{[e^{k(2+z)} - e^{-kz}] \tilde{f}}{s[\lambda k(e^{2k} - 1) + (s + ik)^2(e^{2k} + 1)]},$$

де  $\tilde{f}$  – коефіцієнти представлення  $\tilde{f}$  рядом Фур'є по  $y$  в інтервалі  $-l \leq y \leq l$ ,

$$\tilde{f} = \frac{2}{k_1} \sin(k_1 a) \left[ b_* + \frac{2}{\pi} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\sin(k_2 b)}{k_2} \cos(k_2 y) \right];$$

$$b_* = \frac{b}{l}; \quad k = (k_1^2 + k_{2*}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Для знаходження поля поверхневих хвиль використовується вираз для їхніх амплітуд через потенціал швидкостей збуреного руху [1]:

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + P_0 f \right) \quad \text{при } z = 0. \tag{13}$$

Виконання в (13) перетворень, аналогічних (7), та представлення відповідного образу  $\tilde{\eta}(k_1, y, s)$  рядом Фур'є, аналогічним (12), визначає відповідні коефіцієнти Фур'є  $\bar{\eta}(k_1, s)$  в єдиній формі для всіх  $k_2 \geq 0$

$$\bar{\eta}_{k_2} = -\frac{1}{\lambda}(s + ik_1)\tilde{\phi}_{k_2}$$

Обернене інтегрування функції  $\bar{\eta}_{k_2}(k_1, s)$  в  $s$ - і  $k_1$ -площинах виконується у стандартний спосіб. Функція  $\tilde{\eta}$  в  $s$ -площині задовольняє умовам леми Жордана і має в ній три особливі точки-полоси:

$$s_0 = 0, s_1 = i(-k_1 + \sqrt{\lambda k_1 \text{th } k_1}),$$

$$s_2 = -i(k_1 + \sqrt{\lambda k_1 \text{th } k_1}).$$

При  $k = k_1$  ( $k_2 = 0$ ) відповідно

$$s_0 = 0, s_{10} = i(-k_1 + \sqrt{\lambda k_1 \text{th } k_1}),$$

$$s_{20} = -i(k_1 + \sqrt{\lambda k_1 \text{th } k_1}).$$

В результаті інтегрування  $\bar{\eta}(k_1, s)$  в  $s$ -площині одержується наступне представлення:

$$\eta(x, y, t) = \frac{P_0}{\pi\lambda} \left[ \eta_0 - \sum_{k_2=1}^{\infty} \cos(k_2 y) \eta_{k_2} \right], \quad (14)$$

де

$$\eta_0(x, t) = b_* \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_1 a) e^{ik_1 x}}{k_1} \bar{\eta}_0 dk_1,$$

$$\eta_{k_2}(x, y) = \frac{2 \sin(k_2 b)}{\pi k_2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_1 a) e^{ik_1 x}}{k_1} \bar{\eta}_{k_2} dk_1,$$

$$\bar{\eta}_0 = \frac{2k_1^2}{k_1^2 - \theta^2} - \frac{\theta_0 e^{S_{10}t}}{k_1 - \theta_0} + \frac{\theta_0 e^{S_{20}t}}{k_1 + \theta_0},$$

$$\bar{\eta}_{k_2}(x, t) = \frac{2k_1^2}{k_1^2 - \theta^2} - \frac{\theta e^{S_1 t}}{k_1 - \theta} + \frac{\theta e^{S_2 t}}{k_1 + \theta},$$

а  $\theta_0 = \sqrt{\lambda k_1 \text{th } k_1}$ ,  $\theta = \sqrt{\lambda k_1 \text{th } k_1}$ . Враховуючи парність  $\bar{\eta}_0$  і  $\bar{\eta}_{k_2}$  по  $k_1$  та можливість представлення

$$\frac{2k_1^2}{k_1^2 - \theta^2} = k_1 \left( \frac{1}{k_1 - \theta} + \frac{1}{k_1 + \theta} \right),$$

яке аналогічне і для складових з  $\theta_0$ , та замінюючи в інтегралах розв'язку (14)  $k_1$  на  $-k_1$ , його можна представити у вигляді

$$\eta = \frac{P_0}{\pi\lambda} \text{Re} \left[ b_* I_0 - \frac{2}{\pi} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\sin(k_2 b)}{k_2} \cos(k_2 y) I_{k_2} \right], \quad (15)$$

