

УДК 532.516

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. МАЛЮГА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4
v_s_malyuga@ukr.net

Получено 10.03.2013

Рассматривается задача обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Предложенный численный алгоритм решения задачи применим к задачам произвольной сложной геометрии. Численный алгоритм основывается на методе конечных объемов. При малых числах Рейнольдса применяется техника DNS, при больших числах Рейнольдса – техника LES. Определен диапазон чисел Рейнольдса, в котором в потоке возникают автоколебания и, следовательно, такой поток может порождать звук. Детально описаны как одночастотные, так и многочастотные колебательные режимы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: автоколебания, метод конечных объемов, обтекание сферы, LES, OpenFOAM

Розглянуто задачу обтікання сфери потоком в'язкої нестисливої рідини в широкому діапазоні чисел Рейнольдса. Запропонований чисельний алгоритм розв'язку задачі може бути застосований також до задач довільної складної геометрії. Чисельний алгоритм базується на методі скінчених об'ємів. При малих числах Рейнольдса застосовується техніка DNS, при великих числах Рейнольдса – техніка LES. Визначено діапазон чисел Рейнольдса, в якому в течії виникають автоколивання, а, отже, такий потік може породжувати звук. Детально описано як одночастотні, так і багаточастотні коливальні режими.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: автоколивання, метод скінчених об'ємів, обтікання сфери, LES, OpenFOAM

The flow of viscous incompressible fluid past a sphere is considered in a wide range of Reynolds number. The offered numerical algorithm is applicable to the problems of arbitrary complex geometry. It is based on the finite volume method. At low Reynolds numbers the DNS technique is employed, at high Reynolds numbers the LES technique. The range of Reynolds number is identified, within which the self-sustained oscillations occur in the flow, and hence such a flow can generate sound. Both single frequency and multi-frequency oscillatory regimes are described in detail.

KEY WORDS: self-oscillations, finite volume methods, flow past a sphere, LES, OpenFOAM

ВВЕДЕНИЕ

Обтекание сферы являлось предметом множественных экспериментальных исследований еще с начала прошлого столетия. Так, в 1909 году знаменитый французский инженер-строитель А.Эйфель, заинтересовавшись вопросами воздействия ветровых нагрузок на строительные конструкции, построил в Париже на Марсовом поле аэродинамическую трубу. Продувая в ней сферу, он в 1912 году обнаружил явление, названное впоследствии парадоксом Эйфеля: при достижении критического значения числа Рейнольдса ($Re \approx 3 \cdot 10^5$) сопротивление сферы резко уменьшается с увеличением скорости¹. Два года спустя Прандтль объяснил это явление возникновением турбулентности в пограничном слое, что привело к резкому увеличению угла отрыва пограничного слоя. Этот пример показывает, насколько сложным и непредсказуемым может быть течение при обтекании тела такой, казалось бы, простой формы.

¹Здесь и далее число Рейнольдса определяется по диаметру сферы

Картина течения вокруг сферы меняется драматически с ростом числа Рейнольдса. Чем выше значение числа Рейнольдса, тем сложнее становится характер течения. При переходе от ламинарного безотрывного течения при малых числах Рейнольдса к турбулентному режиму течения при больших числах Рейнольдса след за сферой претерпевает ряд переходов от одного четко выраженного устойчивого режима к следующему. Именно поэтому задача обтекания сферы часто рассматривается исследователями как трехмерная тестовая задача при разработке новых численных алгоритмов. Разнообразие различных режимов течения, которые возникают в рассматриваемой задаче, позволяет верифицировать как методы DNS (прямое численное моделирование), используемые при ламинарных режимах течения, так и методы LES (моделирование крупных вихрей), используемые при турбулентных режимах [1].

Перечислим основные режимы обтекания сферы, известные из литературы:

- $0 < Re < 20$. Ламинарное течение с гладкими незамкнутыми линиями тока. Течение за сферой идентично течению перед сферой.

- $20 < Re < 212$. Стационарное осесимметричное течение. Вблизи кормовой точки образуется замкнутая область циркуляционного движения, которая представляет собой осесимметричное вихревое кольцо и остается присоединенной к сфере.
- $212 < Re < 275$. Стационарное течение с симметрией относительно некоторой продольной плоскости. След состоит из двух присоединенных к сфере вытянутых вдоль направления потока вихревых "хвостов" (streamwise vortical tails). Жидкость внутри этих двух вихревых хвостов вращается в противоположных направлениях.
- $275 < Re < 375$. Периодический сброс вихревых петель. Симметрия относительно некоторой продольной плоскости сохраняется.
- $375 < Re < 800$. Сброс вихрей продолжается, однако нарушается регулярность процесса. Азимутальный угол, при котором формируются вихри, осциллирует иррегулярно. Симметрия относительно продольной плоскости нарушается.
- $800 < Re < 3.7 \cdot 10^5$. Докритический режим, при котором имеет место отрыв ламинарного пограничного слоя. В оторвавшемся сдвиговом слое происходит образование более мелких вихрей, вызванных неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. Сброс крупномасштабных вихрей продолжается более иррегулярным образом, хотя периодические флуктуации следа по-прежнему имеют место.
- $3.7 \cdot 10^5 < Re < 1.14 \cdot 10^6$. Закритический режим, при котором имеет место уже отрыв турбулентного пограничного слоя. Область следа существенно сужается. Сопротивление резко падает. Периодический сброс вихрей более экспериментально не наблюдается.

В 1956 году Танада экспериментально исследовал обтекание сферы в диапазоне чисел Рейнольдса от 5 до 300 [2]. Было показано, что при $Re < 24$ течение представляет собой безотрывное ламинарное течение с гладкими незамкнутыми линиями тока, причем течение за сферой идентично течению перед сферой. Такой поток называется ползучим течением (steering flow). Танада определил, что при числах Рейнольдса выше 24 течение отрывается от сферы вблизи задней точки и формирует за сферой замкнутый рециркуляционный след в форме осесимметричного вихревого кольца. По мере увеличения числа Рейнольдса

угол отрыва потока и длина следа растут. Танада установил, что размер вихревого кольца пропорционален логарифму числа Рейнольдса. Поток оставался стационарным вплоть до $Re = 130$, а при достижении этого порогового значения у задней части вихревого кольца появлялись осцилляции. Magarvey и Bishop [3, 4] исследовали след за сферической каплей жидкости, несмешиваемой со средой, в которой она движется, в более широком диапазоне чисел Рейнольдса, вплоть до 2500. Они пришли к выводу, что течение остается осесимметричным и стационарным вплоть до $Re = 210$, после чего след теряет осесимметричность и превращается в две вихревые трубки, вытянутые вдоль по потоку. Позже Nakamura [5] установил, что вихревое кольцо за сферой формируется уже при $Re = 10$ и даже менее и остается стационарным и осесимметричным вплоть до $Re = 190$. Wu и Faeth [6] исследовали различные режимы следа за сферой в диапазоне чисел Рейнольдса 30-4000. Они наблюдали стационарный осесимметричный след вплоть до $Re = 200$, после чего след терял осесимметричность, однако оставался стационарным. Эти результаты хорошо согласуются с расчетами Natarajan, Acrivos [7], которые проводили линейный анализ устойчивости стационарного осесимметричного потока за сферой и установили, что течение испытывает регулярную бифуркацию при значении Re около 210, после чего начинается развитие неосесимметричного следа. Johnson и Patel [8] нашли численно, что данный переход осуществляется при $Re = 211$. Tomboulides и Orszag в работе [9] численно исследовали обтекание сферы в диапазоне $25 < Re < 1000$. Они использовали смешанный метод, построенный на основе метода Фурье. Было показано, что течение является стационарным и осесимметричным в диапазоне $Re < 212$, а отрыв потока от сферы начинается при $Re = 20$. В [1] они использовали подход DNS для течений с малыми числами Рейнольдса и подход LES для течений с большими числами Рейнольдса. Полученное численно критическое значение числа Рейнольдса ($Re = 212$), при котором поток за сферой теряет осевую симметрию, несколько выше, чем значения, полученные экспериментально. Это объясняется возмущениями, которые в эксперименте вносят опорные конструкции, фиксирующие сферу.

При переходе через критическое значение $Re = 212$ след за сферой остается присоединенным и стационарным, однако не является более осесимметричным. В этом режиме след состоит из двух вытянутых по направлению потока вихре-

вых хвостов равной интенсивности и противоположных по знаку. Такой след обладает симметрией относительно некоторой плоскости, расположенной вдоль потока. Ориентация плоскости симметрии может быть произвольной и определяется случайным внешним возмущением. В эксперименте это может быть, например, влияние опорной конструкции, фиксирующей сферу, в численном моделировании – влияние погрешности округления или несимметричности расчетной сетки. Magarvey и Bishop [3, 4] назвали такую структуру „a double-threaded wake“, то есть след, состоящий из двух волокон, и представили его фотографии. Они установили, что такой след имеет место в диапазоне чисел Рейнольдса $210 < Re < 270$. Ormières и Provansal [10] экспериментально исследовали обтекание сферы в диапазоне чисел Рейнольдса от 100 до 360, концентрируясь на описании перехода от стационарного режима к периодическому. Они наблюдали стационарный след, состоящий из двух вихревых волокон, в диапазоне $180 < Re < 280$. Верхняя граница диапазона чисел Рейнольдса, в котором имеет место данный режим течения, является точкой бифуркации Хопфа, поскольку при переходе через нее система переходит из стационарного режима в автоколебательный. Значения этого критического числа Рейнольдса определялись во многих работах. Экспериментально были получены следующие значения: 280 [6, 10], 300 [11], между 270 и 290 [3, 4], 275 [12]. Путем численного моделирования было установлено: 270 [8], между 250 и 285 [1], 277.5 [7], 272 [13].

Потеря осевой симметрии течения приводит к появлению боковой силы, направление которой лежит в плоскости симметрии. Появление боковой силы заметили еще Magarvey и Bishop [3, 4], описывая в своих экспериментах, что жидкие капли, падающие в другой жидкости, отклонялись от вертикальной траектории падения. Позже наличие боковой силы подтвердили несколько численных исследований. Gushchin et al. [14] использовали гибридный метод на основе явной конечно-разностной схемы второго порядка для численного моделирования обтекания сферы и обнаружили, что в диапазоне $210.5 < Re < 297$ течение остается стационарным, но неосесимметричным, а коэффициент боковой силы отличен от нуля. Johnson и Patel [8] обнаружили, что боковая сила увеличивается примерно на три порядка при увеличении Re от 211 до 212.

При дальнейшем росте числа Рейнольдса ($Re > 275$) происходит переход от стационарного режима течения к периодическому. При этом сохраняется симметрия течения относительно плоскости. В ди-

апазоне $275 < Re < 290$ нестационарность течения начинает проявляться в виде волнистости двух волокон следа. Затем, при превышении $Re = 290$ начинается периодический сброс вихрей с поверхности сферы. След за сферой состоит из последовательности взаимосвязанных вихревых петель. Такое поведение следа было описано еще в экспериментах Magarvey и Bishop [3, 4]. Позже режим периодического сброса вихрей исследовался во множестве экспериментальных [6, 10–12, 15, 16], а также и вычислительных работ [8, 9, 13, 17–22]. Так, Johnson и Patel [8] провели численное моделирование течения при $Re = 270$ и получили стационарное решение, а уже при $Re = 280$ решение становилось периодическим. При $Re = 300$ течение представляет собой весьма упорядоченный периодический поток, в котором имеет место регулярный сброс вихрей. Были получены значения числа Струхалия и коэффициента сопротивления. Ploumhans et al. [17] использовали трехмерные методы вихрей для моделирования обтекания сферы при значениях числа Рейнольдса 300, 500, 1000. При $Re = 300$ они установили, что течение находится в периодическом режиме, а след имеет плоскость симметрии. Они также рассчитали значения числа Струхалия и коэффициентов сопротивления и боковой силы. Tomboulides и Orszag [9] выполнили прямое численное моделирование течения в диапазоне чисел Рейнольдса от стационарного течения до турбулентного и установили, что переход от режима стационарного течения с плоскостью симметрии к одночастотному периодическому режиму сброса вихрей происходит в диапазоне $270 < Re < 285$. Причем в периодическом режиме также наблюдается сохранение плоскости симметрии, как и при более низких значениях числа Рейнольдса. Они также выполнили расчеты для $Re = 300$ и пришли к выводу, что след за сферой состоит из последовательности взаимосвязанных вихревых петель, которые также сохраняют плоскость симметрии. Mittal [18] проводил численное моделирование обтекания вытянутых сфероидов. Для этого он использовал метод коллокаций на основе полиномов Чебышева для дискретизации в направлении нормальном к поверхности сфероида и разложение Фурье по угловой координате. Построенный численный алгоритм тестировался на задачах обтекания сферы в диапазоне $50 \leq Re \leq 500$. Позже в статьях [19, 20] этот численный метод использовался для описания обтекания сферы в диапазоне $350 \leq Re \leq 650$. Было установлено, что при $Re = 350$ след также представлял собой взаимосвязанные вихревые петли, срывающиеся со сферы на определенной частоте.