де

$$I_0 = I_0^{(1)} + I_0^{(2)}, \quad (16)$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)} + I_{k_2}^{(2)}, \quad (17)$$

$$I_0^{(1)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_1 a) \cos(k_1 x)}{k_1 - \theta_0} dk_1,$$

$$I_0^{(2)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta_0 \sin(k_1 a) \cos[k_1(x-t) + \theta_0 t]}{k_1(k_1 - \theta_0)} dk_1,$$

$$I_{k_2}^{(1)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_1 a) \cos(k_1 x)}{k_1 - \theta} dk_1,$$

$$I_{k_2}^{(2)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta \sin(k_1 a) \cos[k_1(x-t) + \theta t]}{k_1(k_1 - \theta)} dk_1.$$

В одержаному розв'язку підінтегральні функції повільно-збіжні і швидко-осцилюючі і не дозволяють явно виділити складові хвильової картини. Враховуючи, що ці підінтегральні функції задовольняють умовам леми Жордана в комплексній  $k_1$ -площині, для обчислення відповідних інтегралів доцільним є використання апарату теорії лишків з виділенням у цій площині області однозначності і побудовою відповідного теоремі Коші замкнутого контуру.

Підінтегральні функції розв'язку в  $k$ -площині мають полюси в точці

$$k_1 = 0$$

та в точках, які впливають з рівнянь

$$k_1 - \lambda \text{th } k_1 = 0, \quad (18)$$

$$k_1 - \lambda \sqrt{k_1^2 + k_{2*}^2} \text{th } \sqrt{k_1^2 + k_{2*}^2} = 0, \quad (19)$$

а також точки розгалуження

$$k_1 = 0, \quad k_1 = \pm ik_{2*}.$$

Відповідний аналіз показує, що полюс  $k_1 = 0$  не дає вкладу у розв'язок. Розв'язки рівнянь (18)–(19) є дійсними і додатними. Рівняння (18), яке визначає поперечну хвилю, має розв'язок лише за умови  $\lambda > 1$ , що аналогічно докритичному режиму руху суден на мілкій воді для  $\text{Fr} < 1$  [2]. При  $\lambda < 1$  в каналі формуються лише розбіжні хвилі. Рівняння (19) має єдиний розв'язок для кожного  $k_2 \geq 1$ .

В результаті одержані наступні представлення розв'язку задачі для різних діалазонів поздовжньої координати  $x$ :

для  $x > a + t$  і  $x < -a$

$$I_0 = I_0^{(1)} + I_0^{(2)},$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)} + I_{k_2}^{(2)},$$

для  $-a + t < x < a + t$

$$I_0 = I_0^{(2)} + 2\pi \cos[\zeta_0(x+a)] - 4\pi \sin(\zeta_0) \sin(\zeta_0 x),$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)} + I_{k_2}^{(2)} + 2\pi \cos[\zeta_{k_2}(x+a)] - 4\pi \sin(\zeta_{k_2} a) \sin(\zeta_{k_2} x),$$

для  $a < x < -a + t$

$$I_0 = I_0^{(1)} + I_0^{(2)} - 4\pi \sin(\zeta_0 a) \sin(\zeta_0 x),$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)} + I_{k_2}^{(2)} - 4\pi \sin(\zeta_{k_2} a) \sin(\zeta_{k_2} x),$$

для  $-a < x < a$

$$I_0 = I_0^{(2)} + 2\pi \cos[\zeta_0(x+a)],$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)} + I_{k_2}^{(2)} + 2\pi \cos[\zeta_{k_2}(x+a)],$$

де  $\zeta_0(\lambda)$ ,  $\zeta_{k_2}(\lambda, k_{2*})$  – розв’язки для  $k_1$  відповідно для рівнянь (18) і (19). Складові розв’язку, які описують затухаючі збурення, мають вигляд

$$I_0^{(1)} = \sqrt{2\lambda} Sg(x+a) \sum_{n=0}^{\infty} I_{0n}^{(1)},$$

$$I_{k_2}^{(1)} = \sqrt{2\lambda} Sg(x+a) \sum_{n=0}^{\infty} I_{k_2n}^{(1)},$$

$$I_0^{(2)} = -2\sqrt{\lambda} Sg(L_1) \sum_{n=0}^{\infty} I_{0n}^{(2)},$$

$$I_{k_2}^{(2)} = -2\sqrt{\lambda} Sg(L_1) \sum_{n=0}^{\infty} I_{k_2n}^{(2)},$$

де

$$I_{0n}^{(1)} = \int_{\pi n}^{\pi n + \frac{\pi}{2}} I_{0n*}^{(1)} \left( e^{-k_{1*}|x+a|} - e^{-k_{1*}|x-a|} \right) dk_{1*},$$