Причем след все также обладал плоскостью симметрии.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса ($Re \geq 375$) симметрия течения относительно плоскости разрушается. Азимутальный угол точки формирования вихрей изменяется иррегулярным образом. В экспериментах Sakamoto и Haniu [23] было замечено, что сброс вихрей начинает проявлять иррегулярный характер вблизи $Re = 420$, а при $Re = 480$ иррегулярный характер сброса вихрей становится ярко выраженным. Mittal [19] выполнил ряд численных экспериментов в диапазоне $350 \leq Re \leq 425$ с целью получения более углубленного представления о бифуркации, которая ведет к потере плоскости симметрии. Он установил, что след теряет симметрию относительно плоскости при числах Рейнольдса в интервале $350 \leq Re \leq 375$. Однако при этих значениях числа Рейнольдса отклонения угловой координаты формирования вихрей малы и становятся существенными лишь при $Re = 425$. Mittal объяснил существенное отличие своих результатов от результатов Sakamoto и Haniu тем, что техника визуализации потока при эксперименте неспособна определить малые отклонения азимутального угла точки формирования вихря. В недавней экспериментальной работе [12] Chrust et al. исследовали обтекание сферы в горизонтальном водном канале в диапазоне чисел Рейнольдса $270 \leq Re \leq 500$. Авторы пришли к выводу, что след теряет симметрию относительно плоскости при $Re \approx 375$. Численное моделирование [1, 9] показало, что при $Re = 500$ след за сферой также состоит из срывающихся вихревых петель, однако эти петли имеют различную ориентацию в пространстве и, следовательно, симметрия относительно плоскости более не сохраняется. Спектр временной зависимости скорости, вычисленной в нескольких точках пространства, показал, что течение трансформировалось от одночастотного колебания скорости при $Re = 300$ к практически хаотической системе при $Re = 500$, где, однако, все еще наблюдается доминирующий пик при числе Струхала 0.167. Achenbach [24] экспериментально исследовал обтекание сферы при $400 < Re < 5 \cdot 10^6$. Он одновременно измерял сигнал в различных точках круга перпендикулярного направлению потока и пришел к выводу, что точка отрыва вихря вращается вокруг сферы.

Переход в следующий режим течения происходит вблизи $Re = 800$. При числах Рейнольдса выше этого значения в следе доминируют два основных вида неустойчивости. Во-первых, это все тот же сброс вихрей, который представляет

крупномасштабную неустойчивость в следе. Во-вторых, в оторвавшемся ламинарном сдвиговом слое начинают формироваться мелкомасштабные вихри, что является проявлением неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, которая дает высокочастотный вклад в спектр. Kim и Durbin [25] проводили экспериментальные измерения как срыва крупных вихрей, так и формирования неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в сдвиговом слое, в широком диапазоне чисел Рейнольдса $500 < Re < 6 \cdot 10^4$. Высокочастотная компонента была обнаружена только в области, расположенной непосредственно за сферой. Это привело авторов к заключению, что наблюдаемая высокочастотная компонента возникает вследствие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в оторвавшемся сдвиговом слое. Было установлено, что число Струхала, связанное со сбросом вихрей, практически не зависит от числа Рейнольдса в диапазоне $Re > 800$ и приблизительно равно 0.2. В то время как число Струхала, связанное с неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца, растет с ростом числа Рейнольдса. Sakamoto и Haniu [23] экспериментально исследовали обтекание сферы в диапазоне $300 < Re < 4 \cdot 10^4$ и пришли к аналогичному выводу: при $Re > 800$ появляется высокочастотная мода, которая существует одновременно с низкочастотной модой, связанной со сбросом вихрей, вплоть до $Re = 1.5 \cdot 10^4$. Причем в данном диапазоне пульсации наблюдаются на вихревой поверхности, оторвавшейся от поверхности сферы. Частота наблюдаемых визуальных пульсаций потока соответствовала значениям числа Струхала высокочастотной моды, полученным Möller [26] еще в 1938 году и позже Achenbach [24]. Chomaz et al. [27] представили результаты экспериментального исследования следа сферы, движущейся как в однородной, так и в стратифицированной среде. В однородной среде авторы подтвердили результаты Kim и Durbin [25] и показали, что две характеристические частоты следа соответствуют двум модам неустойчивости: неустойчивость Кельвина-Гельмгольца и спиральной неустойчивости. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в отделившемся цилиндрическом сдвиговом слое при $Re > 800$ также наблюдалась в численных исследованиях Tomboulides и Orszag [9].

В работах Jenny et al [28, 29] посредством численного моделирования рассматривался сценарий перехода к хаосу для сферы, падающей или всплывающей в ньютоновской жидкости. Результаты показывают, что после достижения пороговой скорости вертикальное движение сферы становится неустойчивым в силу разрушения осевой симметрии

течения. Эта регулярная бифуркация приводит к отклонению сферы от вертикальной траектории. Затем, при дальнейшем увеличении скорости происходит бифуркация Хопфа и падающая или всплывающая сфера начинает совершать осциллирующие движения. В этом режиме траектория сферы лежит в вертикальной плоскости. Ориентация этой плоскости выбирается случайным образом при разрушении осевой симметрии. При дальнейшем увеличении скорости наступает хаотический режим движения сферы, который сопровождается потерей плоскости симметрии. Эти численные результаты подтверждаются экспериментальными визуализациями Veldhuis et al [30, 31].

Для численного моделирования течения при $Re > 10^3$ во многих случаях используется метод моделирования крупных вихрей (LES) либо метод моделирования отсоединенных вихрей (DES). Хотя есть и работы, в которых решались уравнения Рейнольдса (RANS) и нестационарные уравнения Рейнольдса (URANS). Drikakis [32] численно исследовал как ламинарное, так и турбулентное обтекание сферы. При больших числах Рейнольдса ($Re = 1.62 \cdot 10^5$ и $Re = 5 \cdot 10^6$) он использовал алгебраическую модель Baldwin-Lomax и $k - \epsilon$ модель. Сравнение с экспериментом проводилось по кривым распределения коэффициента давления. Показано, что $k - \epsilon$ модель дает более точный результат, чем алгебраическая модель. Однако для турбулентного режима течения результаты обеих моделей были далеки от экспериментальных. Автор приходит к заключению о необходимости исследования нестационарной природы течения. Constantinescu et al. [33] моделировали обтекание сферы при $Re = 10^4$ и установили, что в данном случае отрыв ламинарного пограничного слоя происходит при значениях угла примерно 83° . Главной целью работы было сравнение результатов, полученных с использованием подходов LES, DES и URANS. Расчеты по технологии URANS проводились с использованием двухслойной модели $k - \epsilon$, $k - \omega$, $v2f$ и Spalart-Allmaras модели. В LES использовалась динамическая модель вихревой вязкости. За исключением двухслойной $k - \epsilon$ модели, значения коэффициента лобового сопротивления, полученные с использованием URANS, показали приемлемое совпадение с экспериментальными данными. Распределение коэффициентов давления и поверхностного трения было адекватно рассчитано в рамках подхода URANS, однако DES и LES показали лучшее согласование с экспериментальными измерениями в кормовой части сферы. Все три подхода показали близкие результаты для профилей средней скорости и

турбулентной кинетической энергии в области следа. Подход URANS дал возможность рассчитать главную частоту, соответствующую срыву вихрей, хотя амплитуда колебаний была существенно ниже, чем та, которую показали DES и LES. Однако стоит отметить, что DES и LES смогли уловить также вторичные нестационарные явления, такие как неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в оторвавшемся сдвиговом слое. Оба подхода показали вторичную высокочастотную полосу в спектре. Числа Струхала как для низкочастотной моды (сброс вихрей), так и для высокочастотной моды (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца) хорошо согласовывались с экспериментальными результатами Sakamoto и Haniu [23]. Моделирование с использованием URANS [32, 33] не показало наличие высокочастотной полосы.

Пожалуй, наиболее известной особенностью обтекания сферы при больших числах Рейнольдса является резкое падение сопротивления при переходе через критическое значение числа Рейнольдса $Re_{cr} = 3.7 \cdot 10^5$. Это явление носит название парадокса Эйфеля. Оно было открыто в 1912 году и два года спустя объяснено Прандтлем [34]. Дело в том, что в докритическом режиме имеет место отрыв ламинарного пограничного слоя, а в закритическом режиме – отрыв уже турбулентного пограничного слоя, что приводит к резкому увеличению угла отрыва и, следовательно, сужению области следа. Так, если в докритическом режиме значения угла отрыва, приводимые разными авторами [35, 36], находились в диапазоне $81 - 88^\circ$, то в закритическом режиме средний угол отрыва составлял $114 - 121^\circ$.

В работе [35] Constantinescu и Squires моделировали обтекание сферы, используя подход DES на структурированной сетке, полученной путем вращения двумерной сетки относительно оси. Расчеты проводились для чисел Рейнольдса 10^4 , $4.2 \cdot 10^5$, $1.14 \cdot 10^6$. В докритическом режиме DES смог достаточно точно описать срыв крупномасштабных вихрей, связанный со спиральной неустойчивостью следа, а также образование более мелких вихревых трубок в оторвавшемся сдвиговом слое, которое происходит благодаря росту неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (см. визуализации Та-неда [37]). Численные результаты, полученные с использованием DES, вполне удовлетворительно согласовывались с экспериментальными данными [38] для глобальных и локальных характеристик следа, таких как лобовое сопротивление, положение точки отрыва погранслоя на сфере и распределение коэффициентов давления и поверхностного трения. В закритическом режиме DES аккуратно

рассчитал положение отрыва пограничного слоя и распределение коэффициента осредненного давления на поверхности сферы. Однако коэффициент поверхностного трения не согласовывался достаточно точно с экспериментом.

Танеда [37] проводил визуализацию обтекания сферы в диапазоне $10^4 < Re < 10^6$, используя различные методы визуализации течения в пристеночной области. Было установлено, что для чисел Рейнольдса в диапазоне $10^4 < Re < 3.8 \cdot 10^5$ в следе имеет место волновое возмущение типа бегущей волны. Причем число Струхала и коэффициент сопротивления остаются практически постоянными и равны 0.2 и 0.5, соответственно. Эти наблюдения согласуются с результатами Achenbach [24, 38], который установил, что явные периодические флуктуации существуют в следе вплоть до $Re = 3 \cdot 10^5$ и что точка отрыва вихря вращается вокруг сферы. При превышении критического значения $Re = 3.7 \cdot 10^5$ периодический сброс вихрей уже не определяется экспериментально, во всяком случае он не был обнаружен посредством используемой техники измерений. Зона рециркуляционного движения вблизи следа значительно сжимается, а коэффициент сопротивления резко уменьшается до значения 0.08. Танеда также показал экспериментально, что в диапазоне $3.8 \cdot 10^5 < Re < 10^6$ след формирует пару вихревых линий, вытянутых по потоку, и эта вихревая пара медленно вращается иррегулярным образом. Vakić и Reić представили результаты по визуализации обтекания сферы в диапазоне чисел Рейнольдса $2.2 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$ в аэродинамической трубе и в диапазоне $5 \cdot 10^4 < Re < 3 \cdot 10^5$ в гидроканале [39]. Представленные фотографии демонстрируют закручивание на границе оторвавшегося сдвигового слоя и спаривание образовавшихся вихрей в докритическом режиме. С ростом числа Рейнольдса переход оторвавшегося сдвигового слоя в турбулентный режим происходит ближе к точке отрыва. В закритическом режиме рециркуляционная область следа резко сужается, а волновое движение следа за сферой исчезает.

Главная цель данной работы состоит в том, чтобы провести численное моделирование обтекания сферы во всех основных докритических режимах течения, сравнить полученные результаты с результатами других авторов для верификации используемых численных схем, а также найти режимы, при которых в потоке возникают автоколебания и, следовательно, такой поток может генерировать звук [40].

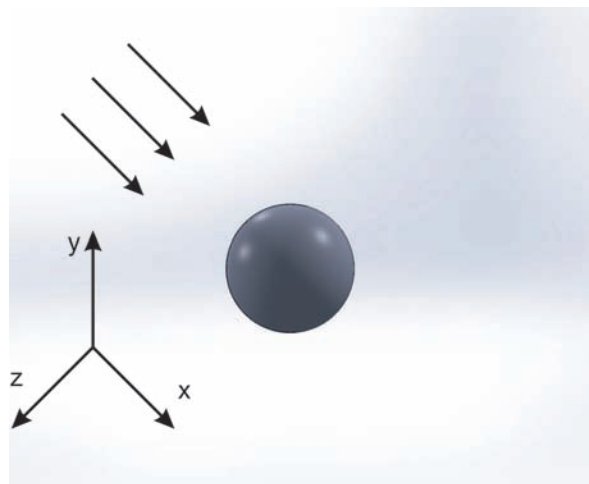


Рис. 1. Геометрия задачи

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОДХОД DNS

Итак, задача обтекания твердой сферы формулируется в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. Такой процесс описывается нестационарной системой уравнений Навье-Стокса, которые можно представить в тензорной форме следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = \nabla \cdot \nu \nabla (\mathbf{u} + (\mathbf{u})^T) - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где p – скалярное поле давления; \mathbf{u} – векторное поле скорости; $\mathbf{u}\mathbf{u}$ – тензор второго ранга, определенный как внешнее произведение векторов.

Для обезразмеривания приведенных уравнений движения за масштаб длины принимался диаметр сферы d , а за масштаб скорости – скорость равномерного потока V на достаточно большом удалении от сферы. Тогда масштаб времени будет величина d/V , а масштаб давления – удвоенный скоростной напор ρV^2 . Основным параметром такой задачи, входящим в уравнения движения, является число Рейнольдса $Re = Vd/\nu$, где ν – кинематическая вязкость среды.

В качестве расчетной области выбран прямоугольный параллелепипед со сторонами длиной $30d$, $24d$, $24d$, соответственно. То есть при единичном диаметре сферы расчетная область занимает следующий параллелепипед: $x \in [-10, 20]$, $y \in [-12, 12]$, $z \in [-12, 12]$, а центр сферы располагался в начале системы координат (см. рис. 1). Граничные условия формулировались следующим

образом. На поверхности сферы для скорости ставилось условие прилипания $U = 0$, для давления – равенство нулю нормального градиента. На входе в расчетную область ($x = -10$) задавался равномерный поток. На боковых границах расчетной области ($y = \pm 12$ или $z = \pm 12$) формулировалось условие проскальзывания, т.е. нулевые значения для нормальной компоненты скорости и равенство нулю нормального градиента для касательных компонент. Такое условие предполагает, что на расстоянии $12d$ в сторону от сферы поток уже является практически невозмущенным. На выходе из расчетной области ($x = 20$) ставились «мягкие» граничные условия, соответствующие равенству нулю нормального градиента скорости. Для давления условие равенства нулю нормального градиента формулировалось по всей границе расчетной области.

При ламинарных режимах течения задача решалась в рамках DNS (Direct Numerical Simulation). Иными словами, численное решение задачи состояло в дискретизации уравнений (1), (2) с учетом перечисленных выше граничных условий. При турбулентных режимах задача решалась в рамках приближения LES.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОДХОД LES

При больших значениях числа Рейнольдса ($Re > 1000$) для решения задачи использовалась технология LES (Large Eddy Simulation). Базовые уравнения для LES впервые сформулированы Смагоринским в 1963 году [41]. Основываясь на теории Колмогорова [42], согласно которой, несмотря на неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей и хаотичность передачи их энергии по каскаду приводят к тому, что мелкомасштабные пульсации имеют характер локально изотропный, т.е. однородный, и квазистационарный (меняющийся в зависимости лишь от характеристик осредненного движения), естественно было ожидать, что малые масштабы могут быть успешно аппроксимированы. Следовательно, крупномасштабные структуры, которые содержат большую часть энергии, участвуют в переносе и зависят от граничных условий, должны быть рассчитаны напрямую, в то время как мелкомасштабные могут быть представлены моделью. На этом и основан подход LES.

Чтобы отделить крупномасштабные движения от мелкомасштабных в LES используется процедура фильтрации. Она представляет собой не осре-

днение по ансамблю, как в RANS, а некое локально взвешенное осреднение свойств потока по объему жидкости. Основным параметром фильтрации является некоторый размер Δ – характерный масштаб длины, ширина фильтра. Масштабы, превосходящие Δ , остаются и в отфильтрованном поле потока, а вклад масштабов, меньших Δ (подсеточные масштабы или SGS масштабы), моделируются.

Согласно LES, любая переменная потока f состоит из крупномасштабной и мелкомасштабной частей:

$$f = \bar{f} + f'. \quad (3)$$

Здесь и далее штрих означает мелкомасштабную часть, а верхняя черта – крупномасштабную (иными словами подсеточные и разрешаемые масштабы). Для извлечения крупномасштабных компонент применяется операция фильтрации, которая определяется следующим образом:

$$\bar{f}(x) = \int_V G(x - x'; \Delta) f(x') dx', \quad (4)$$

где интегрирование проводится по всей расчетной области V ; функция $G(x - x'; \Delta)$ – ядро фильтра, финитная функция или функция с компактным носителем (другими словами, функция принимает большие значения только, когда x' находится в окрестности x). Причем выполнено условие нормировки:

$$\int_V G(x - x'; \Delta) dx' = 1, \quad (5)$$

которое гарантирует формальный переход от LES к DNS при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{f}(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_V G(x - x'; \Delta) f(x') dx' = \\ &= \int_V \delta(x - x') f(x') dx' = f(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Наиболее часто в LES применяются следующие фильтры:

- фильтр Гаусса, преимуществом которого является гладкость и дифференцируемость:

$$G(x - x'; \Delta) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp\left(-\frac{6(x - x')^2}{\Delta^2}\right); \quad (7)$$

- коробчатый фильтр, который просто является осреднением по прямоугольной области:

$$G(x - x'; \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{if } |x - x'| \leq \Delta/2, \\ 0, & \text{if } |x - x'| > \Delta/2. \end{cases} \quad (8)$$

Этот фильтр является наиболее часто используемым в конечно-объемных методах, поскольку осреднение проводится по контрольным объемам конечно-объемной сетки, где переменные потока являются кусочно-линейными функциями x . Это подразумевает, что если ширина фильтра Δ выбрана равной шагу сетки, осредненные и локальные значения \bar{f} и f будут равны;

- фильтр Фурье

$$G(x - x'; \Delta) = \frac{\sin(k_c(x - x'))}{k_c(x - x')}, \quad k_c = \frac{\pi}{\Delta}, \quad (9)$$

который в фурье-пространстве исключает все волновые числа выше некоторой выбранной частоты k_c :

$$\hat{G}(k; \Delta) = \begin{cases} 1, & \text{if } k \leq k_c, \\ 0, & \text{if } k > k_c, \end{cases} \quad (10)$$

где \hat{G} – фурье-образ функции фильтра; k – волновое число, причем

$$\hat{G}(k; \Delta) = \int_V G(x - x'; \Delta) e^{-ikx'} dx'. \quad (11)$$

Тогда процесс фильтрации задается следующим образом:

$$\bar{f}(k) = \hat{G}(k; \Delta) \hat{f}(k), \quad (12)$$

где $\hat{f}(k)$ – фурье-образ функции $f(x)$. Этот фильтр обычно используется в спектральных методах, поскольку его трудно применять к неоднородным потокам и он не сглаживает поле сеточных масштабов \bar{f} , подобно тому как это делают описанные выше фильтры.

Коробчатый фильтр и фильтр Гаусса производят похожие результаты, поскольку они оба сглаживают флуктуации больших и малых масштабов, в то время как фильтр Фурье оставляет только масштабы ниже некоторого критического волнового числа. Такое сглаживающее поведение требует более высокого разрешения для этих типов фильтров по сравнению с фильтром Фурье. Конечно, возможно применение и других фильтров, например, фильтра Лапласа.

Общая рекомендация при выборе фильтра может быть дана следующая: более сложные фильтры следует применять только при использовании динамических подсеточных моделей для определения тестового фильтра. В остальных же случаях вполне достаточно применять коробчатый фильтр

с шириной фильтра Δ , равной шагу сетки. Как уже отмечалось выше, в этом случае $\bar{f} = f$, то есть фильтрация численно, вообще, не проводится.

После применения процедуры фильтрации к уравнениям Навье-Стокса получаем отфильтрованные уравнения движения. Если ширина фильтра Δ постоянна, то можно менять порядок исполнения процедур дифференцирования и фильтрации. В этом случае полученные уравнения имеют вид, похожий на уравнения RANS:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \nabla \cdot \nu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (14)$$

Далее, определяя напряжения подсеточных масштабов

$$\tau = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}, \quad (15)$$

получаем окончательный вид уравнений (13):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \nu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \tau. \quad (16)$$

Следует отметить, что хотя уравнения LES внешне подобны уравнениям RANS, подсеточные напряжения τ представляют намного меньшую часть спектра турбулентной энергии, чем напряжения Рейнольдса в RANS. Следовательно, точность моделирования турбулентных напряжений в подходе LES не является настолько критической, как в подходе RANS.

С учетом декомпозиции (3) на разрешаемую и подсеточную части подсеточные напряжения могут быть представлены в виде классического тройного разложения, представленного Леонардом в 1974 году [43]:

$$\tau = L + C + R = (\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + (\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}}) + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}. \quad (17)$$

Каждый из трех членов имеет свое физическое значение. Первый член – напряжения Леонарда. Описывает взаимодействие крупномасштабных (разрешаемых) скоростей. Второй член – смешанные напряжения. Описывает взаимодействие между разрешаемыми и подсеточными масштабами, то есть передачу энергии от крупномасштабных структур мелкомасштабным. Третий член – напряжения Рейнольдса. Описывают взаимодействие между подсеточными масштабами.

3. ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Для пространственной дискретизации расчетной области использовалась утилита snappyHexMesh, входящая в тулбокс OpenFOAM [44]. Опишем схематически процесс генерации сетки. Прежде всего создается САД-модель обтекаемого тела, которая затем записывается в STL формате. Во всей расчетной области создается базовая ортогональная эквидистантная гексаэдральная сетка. Процесс улучшения качества сетки вблизи поверхности обтекаемого тела состоит из следующих пяти шагов:

- расщепление соответствующих ячеек сетки, которые пересекают поверхность обтекаемого тела;
- исключение тех ячеек, которые оказались внутри (более 50% объема) обтекаемого тела. На данном этапе граница сетки представляет собой зубчатую поверхность;
- расщепление ячеек сетки, которые лежат внутри некоторой заданной области, окружающей обтекаемое тело. В этой области требуются более точные расчеты;
- процедура снэппинга. Вершины соответствующих ячеек передвигаются на поверхность обтекаемого тела, таким образом сглаживается зубчатая поверхность сетки. Путем итерационной процедуры улучшается качество сетки, нарушенное после смещения вершин ячеек;
- вокруг поверхности обтекаемого тела вводятся дополнительные слои сетки, состоящие из гексаэдральных ячеек и выровненные по поверхности тела. Этот шаг позволяет избежать нерегулярности и неортогональности сетки вблизи поверхности обтекаемого тела.