$$I_{0n*}^{(1)} = \frac{[\sin(2k_{1*})]^{\frac{1}{2}}}{k_{1*}^{\frac{1}{2}} (k_{1*} \cos k_{1*} + \lambda \sin k_{1*})},$$

$$I_{k_2n}^{(1)} = \int_{k_{1*}^{(1)}}^{k_{1*}^{(2)}} I_{k_2n*}^{(1)} \left( e^{-k_{1*}|x+a|} - e^{-k_{1*}|x-a|} \right) dk_{1*},$$

$$I_{k_2n*}^{(1)} = \frac{[k_s \sin(2k_s)]^{\frac{1}{2}}}{k_{1*}^2 \cos(k_s) + \lambda k_s \sin(k_s)};$$

$$I_{0n}^{(2)} = \int_{\pi n}^{\pi n + \frac{\pi}{2}} I_{0n*}^{(2)} \left( e^{-k_{1*}|L_1|} - e^{-k_{1*}|L_2|} \right) dk_{1*},$$

$$I_{0n*}^{(2)} = \frac{\theta_{0+} [k_{1*} \cos(\theta_{0+} t) + \theta_{0+} \sin(\theta_{0+} t)]}{k_{1*} (k_{1*}^2 + \theta_{0+}^2)},$$

$$I_{k_2n}^{(2)} = \int_{k_{1*}^{(1)}}^{k_{1*}^{(2)}} I_{k_2n*}^{(2)} \left( e^{-k_{1*}|L_1|} - e^{-k_{1*}|L_2|} \right) dk_{1*},$$

$$I_{k_2n*}^{(2)} = \frac{\theta_{+} [k_{1*} \cos(\theta_{+} t) + \theta_{+} \sin(\theta_{+} t)]}{k_{1*} (k_{1*}^2 + \theta_{+}^2)}.$$

Тут  $k_s = (k_{1*}^2 - k_{2*}^2)^{\frac{1}{2}}$ ;  $k_{1*}^{(1)} = [k_{2*}^2 + (\pi n)^2]^{\frac{1}{2}}$ ;  $k_{1*}^{(2)} = [k_{2*}^2 + (\pi n + \frac{\pi}{2})^2]^{\frac{1}{2}}$ ;  $\theta_{0+} = \sqrt{\lambda k_{1*} \operatorname{tg} k_{1*}}$ ;  $\theta_{+} = \sqrt{\lambda \sqrt{k_{1*}^2 - k_{2*}^2} \operatorname{tg} \sqrt{k_{1*}^2 - k_{2*}^2}}$ ,  $L_1 = x + a - t$ ,  $L_2 = x - a - t$ ,  $Sg(x)$  – знакова функція, яка дорівнює  $\pm 1$  відповідно для додатніх або від’ємних значень аргументів. Інтеграли одержаного розв’язку мають швидко збіжні підінтегральні функції, оскільки інтегрування виконується вздовж уявної вісі  $Im k_1 = k_{1*}$  в  $k_1$ -площині.

При  $t \rightarrow \infty$  одержується стаціонарний розв’язок задачі:

для  $x < -a$

$$I_0 = I_0^{(1)},$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)},$$

для  $-a < x < a$

$$I_0 = 2\pi \cos[\zeta_0(x+a)],$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)} + 2\pi \cos[\zeta_{k_2}(x+a)],$$

для  $x > a$

$$I_0 = I_0^{(1)} - 4\pi \sin(\zeta_0 a) \sin(\zeta_0 x),$$

$$I_{k_2} = I_{k_2}^{(1)} - 4\pi \sin(\zeta_{k_2} a) \sin(\zeta_{k_2} x).$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

На підставі одержаного розв’язку виконані розрахунки амплітудної картини на вільній поверхні для деяких характерних режимів руху області поверхневого тиску. Обчислення інтегралів  $I_0^{(1)}$  та  $I_{k_2}^{(1)}$  виконувалось безпосередньо, а інтегралів  $I_0^{(2)}$  та  $I_{k_2}^{(2)}$  – з використанням заміни змінної інтегрування  $k_{1*}$  на  $k_{1+} = \operatorname{tg} k_{1*}$  та  $k_{1+} = \operatorname{tg} \sqrt{k_{1*}^2 - k_{2*}^2}$  відповідно.