В данной работе число контрольных объемов используемых сеток варьировалось от 3,5 миллионов для ламинарных режимов течения без срыва вихрей до 6 миллионов для отрывных и турбулентных режимов. Ячейки базовой сетки имели форму куба со стороной 0.4 диаметра сферы. Вблизи поверхности сферы проводилось семь расщеплений ячейки. Расстояние от сферы до центроидов ближайших ячеек имеет принципиальное значение при расчетах турбулентных течений. Для используемой нами сетки нормализованное расстояние до стенки $y^+ = yu_\tau/\nu$ (где y – расстояние до стенки, u_τ – сдвиговая скорость) не превосходило 5. Этого было достаточно для проведения аккуратных численных расчетов в турбулентном докритическом режиме течения, однако недостаточно для

того, чтобы полностью отказаться от моделирования стенки сферы.

При достаточно малых значениях числа Рейнольдса ($Re < 800$) решение задачи заключалось в прямом численном моделировании (DNS) течения. В этом случае численно решались уравнения Навье-Стокса (1), (2), описывающие такое течение, с учетом граничных условий задачи. Алгоритм численного решения сформулированной задачи детально описан в [45] и использован в [46, 47] для численного моделирования течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Также данный алгоритм был использован в [48, 49] при моделировании обтекания вязкой жидкостью кругового цилиндра и возникающих в результате периодического сброса вихрей эоловых тонов.

Алгоритм решения основан на использовании метода конечных объемов, который в настоящее время можно считать наиболее популярным численным подходом в задачах механики жидкостей. При расчетах использовались библиотеки тулбокса с открытым кодом OpenFOAM [44]. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему применялась общая процедура Гаусса, согласно которой интеграл по объему представляется через интеграл по поверхности ячейки, а значение функции на поверхности ячейки интерполируется из значений функции в центроидах соседних ячеек. Для интерполяции конвективных членов использовалась TVD схема, имплементированная в [44] (limitedLinearV). Градиент скорости на поверхности ячейки, необходимый при вычислении диффузионных членов по теореме Гаусса, вычислялся из значений скорости в центроидах соседних ячеек по центрально-разностной схеме второго порядка. На неортогональных участках сетки использовалась итерационная процедура коррекции погрешности, вызванной неортогональностью сетки. В качестве схемы дискретизации производной по времени использовалась неявная трехточечная несимметричная схема второго порядка с разностями назад (backward differencing).

Для связанного расчета поля скорости и давления применялась процедура PISO с числом корректоров 4. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений использовались солверы PCG и PBiCG – итерационные солверы, использующие методы сопряженных и би-сопряженных градиентов с предобуславливанием для симметричных и асимметричных матриц, соответственно. В качестве предобуславливателя были выбраны процедуры DIC (предобуславлива-

тель, основанный на упрощенной схеме неполной факторизации Холецкого) и DILU (предобуславливатель, основанный на упрощенной неполной LU факторизации) для симметричных и асимметричных матриц соответственно. Более детальное описание применяемого при DNS численного алгоритма дано в [45]. Там же можно найти и ссылки на литературу с подробным описанием используемых солверов и численных процедур.

Рассмотрим теперь моделирование подсеточных масштабов при расчетах турбулентных режимов. Подсеточные модели, используемые в LES, имеют много общего с моделями турбулентности, используемыми в RANS, с тем отличием, что моделируется существенно меньшая часть турбулентного спектра. Уменьшение вклада моделируемой части течения приводит к уменьшению погрешности. Следовательно, даже сравнительно простые SGS модели могут давать удовлетворительные результаты. Используемые в LES подсеточные модели можно разбить на следующие категории:

- Алгебраические модели. Моделирование базируется на предположении о том, что тензор SGS напряжений имеет локальную линейную связь с тензором скоростей деформации разрешаемых масштабов. Классическим примером алгебраической модели служит модель Смагоринского [41], которая является подсеточным аналогом алгебраической модели пути смещения Прандтля для уравнений Рейнольдса. Однако, в отличие от турбулентной вязкости, подсеточная вязкость, так же как и кинетическая энергия, зависят не только от характеристик течения (компонент тензора скоростей деформаций), но и от размера фильтра Δ . Модель Смагоринского основывается на упрощающих предположениях о том, что мелкомасштабные компоненты находятся в равновесии, то есть имеют пространственно-однородное, изотропное и квазистационарное распределение, а вся получаемая ими от компонент разрешаемых масштабов энергия полностью диссипирует. Такие упрощения (во многом схожие с соображениями Колмогорова) позволяют предположить, что подсеточная вязкость определяется средним значением скорости диссипации энергии турбулентности, приходящейся на единицу объема.
- Дифференциальные модели. Предположение равновесия мелкомасштабных компонент делает модель Смагоринского недостаточно аккуратной в тех течениях, где это условие заведомо не выполняется. Примерами таких те-

чений служат свободные сдвиговые слои, оторвавшиеся и вновь присоединенные течения, пограничные слои. Для решения таких проблем необходимо включить в модель влияние истории развития течения, то есть рассматривать уравнения переноса для подсеточных характеристик турбулентности. Наиболее простой дифференциальной моделью оказывается модель с одним дифференциальным уравнением. Такая k-модель, являющаяся дифференциальной моделью с одним уравнением, которая использовалась при расчетах в данной работе, будет подробно описана ниже.

- Модели близких масштабов и смешанные модели. Модели, построенные на концепции вихревой вязкости, способны описывать общий диссипативный эффект подсеточных масштабов, однако они плохо описывают корреляции между тензором скоростей деформаций крупных масштабов и тензором подсеточных напряжений. Они также не учитывают механизм передачи энергии от мелкомасштабных компонент к крупномасштабным и, следовательно, неспособны воспроизвести все аспекты обмена энергией. Основная идея, на которой базируется модель близких масштабов, состоит в том, что наименьшие разрешаемые вихри размера $O(\Delta)$ взаимодействуют с подсеточными вихрями подобно тому, как более крупные вихри взаимодействуют с вихрями размера $O(\Delta)$ [50]. Иными словами, такие модели представляют собой экстраполяционную процедуру от наименьших разрешающих масштабов на структуры SGS масштабов. Наибольшие подсеточные масштабы могут быть получены путем фильтрации SGS скорости. Поскольку такая схема отличается высокой диссипацией энергии, она обычно используется в комбинации со схемой, основанной на концепции вихревой вязкости.
- Динамические модели. Этот подход впервые был предложен Germano et al. [51]. Он может быть применен к любой описанной выше модели. Его идея состоит в том, что коэффициенты SGS модели определяются динамически в результате вычислений, а не задаются а priori как в модели Смагоринского. Идея динамической процедуры базируется на предположении, аналогичном тому, на котором базируются модели близких масштабов, то есть на предположении о схожем характере малых вихрей разрешаемых масштабов и вихрей подсеточного масштаба. Таким образом, появля-

ется возможность оценить коэффициент пропорциональности из разрешаемых структур.

В данной работе было принято решение использовать дифференциальную модель с одним уравнением. Такой выбор был мотивирован следующими соображениями. Во-первых, данная модель была опробована и эффективно имплементирована в работе [52] при исследовании развитого течения в канале. Она показала хорошие результаты. Во-вторых, модели с одним дифференциальным уравнением предпочтительнее алгебраических моделей, поскольку они учитывают неравновесные эффекты и дают независимые значения для SGS скоростей при незначительном увеличении компьютерных затрат. Это приводит к большей точности, особенно в сложных течениях. Было также решено не использовать динамическую процедуру, поскольку известно, что динамическая модель становится очень неточной в случае недостаточного разрешения сетки в пристеночной области, поскольку предположения подобия между различными масштабами не работают вблизи стенки. В силу этих же причин динамические модели плохо работают в задачах с недостаточным разрешением вблизи сдвиговых слоев. Следовательно, динамические модели надо использовать очень осторожно в трехмерных задачах, где достижение достаточного разрешения сетки в пристеночной области требует сильного увеличения расчетных ресурсов. В-третьих, в работе [53] проведено сравнение классической модели Смагоринского, динамической модели Germano et al [51] с учетом ее модификации Lilly [54] и дифференциальной k-модели с одним уравнением, предложенной Yoshizawa и Horiuti [55]. В [53] сравнение этих моделей проводилось на задаче обтекания квадратного цилиндра, а результаты сравнивались с экспериментальными данными. Авторы пришли к выводу, что дифференциальная k-модель Yoshizawa и Horiuti показала наилучшие результаты.

Рассмотрим более подробно k-модель, имплементированную в OpenFOAM, которая использовалась в данной работе. Большинство моделей с одним дифференциальным уравнением также основываются на концепции вихревой вязкости, но включают уравнение переноса для некоторой величины подсеточных масштабов, от которой зависит вихревая вязкость. В k-модели такой величиной является кинетическая энергия подсеточных масштабов. Она определяется следующим образом:

$$k = \frac{1}{2} \text{tr}(\tau) = \frac{1}{2} \text{tr}(\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{u}}). \quad (18)$$

Подсеточные напряжения τ моделируются так

же как и в модели Смагоринского на основе предположения о линейной зависимости тензора подсеточных напряжений от тензора скоростей деформации разрешаемых масштабов, то есть предположения, аналогичного гипотезе Буссинеска в подходе RANS:

$$\begin{aligned} \tau - \frac{1}{3} \text{tr}(\tau) \mathbf{I} &= \tau - \frac{2}{3} k \mathbf{I} = \\ &= -\nu_{sgs} (\nabla \overline{\mathbf{u}} + \nabla \overline{\mathbf{u}}^T) = -2\nu_{sgs} \overline{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\overline{\mathbf{S}}$ – тензор скоростей деформации разрешаемых масштабов.

Из уравнений (1), (16) с учетом (19), а также с учетом упрощающего предположения об изотропии SGS масштабов получаем уравнение переноса для кинетической энергии подсеточных масштабов:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k \overline{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot ((\nu + \nu_{sgs}) \nabla k) - \epsilon + 2\nu_{sgs} \overline{\mathbf{S}}^2. \quad (20)$$

Здесь вихревая вязкость ν_{sgs} и диссипация ϵ определяются следующим образом:

$$\nu_{sgs} = C_k k^{1/2} \Delta, \quad (21)$$

$$\epsilon = C_\epsilon k^{3/2} / \Delta. \quad (22)$$

Более детальные рассуждения, касающиеся вывода уравнений этой модели, могут быть найдены в работе [55]. Авторы разработали данную модель и применили ее для численного исследования турбулентного течения в канале [56]. Позже в работе [53] было проведено сравнение классической модели Смагоринского, динамической модели Germano et al [51] с учетом ее модификации Lilly [54] и дифференциальной k-модели с одним уравнением Yoshizawa и Horiuti [55]. Сравнение этих моделей проводилось на задаче обтекания квадратного цилиндра. Результаты, полученные с использованием перечисленных моделей, сравнивались с экспериментальными данными. Авторы пришли к выводу, что дифференциальная k-модель Yoshizawa и Horiuti показала наилучшие результаты.

Для дискретизации уравнений LES использовались практически те же схемы, описанные выше, что и при подходе DNS. Однако существенное различие состоит в том, что в турбулентном режиме течения нельзя использовать TVD схемы для дискретизации конвективных членов, так как ограничение потока может "резать" турбулентные пульсации. В этом случае следует использовать обычную центрально-разностную схему. А в случае возникновения неустойчивости счета уменьшать число Куранта. Вообще, как показывает

практика, при использовании технологии LES число Куранта не должно превышать 0.3.