Хвильова картина за рухомою областю складається з поперечних та розбіжних хвиль [1]. Характер структури поверхневих хвиль визначається розв’язками рівнянь (17), (18) та відповідними

складовими  $\cos(k_2 y)$ . Як видно, геометрія і структура генерованих поверхневих хвиль для розглянутого режиму нестационарності не залежить від часу, а, отже, відповідає стаціонарному руху з заданою швидкістю  $U$ . Різниця полягає лише в тому, що в період виходу на стаціонарний режим руху область наявності поверхневих хвиль обмежена інтервалом  $-a < x < a + t$ . Поза цим інтервалом мають місце лише затухаючі збурення. На відміну від схем руху на глибокій воді і при скінченій глибині, але за відсутності горизонтальних обмежуючих стінок, де поперечні хвилі присутні всередині певного хвильового сектора, в каналі ці хвилі при  $\lambda > 1$  через наявність складової з  $\zeta_0$  присутні в усій області. Як вже відмічалось, розв'язки для  $\zeta_0$  існують лише для  $\lambda > 1$ , що відповідає докритичним значенням числа Фруда  $Fr < 1$ . Відповідна  $\zeta_0$  поперечна хвиля, прив'язана до рухомої області в зоні  $-a < x < a$ , представляється складовою з  $\cos[\zeta_0(x+a)]$ , а позаду цієї зони при  $x > a$  – складовими з  $\sin(\zeta_0 a) \sin(\zeta_0 x)$ . Як впливає з розв'язку для  $\zeta_0$ , інтенсивність цієї складової пропорційна величині  $b_*$ , який при  $l \rightarrow \pm\infty$  прямує до нуля. Друга система поперечних хвиль, які існують і при  $\lambda < 1$ , що відповідає понадкритичним значенням числа Фруда  $Fr > 1$ , описується складовими з  $\sin(\zeta_{k_2} x) \sin(\zeta_{k_2} a)$  і бере участь у формуванні хвильової картини позаду області тиску. Складові з  $\cos[k_2 y - \zeta_{k_2} x]$  відповідають хвилям, які формуються зліва від вісі руху, потім відбиваються від лівої стіни каналу і поширюються вправо. Відповідно складові з  $\cos[k_2 y + \zeta_{k_2} x]$  формуються справа від вісі руху, потім відбиваються від правої стінки каналу і поширюються вліво. Далі процеси відбиття хвиль повторюються. В ближній до області тиску зоні ці хвилі, подібно до схем руху без бокових стінок, також знаходяться всередині певного сектора, величину кута якого, на відміну від випадку відсутності стінок, не вдається визначити явно. На рис. 2 наведена залежність відповідних значень хвильових чисел обох типів поперечних хвиль від параметра  $\lambda$ . З нього видно, що при фіксованому значенні  $\lambda$  величини хвильових чисел збільшуються зі зростанням номера Фур'є складової  $k_2$ , а збільшення величини цього параметра приводить до їхнього зростання а, отже, до зменшення довжини поперечних хвиль обох типів.

Характерні картини розподілу ізоліній зміщення вільної поверхні  $\eta/P_0 = \text{const}$ , віднесеного до величини  $P_0$ , для різних значень визначальних параметрів  $a, b, l, \lambda$  при стаціонарному русі наведені на рис. 3–7. На рис. 3 представлена картина ізоліній зміщення вільної поверхні для двох значень  $\lambda$  при незмінних характеристиках області і кана-