При использовании k -модели с одним уравнением необходимо также сформулировать граничные условия для k . Распределение кинетической энергии k обычно имеет максимум вблизи стенки [52]. Поэтому граничное условие на стенке зависит от качества сетки в пристеночной области. Согласно [52], при $y^+ > 20$ формулируется условие Неймана $\partial k / \partial y = 0$, при $y^+ \leq 20$ – условие Дирихле $k = 0$. Поскольку в нашем случае при $Re = 10^4$ значение y^+ не превосходило 5, было использовано условие Дирихле на сфере.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТЕНКИ

Вообще говоря, классический подход LES не требует моделирования твердой стенки. Однако при отказе от моделирования пристеночных течений, то есть в случае LES вплоть до твердых стенок, вычислительные затраты оказываются сопоставимыми с затратами DNS. В [57] представлены оценки вычислительных ресурсов, необходимых для расчета обтекания типичного гражданского самолета или автомобиля с использованием всех известных методов расчета турбулентных течений, начиная от полуэмпирических методов, базирующихся на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса (RANS) и кончая полностью свободным от эмпиризма методом DNS. Авторы утверждают, что на компьютере с производительностью 1 терафлопс время расчета в рамках подхода DNS составляет 5000 лет. А затраты в рамках подхода LES без использования пристеночного моделирования оказываются сопоставимы с затратами DNS.

В настоящий момент в рамках подхода LES существует множество различных методов моделирования твердой стенки. Большинство моделей прогнозируют сдвиговые напряжения на стенке. Хотя есть модели, которые пытаются воспроизводить некоторые вторичные свойства пристеночного течения, например, моделируют подсеточную вязкость. Данная статья не претендует на всесторонний и исчерпывающий обзор существующих методов, однако перечислим основные подходы.

Равновесные модели. Основным предположением этого класса моделей пристеночных течений есть предположение, что напряжения в пограничном слое находятся в состоянии равновесия. Это подразумевает, что профиль скорости является универсальным, т.е. слабо зависит от числа Рейнольдса, и выполняется локальное равно-

весие энергии турбулентных пульсаций, т.е. скорость производства турбулентности уравновешивается скоростью вязкой диссипации. В этом случае подразумевается, что логарифмический закон стенки применим в пристеночной области. Вообще, эти модели определяют сдвиговые напряжения на стенке как функцию локального значения скорости в точке сетки, ближайшей к стенке. Хорошо известны следующие примеры этого класса моделей пристеночного течения: модель Дирдорфа, модель Schumann–Grotzbach, а также ее последующие усовершенствования, учитывающие существование вблизи стенки наклонных структур (модель со смещением), влияние быстрого движения жидкости в направлении от или к стенке (модель с выбросом), локальные и мгновенные модели, требующие удовлетворения закона стенки локально по пространству и по времени. Читателей, интересующихся этим классом моделей, можно отослать к обзорным работам [58, 59].

Двухслойные модели (TLM). Основная идея двухслойного подхода состоит в размежевании сетки, находящейся в основном потоке, от более мелкой сетки, находящейся в пристеночной области, называемой подслоем. На подслой применяются упрощенные уравнения переноса и модели, что снижает время счета. Стандартные уравнения LES решаются на грубой сетке, используя сдвиговые напряжения на стенке, предоставляемые моделью, в качестве граничных условий. Напряжения подсчитываются путем интегрирования упрощенных уравнений пограничного слоя на детальной сетке, расположенной вблизи стенки. Эти уравнения имеют вид [58, 59]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}_i \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y} \right], \quad (23)$$

$$\bar{u}_2 = -\int_0^y \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} \right), \quad i = 1, 3, \quad (24)$$

где x – направление потока; y – направление нормали к стенке; z – третье направление. Таким образом, модель использует скорости и градиенты давления из решения LES и возвращает сдвиговые напряжения на стенке.

Основное отличие между существующими двухслойными моделями состоит в принципе моделирования вихревой вязкости в подслое. Простейшим подходом, вероятно, является модель пути смешения [60]:

$$\nu_t = (ky_w)^2 D(y_w) |S|, \quad (25)$$

где k – постоянная Кармана; y_w – расстояние до стенки; S – локальный тензор скоростей деформации.

ции; D – демпфирующая функция, которая обеспечивает корректное ограниченное поведение ν_t в вязком слое. В данной работе использовались демпфирующие функции Ван Драйста (Van Driest) [60].

Моделирование отсоединенных вихрей (DES). В этом разделе невозможно не упомянуть еще об одном подходе к рассмотрению турбулентных течений вблизи стенки. Это подход, при котором моделирование турбулентности в пограничном слое происходит посредством нестационарного RANS. А техника LES применяется в основной области течения. Для подхода DES Spalart-Allmaras предложили свою модель вихревой вязкости [61].

Следует отметить, что в [52] на задаче о течении в канале проводилось сравнение четырех подходов: 1) без моделирования стенки, 2) модель Van Driest, 3) модель Wolfshtein, 4) стандартная Spalart-Allmaras DES модель. Было показано, что только Van Driest и Wolfshtein показали приемлемые результаты. В данной работе использовались демпфирующие функции Van Driest.

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВИХРЕЙ

Турбулентные режимы течения представляют собой не просто случайный шум, но также включают пространственно когерентные, эволюционирующие по времени вихревые структуры. Поскольку когерентные структуры диссипируют намного медленнее некогерентных, правильная идентификация таких вихревых структур представляет наибольший интерес при исследовании турбулентных режимов течения. Обзор широко используемых индикаторов вихрей с описанием преимуществ и недостатков каждого из них можно найти в работе [62] или в более современных работах [63, 64]. Кратко перечислим основные методы.

- Метод локальных минимумов давления. Поскольку на элементарный материальный объем внутри вихря действует центробежная сила, она должна уравновешиваться минимумом давления вдоль оси вращения. В работе [65] показано, что этот метод может показать вихревые структуры в турбулентном пограничном слое. Однако он не является надежным. В [62] показано несколько режимов, при которых критерий минимума давления ошибочно показал присутствие вихрей.
- Метод линий тока. Линии тока могут быть использованы для определения вихрей при

условии, что они представляют собой замкнутые или спиральные линии [66]. В [67] введена мера закручиваемости линий тока "winding angle", которая представляла собой угол поворота сегмента линии тока при движении вдоль нее. Были также предложены подходы, связанные с вычислением кривизны линий тока [68]. В [69] метод был распространен на трехмерные поля. Главный недостаток этого метода состоит в том, что он не обладает инвариантностью относительно преобразования Галилея. Следовательно, вихрь может быть определен в одной инерциальной системе отсчета, но не определен в другой, движущейся с некоторой скоростью. На практике это означает, что этот метод может не определить некоторые вихри, движущиеся с разными скоростями, и оказаться полностью непригодным при исследовании турбулентного течения, где существует множество вихрей, которые переносятся на различных скоростях.

- Метод величины завихренности. Один из наиболее часто используемых методов определения когерентных вихревых структур состоит в определении модуля завихренности (см., например, [70–73]). Этот метод был успешно применен для расчета дельтавидного крыла и лопастей ротора конвертоплана V-22. Также этот метод нередко использовался в задачах со свободными сдвиговыми потоками. Однако он плохо применим в задачах с пристеночными сдвиговыми течениями, поскольку не может определить вихрь, когда завихренность в течении, вызванная сдвигом, и завихренность внутри вихря сравнимы по величине.
- D -метод. В работе [74] предложена классификация различных локальных картин линий тока, возникающих в трехмерном течении, на основе вычисления собственных значений тензора градиента скорости $\nabla \mathbf{u}$. Авторы пришли к заключению, что ядро вихря определяется как область с двумя комплексными собственными значениями тензора $\nabla \mathbf{u}$. В этом случае мгновенные линии тока, соответствующие скорости $\nabla \mathbf{u}$, замкнуты или имеют форму спирали. Характеристическое уравнение, корнями которого являются собственные числа тензора \mathbf{u} , будет иметь два комплексных корня, если дискриминант этого уравнения $D > 0$.
- Q -метод. Метод, предложенный в работе [75],

определяет вихрь как область, в которой второй инвариант Q тензора $\nabla \mathbf{u}$ больше нуля. Дополнительно требуется, чтобы давление внутри вихря было меньше, чем давление в окружающей вихрь области. Этот критерий ($Q > 0$) является более строгим, чем предыдущий ($D > 0$). Следовательно, все области течения, в которых удовлетворяется данный критерий, будут удовлетворять и предыдущему.

- λ_2 -метод. Этот метод предложен в работе [62]. Фактически, он также базируется на утверждении, что вихри содержат локальные минимумы давления, однако исключает случаи, когда локальные минимумы давления возникают не вследствие вращения. Согласно этому методу, ядро вихря определяется как связанная область с двумя отрицательными собственными значениями тензора $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$, где \mathbf{S} и Ω – симметричная и антисимметричная части тензора $\nabla \mathbf{u}$ соответственно. Поскольку симметричный тензор второго ранга имеет три вещественных собственных значения, то вихрь определяется знаком второго собственного числа, а именно $\lambda_2 < 0$.

Рассмотрим более подробно последние три метода, базирующиеся на исследовании тензора $\nabla \mathbf{u}$, поскольку именно эти методы использовались в данной работе. В [74] авторы провели локальную классификацию мгновенных линий тока, рассматривая течение в окрестности некоторой материальной точки в невращающейся системе координат, движущейся вместе с этой материальной точкой. Раскладывая скорость в ряд Тейлора $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$, несложно видеть, что в общем случае характер течения в окрестности рассматриваемой материальной точки определяется линейным членом разложения, то есть тензором $\nabla \mathbf{u}$. При этом, если все три собственных числа $\nabla \mathbf{u}$ действительны, то рассматриваемое локальное течение представляет собой растяжение и сжатие по трем направлениям, то есть топологически такая точка классифицируется как узел-седло-седло. Если же два собственных значения являются комплексно сопряженными, то такая точка представляет собой либо центр, либо устойчивый/неустойчивый фокус в зависимости от значения третьего (действительного) собственного числа. Таким образом, вихрь определяется как область, в которой два собственных числа тензора $\nabla \mathbf{u}$ являются комплексно сопряженными.

Собственные числа $\nabla \mathbf{u}$ удовлетворяют характе-

ристическому уравнению

$$\lambda^3 - P\lambda^2 + Q\lambda - R = 0, \quad (26)$$

где P, Q, R – три инварианта тензора $\nabla \mathbf{u}$, определенные следующим образом:

$$P = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (27)$$

$$Q = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\nabla \mathbf{u}))^2 - \text{tr}((\nabla \mathbf{u})^2) \right) = \frac{1}{2} (\|\Omega\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2), \quad (28)$$

$$R = \det(\nabla \mathbf{u}). \quad (29)$$

Здесь, как и прежде, \mathbf{S} и Ω означают симметричную и антисимметричную части тензора $\nabla \mathbf{u}$, а $\|\Omega\|$ и $\|\mathbf{S}\|$ означают нормы этих тензоров: $\|\Omega\|^2 = \text{tr}(\Omega \cdot \Omega^T)$, $\|\mathbf{S}\| = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T)$. Согласно формуле Кардано, уравнение (26) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня, если

$$D = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 > 0. \quad (30)$$

Таким образом, неравенство (30) и определяет вихрь. Этот метод идентификации вихрей назван выше как D -метод. Он был представлен в работе [74]. Пример использования данного метода идентификации вихрей можно найти в [76], где исследовалось течение Стокса в конечном цилиндре. D -метод был использован для определения и классификации угловых вихрей, возникающих вблизи стационарной угловой окружности цилиндра.

Из неравенства (30) следует, что Q -метод выдвигает более строгое условие ($Q > 0$), чем D -метод ($D > 0$). Этот факт имеет очевидное объяснение. Первый член правой части (28) отвечает за вращение элементарного жидкого объема, а второй член – за его растяжение/сжатие. Таким образом, если D -метод требует лишь наличия локального вращения в рассматриваемой области, то Q -метод требует, чтобы вращение доминировало над растяжением.