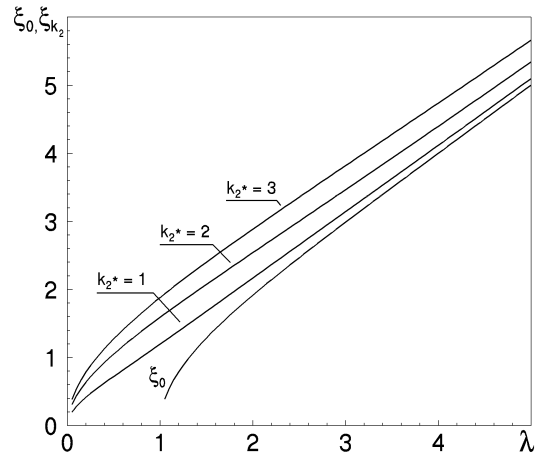


Рис. 2. Залежність  $\zeta_0$  та  $\zeta_{k_2}$  від  $\lambda$

лу. На всіх картинах видно наявність у ближній зоні за рухомою областю характерних носових і кормових систем хвиль, а також прослідковується процес їх відбиття від бокових стінок каналу. Як і у випадку відсутності цих стінок [2, 8, 12], зменшення величини  $\lambda$  зменшує кут хвильового сектора в ближній області, що, звичайно, змінює загальну картину поверхневого збурення. Зі зростанням величини  $\lambda$  в хвильовій області зростає вклад у хвильову картину поперечних хвиль з хвильовим числом  $\zeta_0$ . Це добре видно з порівняння рис. 3, а та рис. 3, б. На рис. 3, а, де режим руху відповідає значенню  $\zeta_0$ , близькому до 0,4, вплив цих поперечних хвиль малопомітний. Навпаки, для режиму руху, відповідного рис. 3, б, коли  $\zeta_0$  близька до 4, їхній вклад стає вагомим. Особливо це спостерігається поза зонами фронтів розбіжних хвиль, де він стає визначальним. В зоні каналу перед рухомою областю тиску збурення вільної поверхні обумовлені лише затухаючими складовими розв'язку. Тут вони помітно менші порівняно з зоною хвильових збурень і швидко затухають зі зростанням віддалі від області тиску. Характер картини ізоліній зміщення вільної поверхні в цій зоні для режиму руху, відповідного рис. 3, б, наведено на рис. 4. В даному випадку чітко прослідковується вплив бокових стінок каналу.

Аналіз характеру виходу на стаціонарний режим руху показує, що поверхневі хвилі у виділений момент часу присутні лише на ділянці пройденого області тиску шляху і вони відповідні стаціонарному розв'язку на цій ділянці. Затухаючі збурення, відповідні складовій  $I_0^{(1)}$ , не залежать від часу, тому вони відповідні стаціонарному розв'яз-

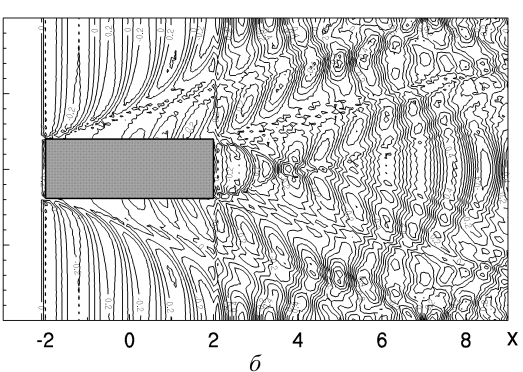
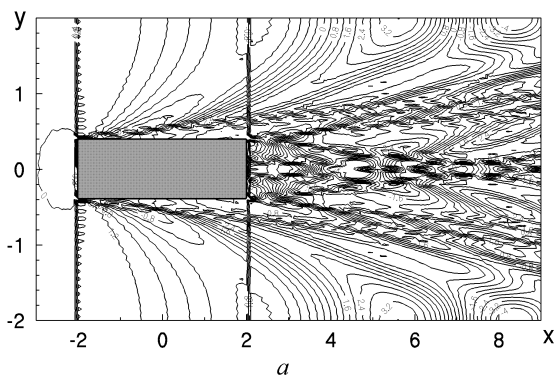


Рис. 3. Ізолії зміщення вільної поверхні при параметрах  $a = 2, b = 0.4, l = 2$ :  
 $a - \lambda = 0.5$ ;  $б - \lambda = 4$

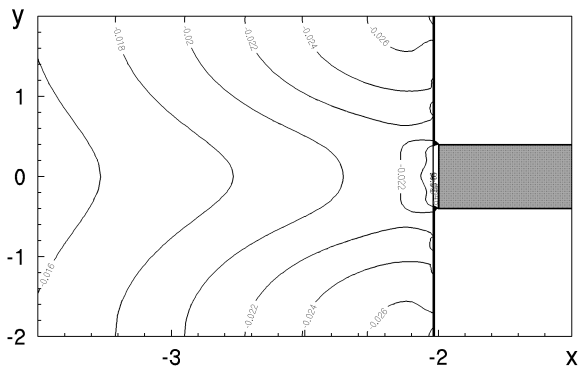


Рис. 4. Ізолії зміщення вільної поверхні при  $a = 2, b = 0.4, l = 2, \lambda = 4$