Как уже упоминалось выше, λ_2 -метод представляет собой улучшенный метод локальных минимумов давления [62]. Если взять оператор градиента от исходных уравнений движения (1) и затем разложить его на симметричную и антисимметричную части, получив таким образом два уравнения, то уравнение с антисимметричной частью представляет собой уравнение переноса завихренности, а оставшаяся симметричная часть имеет вид

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \Omega^2 + \mathbf{S}^2 - \nu \nabla^2 \mathbf{S} = -\frac{1}{\rho} \nabla \nabla p. \quad (31)$$

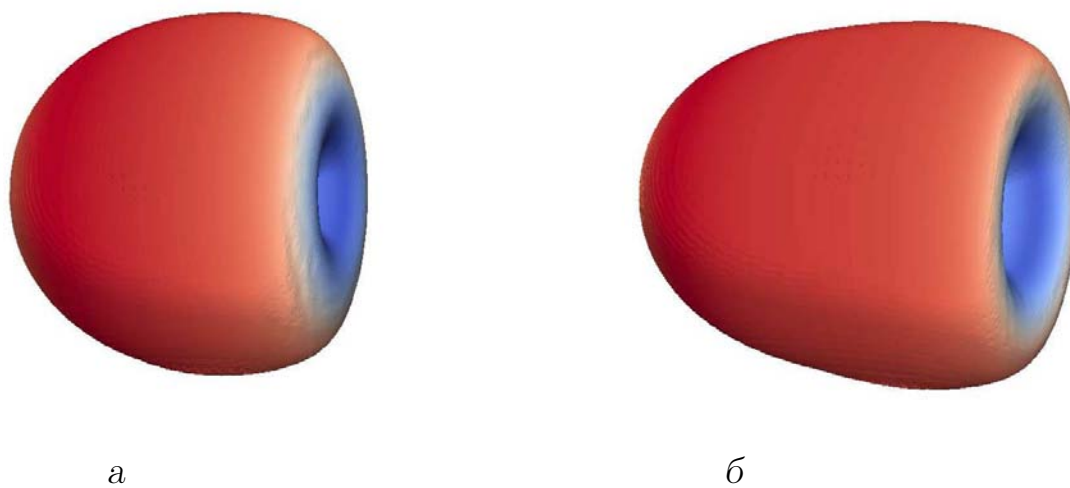


Рис. 2. Вид изоповерхности $Q = 0.001$. Здесь и далее изоповерхности Q окрашиваются в соответствии с величиной скорости (синий цвет – минимальная скорость, красный цвет – максимальная скорость):
 $a - Re = 100$, $б - Re = 200$

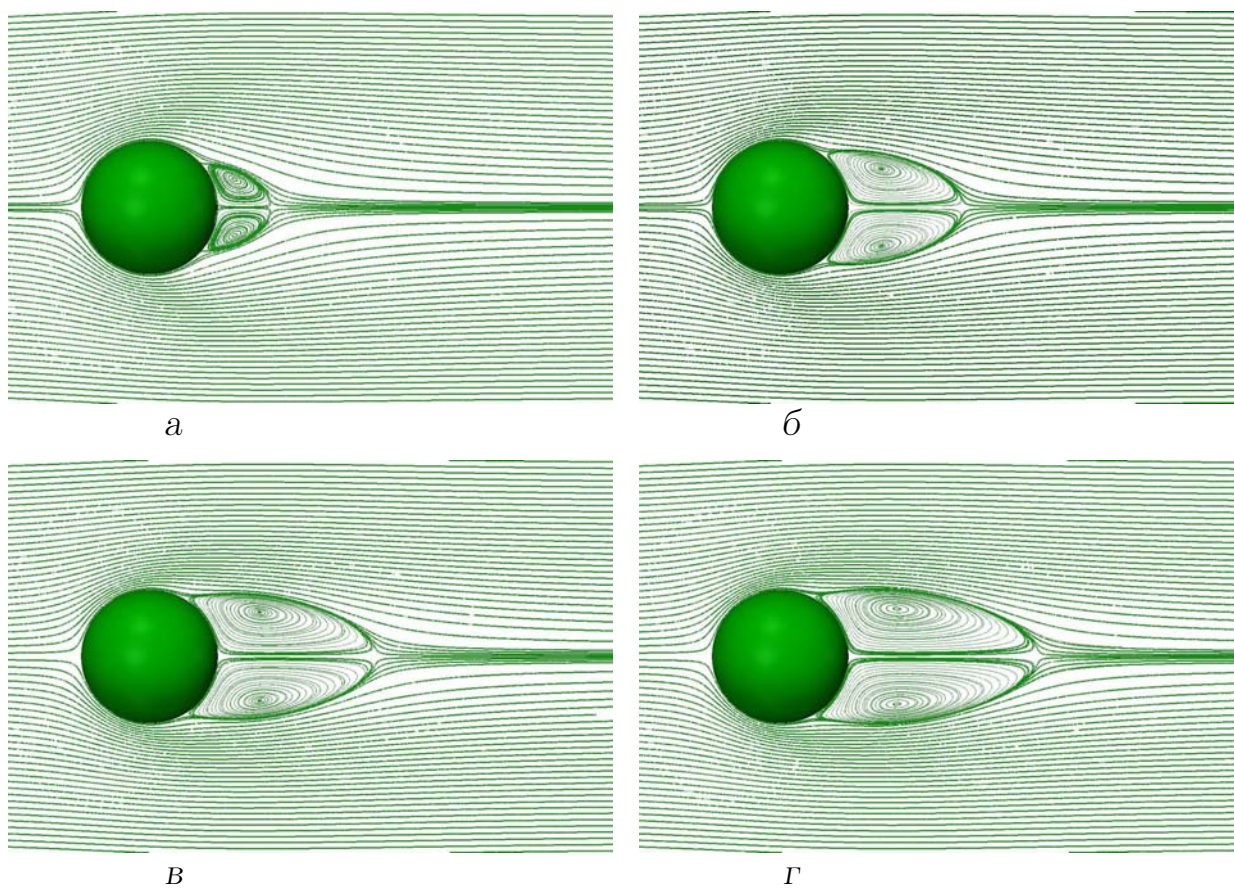


Рис. 3. Вид линий тока:
 $a - Re = 50$, $б - Re = 100$, $в - Re = 150$, $г - Re = 200$

Табл. 1. Коэффициент сопротивления C_x для осесимметричного стационарного режима. Сравнение полученных данных с результатами других авторов

Re	[77]	[78]	[18]	[79]	[80]	[36]	данная работа
Re = 100	1.096	1.09	1.09	1.096	1.104	1.087	1.092
Re = 200	0.772	0.772	–	0.772	0.784	–	0.775

Поскольку \mathbf{S} – тензор скоростей деформации, то первый член левой части (31) представляет нестационарное растяжение/сжатие, которые могут обуславливать появление локального минимума давления, не связанного с вращением элементарного жидкого объема. Последний член левой части представляет вязкие эффекты, которые также вносят вклад в поле давления, не связанный с вихрем. Улучшение метода локальных минимумов давления состоит именно в исключении из рассмотрения этих двух членов. Тогда имеем уравнение:

$$\Omega^2 + \mathbf{S}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla \nabla p^* . \quad (32)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой гессиан скалярной функции p^* . Известно, что критическая точка ($\nabla p^* = 0$) является локальным минимумом p , если гессиан положительно определен в этой точке. Заметим, что поскольку $\Omega^2 + \mathbf{S}^2$ – симметричный тензор, его собственные числа действительны и могут быть упорядочены $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Теперь очевидно, что локальные минимумы p^* в трехмерном пространстве определяются условием, что все три собственных числа тензора $\Omega^2 + \mathbf{S}^2$ отрицательны ($\lambda_i < 0$). Однако если требуется найти локальные минимумы давления на некоторой плоскости, то достаточно потребовать, чтобы два собственных числа были меньше нуля. Отсюда следует, что ядро вихря определяется условием $\lambda_2 < 0$.

Проведенное в работе [62] детальное сравнение различных методов идентификации вихрей показало превосходство Q -метода и λ_2 -метода над методом величины завихренности и D -методом. Как было упомянуто выше, метод завихренности плохо работает в пристеночных сдвиговых слоях, где высокие значения модуля завихренности вызваны общим сдвигом и не позволяют определить положение вихрей. D -метод не обладает подобными недостатками в сдвиговых слоях. Однако он некорректно определяет присутствие вихрей в некоторых изогнутых потоках. Он также может производить шум вблизи границ и показывать структуры малых масштабов при отсутствии завихренности. По этой причине в данной работе использованы для идентификации вихрей λ_2 - и Q -методы.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ. ВЕРИФИКАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численные расчеты, представленные в данной главе, проводились на кластерном суперкомпьютере СКИТ, расположенном в Институте кибернетики НАН Украины. Для распараллеливания вычислений применялась технология MPI, уже имплементированная в OpenFOAM. При расчетах использовалось от 12 до 32 ядер в зависимости от сложности рассматриваемого течения и размера сетки. Количество контрольных объемов в сетке варьировалось от 3.5 миллионов для ламинарного стационарного режима течения до 6 миллионов для турбулентного режима.

Табл. 2. Угол отрыва потока θ_s , отсчитываемый от лобовой точки, и длина вихря L_e , отсчитываемая от кормовой точки; Re = 100

	[77]	[18]	[1]	данная работа
θ_s	127	127.7	126.6	127.9
L_e	0.94	0.87	0.87	0.86

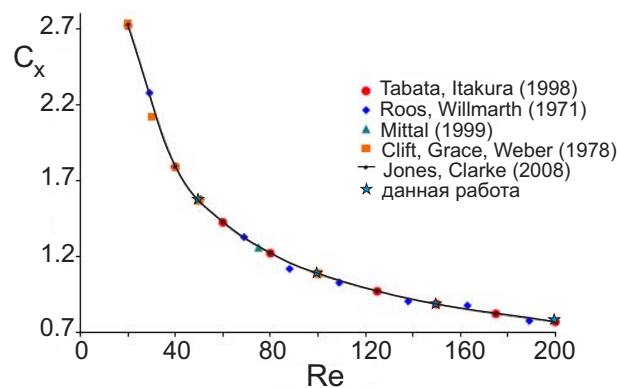


Рис. 4. Коэффициент сопротивления C_x как функция от Re. Сравнение полученных данных с результатами работ [18, 36, 77, 78, 81]

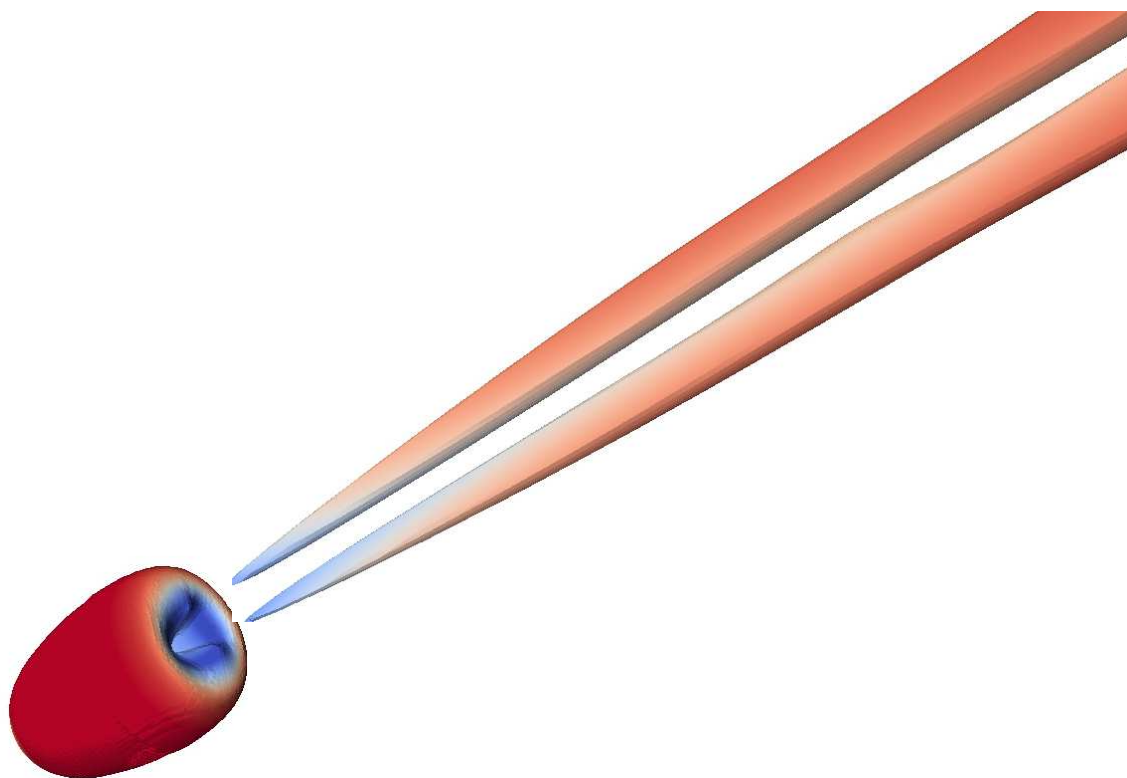
Как уже говорилось выше, в диапазоне чисел Рейнольдса $20 < Re < 212$ поток жидкости вокруг сферы является стационарным и осесимметричным.