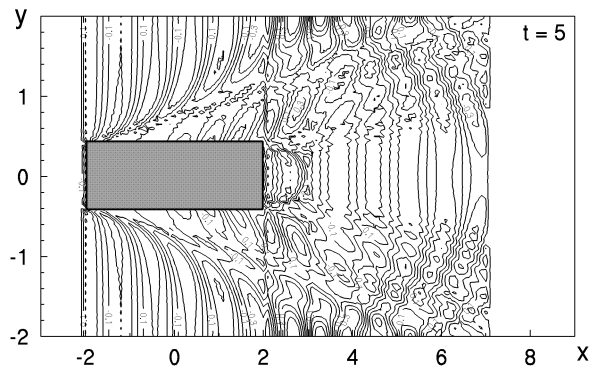


Рис. 5. Ізолії зміщення вільної поверхні при  $a = 2, b = 0.4, l = 2, \lambda = 4, t = 5$

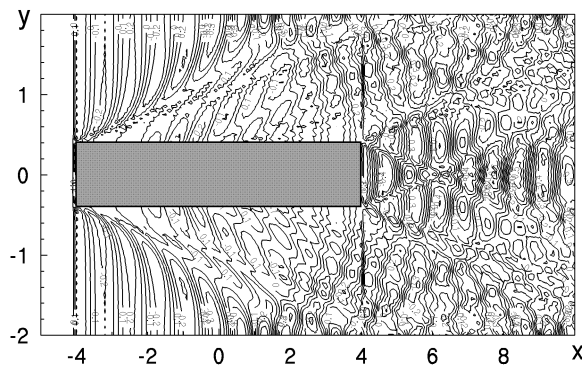


Рис. 6. Ізолії зміщення вільної поверхні при  $a = 4, b = 0.4, l = 2, \lambda = 4$

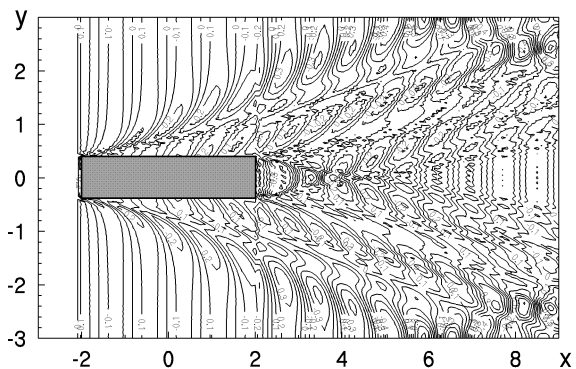


Рис. 7. Ізолії зміщення вільної поверхні при  $a = 2, b = 0.4, l = 3, \lambda = 4$

ку. Складова  $I_0^{(2)}$ , яка представляє характер зміни в часі затухаючих збурень, з часом швидко прямує до нуля. Порівняння поверхневих ізолій зміщення із нестационарного розв'язку при  $t = 5$  на рис. 5 та із стаціонарного для тих же параметрів на рис. 3,б показує, що в межах пройденого носовою частиною області шляху, що складає 1.25 її довжини, тобто в межах  $-2 < x < 3$ , вже практи-

чно встановилась картина, відповідна стаціонарній. З часом область стаціонарності розширюється зі швидкістю руху області тиску, що підтвердили розрахунки для  $t = 10$ , які тут не представлені. Збільшення довжини області тиску при інших незмінних параметрах може помітно змінити фазову картину хвиль за рахунок більш значного рознесення носової і кормової систем хвиль. Особливо