тричным. За сферой образуется область рециркуляционного движения в виде стационарного, присоединенного к сфере вихревого кольца. На рис. 2 показаны изоповерхности второго инварианта Q тензора $\nabla \mathbf{u}$, которые используются для идентификации вихревого кольца. Видно, что с ростом числа Рейнольдса размеры вихревого кольца за сферой увеличиваются. На рис. 3 показаны линии тока в плоскости, проходящей через центр сферы. Этот рисунок также демонстрирует, что с ростом числа Рейнольдса вихревое кольцо за сферой растет, однако оно остается стационарным и осесимметричным. Очевидно, что в силу осевой симметрии потока на сферу не действует боковая сила, а только сила лобового сопротивления. Значения коэффициента сопротивления C_x для двух значений числа Рейнольдса (100 и 200) приведены в табл. 1, где также представлены значения C_x , полученные другими авторами. Видно хорошее совпадение полученных автором результатов с результатами, представленными в литературе. В табл. 2 представлены значения длины вихревой зоны за сферой, отсчитываемые от кормовой точки сферы до седловой особой точки в конце вихревого кольца. Также в таблице представлены значения угла отрыва потока от поверхности сферы, то есть угол между носовой точкой сферы и седловой особой точкой на ее поверхности, определяющей начало вихревого кольца. Очевидно, что полученные в данной работе результаты хорошо согласуются с аналогичными результатами, представленными в литературе. Рис. 4 демонстрирует изменение коэффициента сопротивления с ростом числа Рейнольдса в диапазоне $20 \leq Re \leq 200$. Значение коэффициента сопротивления убывает с примерно 2.7 при $Re = 20$, до 0.775 при $Re = 200$. Расчеты проведены при $Re = 50; 100; 150; 200$. Также на рис. 4 с целью сравнения приведены результаты других авторов.

При переходе через точку регулярной бифуркации при $Re \approx 212$ течение остается стационарным, однако осесимметричность течения нарушается. Такое течение должно обладать симметрией относительно некоторой плоскости, проходящей через центр сферы и расположенной вдоль по потоку. Азимутальная ориентация плоскости симметрии устанавливается произвольным образом при разрушении осевой симметрии. На рис. 5 показана изоповерхность Q при $Re = 250$, которая используется для идентификации вихрей. Видно, что вихревое кольцо, которое находится непосредственно за сферой, уже не обладает осевой симметрией. Вместо этого оно обладает симметрией относительно плоскости. За этим вихревым коль-

цом располагаются два вихревых хвоста, вытянутые вдоль по потоку и имеющие равные по величине, но противоположные по знаку интенсивности. Жидкость в этих вихревых хвостах вращается в противоположных направлениях. Очевидно, что поскольку течение более не обладает осевой симметрией, на сферу будет действовать не только сила сопротивления, но и боковая сила. В табл. 3 приведены значения коэффициентов сопротивления C_x и боковой силы C_l при $Re = 250$. Следует отметить, что сила сопротивления более чем на порядок превосходит боковую силу. В таблице представлены как наши результаты, так и результаты других авторов. Наблюдается хорошее соответствие результатов.

Следующая точка перехода ($Re \approx 275$) является точкой бифуркации Хопфа. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса ($Re > 275$) течение переходит из стационарного режима в периодический. Начинается регулярный сброс вихревых петель. В этом режиме течение сохраняет симметрию относительно плоскости. На рис. 6 показана изоповерхность Q при $Re = 300$, а также ее сечение плоскостью, расположенной вдоль по потоку. Видно, что непосредственно за сферой по-прежнему находится вихревое кольцо. Однако осевая симметрия кольца еще сильнее нарушена, чем в предыдущем случае. С периодической регулярностью из внутренней части вихревого кольца, расположенного непосредственно за сферой, выбрасываются вихревые петли, симметричные относительно плоскости. При $Re = 300$ процесс сброса вихревых петель будет строго периодическим. Это заключение также подтверждает рис. 7, на котором изображен процесс изменения во времени коэффициентов сопротивления C_x и боковой силы C_l . Очевидно, что эти процессы будут одночастотными с числом Струхала $St = 0.133$ (табл. 4). Напомним, что при обтекании бесконечного кругового цилиндра [48, 49] частота колебания коэффициента сопротивления C_x будет вдвое выше частоты колебания коэффициента боковой силы C_y . Это связано с тем, что при обтекании цилиндра вихри располагаются в шахматном порядке, а точки отрыва вихрей симметричны относительно горизонтальной прямой. Таким образом, время срыва пары вихрей (верхнего и нижнего) составляет период колебания боковой силы и два периода колебания силы сопротивления. Течение, возникающее при обтекании сферы, является трехмерным и, соответственно, более сложным. Вместо двух последовательностей вихрей, расположенных в шахматном порядке, сфера сбрасывает последовательность вихревых петель. В силу этого, периоды

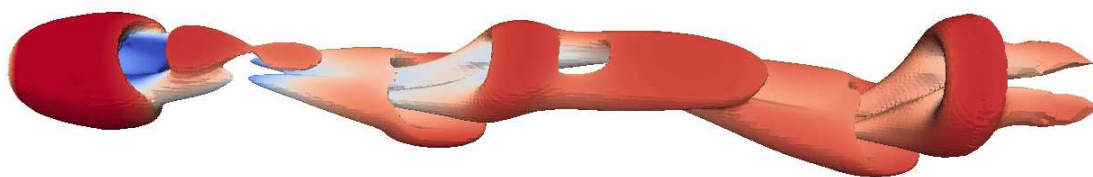
Рис. 5. Вид изоповерхности $Q = 0.0001$ при $Re = 250$

колебания и силы сопротивления, и боковой силы равны. В табл. 4 приведены средние значения коэффициентов сопротивления C_x и боковой силы C_l , а также амплитуды их колебаний ΔC_x и ΔC_l . Следует отметить, что среднее значение боковой силы на порядок меньше, чем среднее значение силы сопротивления, однако амплитуда колебаний боковой силы будет примерно в пять раз больше амплитуды колебаний силы сопротивления. Этот факт позволяет предположить, что, как и в случае обтекания кругового цилиндра, основная часть акустической энергии, генерируемой потоком при обтекании сферы, будет излучаться в боковом направлении.

При увеличении числа Рейнольдса до $Re = 350$ течение за сферой продолжает усложняться. Рис. 8, а демонстрирует изменение во времени коэффициента сопротивления C_x . Видно, что колебания, связанные со срывом вихрей, накладываются на более медленные колебания струи, имеющие, однако, большую амплитуду. На рис. 9 показаны частотные спектры колебаний C_x и C_l . В обоих случаях видно две доминирующие частоты, которые соответствуют значениям числа Струхала $St = 0.041$ и $St = 0.135$. Первая частота соот-

ветствует медленным колебаниям струи, вторая – срыву со сферы вихревых петель. Эти результаты хорошо согласуются с результатами работы [20], в которой авторы представили спектр колебаний поперечной компоненты скорости в некоторой выбранной точке ближнего следа за сферой и получили две доминирующие частоты, соответствующие значениям числа Струхала $St = 0.04 \pm 0.003$ и $St = 0.138 \pm 0.003$. Из рис. 9 видно, что для C_x доминирующий вклад вносит медленное колебание струи ($St = 0.041$), в то время как для C_l вклад обоих компонент ($St = 0.041$ и $St = 0.135$) будет примерно одинаков.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса след за сферой теряет симметрию относительно плоскости. На рис. 10, а показана изоповерхность Q . Очевидно, что она более не обладает симметрией. Хотя по-прежнему сброс вихревых петель продолжается, однако ориентация каждой следующей петли отличается от предыдущей. На рис. 10, б показано сечение изоповерхности завихренности плоскостью, проходящей через центр сферы и расположенной перпендикулярно направлению набегающего потока. Иными словами, это вид со стороны сферы на изоповерхность завихренности. Ви-



а



б

Рис. 6. Вид изоповерхности $Q = 0.0001$ при $Re = 300$:
 а – вид полностью, б – сечение плоскостью симметрии

дно, что симметрия относительно плоскости более не сохраняется даже в непосредственной близости к сфере. Положение точек, в которых происходит образование вихрей, начинает изменяться иррегулярным образом.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса след за сферой переходит в турбулентный режим. Однако в докритическом режиме ($Re < 3.7 \cdot 10^5$) по-прежнему имеет место отрыв от сферы ламинарного пограничного слоя. Ниже по потоку на границе уже оторвавшегося ламинарного пограничного слоя в силу неустойчивости Кельвина-Гельмгольца происходит образование более мелких вихрей. По мере продвижения вниз по потоку эти вихри растут. Еще ниже по потоку ламинарный сдвиговый слой разрывается на отдельные вихревые кольца. В этих вихревых кольцах

вскоре развивается азимутальная неустойчивость, они теряют осесимметричную форму и разрушаются турбулентностью. Этот процесс демонстрирует рис. 11, а, на котором изображена изоповерхность Q . Видно, как оторвавшийся ламинарный сдвиговый слой скручивается в вихревые кольца, которые затем сносятся в турбулентную часть следа и разрушаются. На рис. 11, б показано сечение изоповерхности Q плоскостью, проходящей через центр сферы и расположенной вдоль по потоку. Видно, как между оторвавшимся ламинарным сдвиговым слоем и поверхностью сферы образуются мелкие вихри, которые затем увеличиваются вниз по потоку, пока не приводят к сворачиванию сдвигового слоя в вихревые кольца. На рис. 11, в в той же плоскости сечения цветом показана компонента завихренности ω_n , направлен-

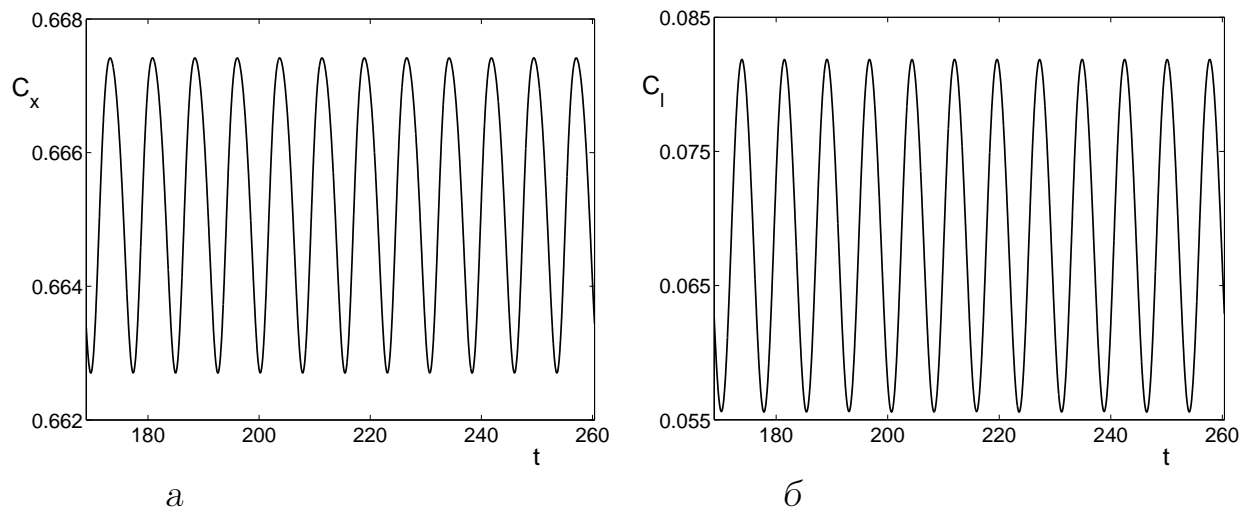


Рис. 7. Изменение во времени коэффициента сопротивления C_x (а) и коэффициента боковой силы C_l (б) при $Re = 300$