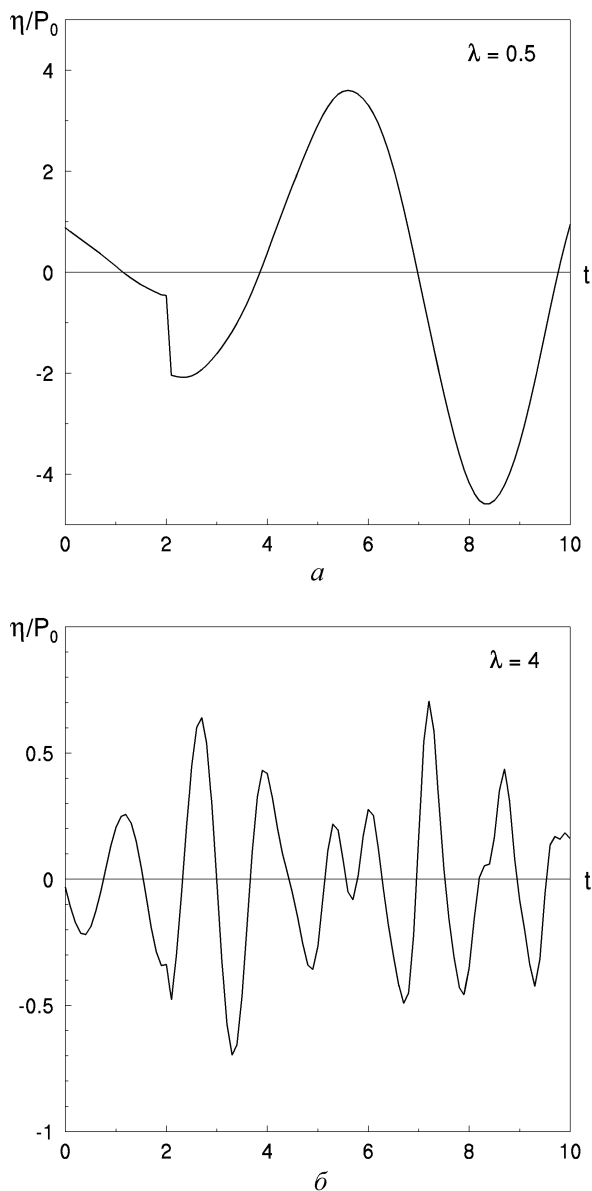


Рис. 8. Зміщення вільної поверхні у виділеній точці на березі каналу при  $a = 2$ ,  $b = 0.4$ ,  $l = 2$ :  
 –  $\lambda = 1.05$ ; –  $\lambda = 4$

це стосується відносно вузьких каналів. На рис. 6 представлені ізолінії збурень, відповідні стаціонарному режиму руху рис. 3,б для вдвічі більшої довжини області тиску, яка тут дорівнює ширині каналу. В даному випадку головною причиною зміни картини поверхневих збурень є зміщення початку формування кормових хвиль, що змінює процес їхньої взаємодії з носовими хвилями.

Збільшення ширини каналу змінює хвильову картину збурень, головним чином, через зміщен-

ня координати початку відбиття хвиль від бокових стінок. Це видно з порівняння рис. 7 і рис. 3,б, де для одного і того самого режиму руху взяті різні величини ширини каналу  $l$ .

На рис. 8 наведені зміщення водної поверхні на бічній стінці каналу в точці, яка відповідає координаті  $x = 0$  в момент старту області тиску для двох значень числа  $\lambda$ . Як видно, при більшому значенні  $\lambda$  хвильові збурення в дану точку приходять пізніше, що також свідчить про зростання кута хвильового сектора зі зростанням  $\lambda$ . При цьому амплітуди набігаючих збурень для більших  $\lambda$  зменшились, а кількість гармонік протягом виділеного інтервалу часу зростає.

## ЗАКЛЮЧЕННЯ

У виконаному дослідженні розв'язана лінійна задача про корабельні (баричні) хвилі та затухаючі збурення вільної поверхні каналу прямокутного поперечного перерізу за областю поверхневого тиску, яка в початковий момент часу почала рухатись вздовж вісі каналу з постійною швидкістю. Такого роду нестационарність дозволяє дослідити характер виходу режиму руху області на стаціонарний. Розрахункові схеми руху вибирались такими, щоб прослідкувати вплив наявності бокових стінок на картину поверхневих хвиль та затихаючих збурень. В результаті виконаних чисельних експериментів та аналізу їхніх результатів можна сформулювати наступні висновки:

1. Для розглянутого типу нестационарності хвильова картина на вільній поверхні каналу відповідна стаціонарній картині в межах пройденого області тиску шляху. Залежна від часу складова затухаючих збурень швидко прямує до нуля. Вихід на стаціонарний режим руху відбувається достатньо швидко. Вже протягом інтервалу часу, за який рухома область проходить віддаль, трохи більшу її довжини, картина зміщень вільної поверхні в межах пройденого шляху практично відповідає стаціонарному режиму руху.

2. В ближній за рухомою областю зоні поверхневі хвилі знаходяться в межах сектора, величина кута якого, як і у випадку відсутності бокових стінок, зростає зі зростанням величини параметра  $\lambda$ . Після досягнення переднім фронтом цього сектора бокових стінок хвильова картина формується взаємодією відбитих хвиль.

3. Характерною особливістю хвильової картини є наявність поперечних хвиль в усій області каналу  $x > -a$  для режимів руху з  $\lambda > 1$ .

4. Загальна картина поверхневих збурень суттєво залежить від параметра  $\lambda$  та співвідношення



довжини рухомої області тиску та ширини каналу.

У виконаному дослідженні розглянуті схеми руху в достатньо вузьких каналах, коли характерні розміри рухомої області тиску одного порядку з шириною каналу. У випадку великих значень  $l$  (широкі канали) вплив бокових стінок на гідродинаміку руху області тиску незначний. Інтенсивність характерної поперечної хвилі, прив'язаної до рухомої області, прямує до нуля, а хвильова картина до моменту досягнення переднім фронтом хвильового сектора бокових стінок каналу практично відповідає випадку відсутності таких стінок.

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1977.– 588 с.
2. Войткунский Я.И. Сопротивление движению судов.– Л.: Судостроение, 1988.– 288 с.
3. Huang Y., Sclavounos P.D. Nonlinear Ship Motions // J.of Ship Research.– 1998.– 42,2.– P. 120–130.
4. Горбань В.О., Горбань І.М., Масюк С.В., Нікішов В.В. Застосування методу граничних елементів для розрахунку корабельних хвиль // ПГМ.– 2011.– 13(85), № 4.– С. 22 – 29.
5. Newman Y.N.,Pode F.A.P. The wave Resistance of a Moving Pressure Distribution in a Canal // Schiffstechnik.– 1962.– 45, № 9.– P. 21–26.
6. Eggers K. Uber die Ermittlung des Wellenwiderstandes eines Schiffsmoedells durch Analyse Wellensystems // Schiffstechnik.– 1962.– 46, № 9.– P. 79–85.
7. Ursell F. On Kelvin's ship-wave pattern // J.of Fluid Mechanics.– 1960.– 8, № 3.– P. 418–431.
8. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн.– Киев: Наукова думка, 1976.– 364 с.
9. Tuck E.O. Sinkage and trim in shallow water of finite width // Schiffstechnik.– 1967.– 14, № 5.– P. 92–94.
10. Tuck E.O. Shallow-water flows past slender bodies. // J.of Fluid Mechanics.– 1966.– 26, № 1.– P. 81–85.
11. Tuck E.O. Ship motion in shallow water // J.of Ship Research.– 1970.– 14, № 1.– P. 317–328.
12. Воробьев Ю.Л. Гидродинамика судна в стесненном фарватере.– С.Пб.: Судостроение, 1992.– 224 с.
13. Ertekin R.C.,Webster W.C.,Wehansen J.V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel // J.of Fluid Mechanics.– 1986.– 69.– P. 275–292.
14. Pedersen G. Three dimensional wave patterns generated by moving disturbances in transcritical speeds. // J. of Fluid Mechanics.– 1988.– 196.– P. 39–63.
15. Henn R.,Sharma S.D.,Yiang T. Influence of Canal Topography of Ship Waves in shallow Water // Proc. 16th. Int.Work Shop in Water Waves and Floating Bodies.– 2001.– 1–4.– P.
16. Li Y.,Sclavounos P.D. Three-dimensional nonlinear solitary waves in shallow water generated by an advancing disturbance // J. of Fluid Mechanics.– 2002.– 470.– P. 393–410.
17. Hang G.B.,Dai Y.,Matsuda H. Numerical study on breaking Phenomen of Ships waves in narrow and shallow waterways // J.Mar.Sci.Technol.– 2005.– 10.– P. 11–21.
18. Torsvik K.T. Influence of variable Froude number on waves generated by ships in shallow water // Phys.of Fluids.– 2006.– 18, 062102.– P. 1–11.
19. Мороз В.В., Кочін В.О. Виникнення та розвиток хвиль-солітонів перед судном, що рухається в каналі в діапазоні критичних швидкостей // Доп.НАН України.– 2005.– 1.– С. 59–64.