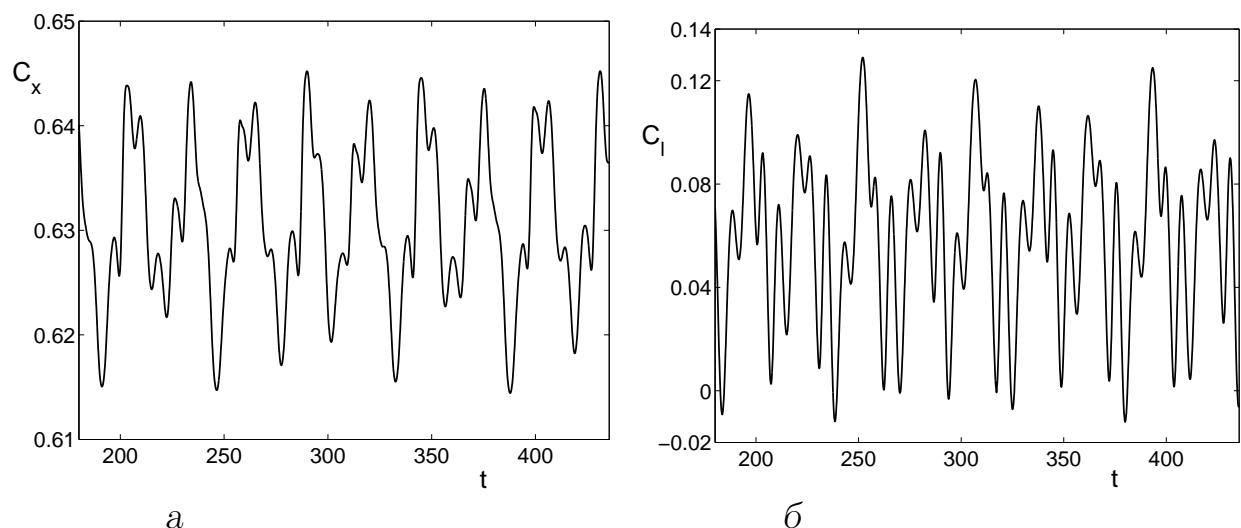


Рис. 8. Изменение во времени коэффициента сопротивления C_x (а) и коэффициента боковой силы C_l (б) при $Re = 350$

Табл. 3. Коэффициент сопротивления C_x и коэффициент боковой силы C_l для неосесимметричного стационарного режима ($Re = 250$). Сравнение полученных данных с результатами других авторов

силы	[18]	[82]	[8]	[83]	[84]	данная работа
C_x	0.68	0.702	0.70	0.702	0.70	0.704
C_l	—	0.061	0.062	0.060	0.0617	0.0617

ная перпендикулярно плоскости сечения. Видно, как после отрыва ламинарного пограничного слоя на его границе развивается неустойчивость и она приобретает волнистую форму.

Следует также отметить, что рис. 11, б и в

наглядно демонстрируют преимущество Q -метода визуализации вихрей над методом завихренности. Q -метод четко показал образование мелких вихрей на границе оторвавшегося сдвигового слоя в непосредственной близости к поверхности сферы,

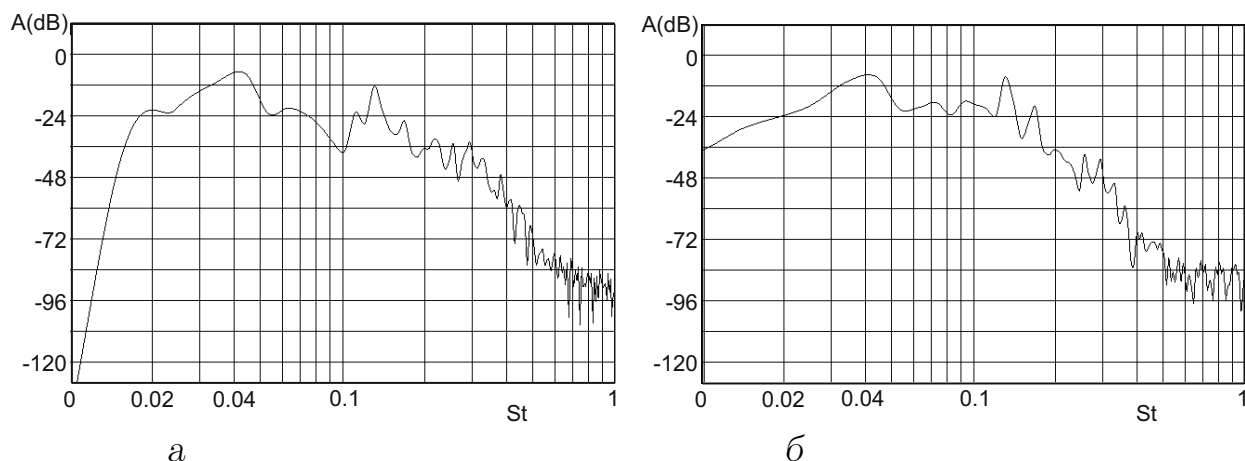


Рис. 9. Частотный спектр коэффициента сопротивления C_x (а) и коэффициента подъемной силы C_l (б) при $Re = 350$

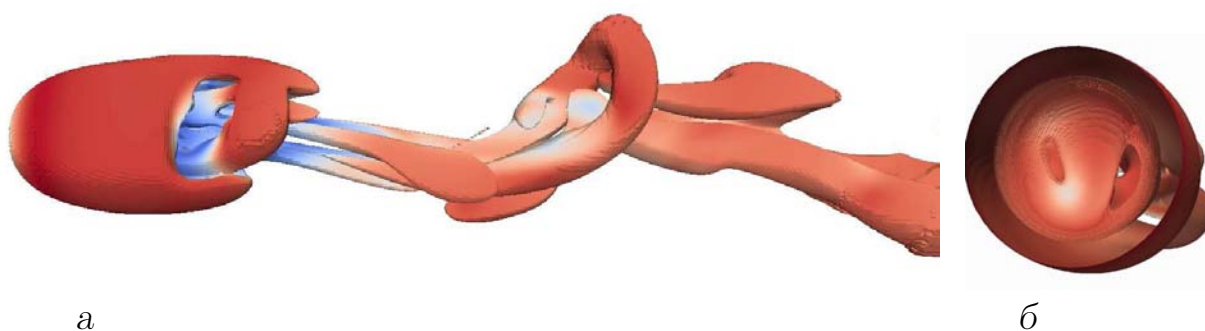


Рис. 10. Течение при $Re = 500$:
а – изоповерхность $Q = 0.0001$, б – сечение изоповерхности завихренности плоскостью, проходящей через центр сферы и расположенной перпендикулярно к потоку

Табл. 4. Средние значения коэффициентов сопротивления C_x и боковой силы C_l для режима периодического сброса вихрей ($Re = 300$), а также амплитуды их колебаний ΔC_x и ΔC_l и значения числа Струхала. Сравнение полученных данных с результатами других авторов

	[36]	[82]	[83]	[33, 35, 84]	[1, 9]	[8]	[17]	данная работа
St	0.133	0.134	0.134	0.136	0.136	0.137	0.135	0.133
C_x	0.661	0.658	0.657	0.655	0.671	0.656	0.683	0.665
ΔC_x	$4 \cdot 10^{-3}$	–	–	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
C_l	–	0.067	0.067	0.065	–	0.069	0.061	0.068
ΔC_l	–	–	–	–	–	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$

в то время как метод завихренности не может показать такие мелкие вихревые структуры в непосредственной близости к стенке.

На рис. 12, а показан частотный спектр коэффициента сопротивления C_x . Отчетливо видно доминирующую частоту 0.196, которая соответствует частоте сброса вихрей. Для того, чтобы идентифи-

цировать колебания, вызванные неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца, была выбрана точка в непосредственной близости к сфере с координатами (0;0.5;0.5), в которой проводилась регистрация скорости. На рис. 12, б показан частотный спектр колебаний скорости u_x . Видно доминирующую частоту 1.94, которая и соответствует неустойчиво-

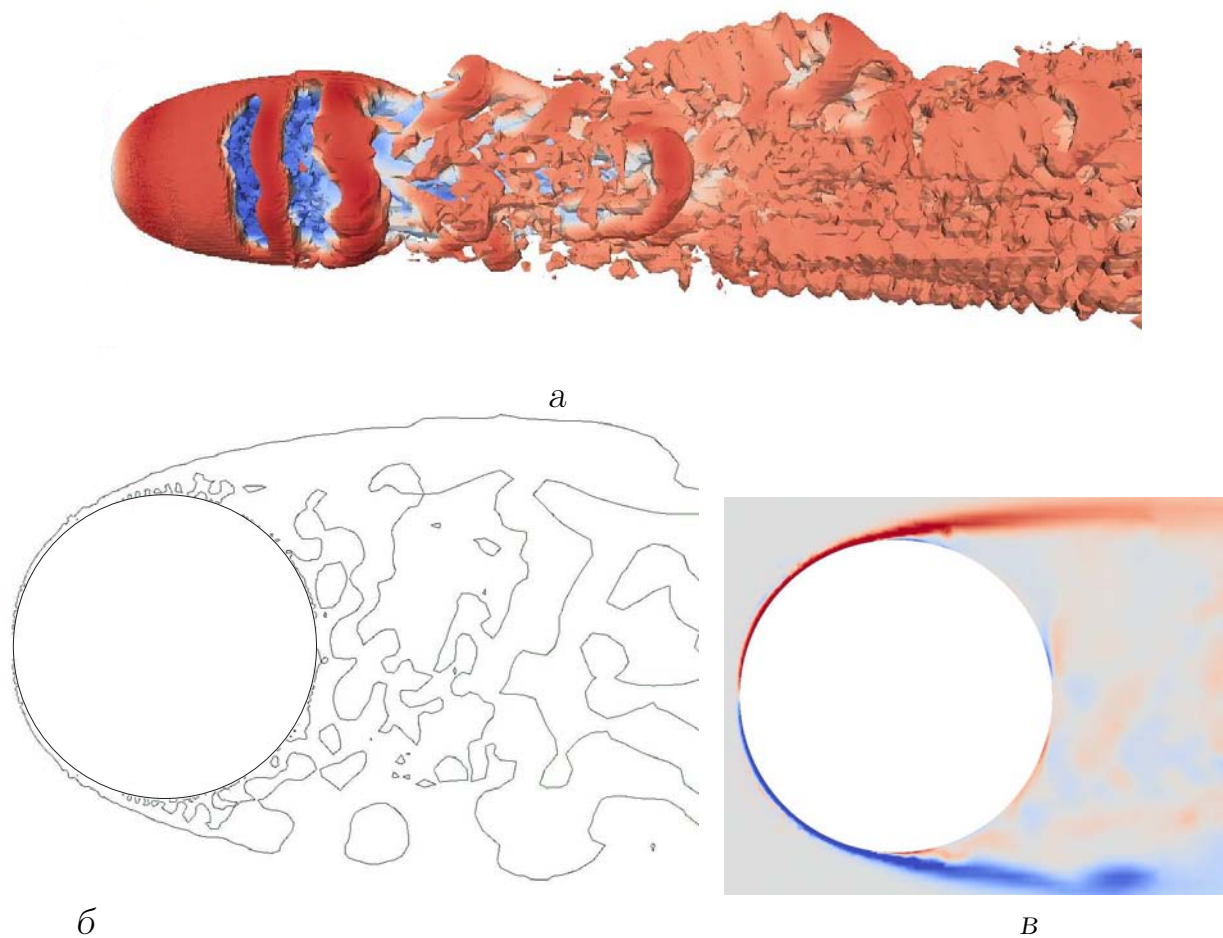


Рис. 11. Течение при $Re = 10^4$:

a – изоповерхность $Q = 0.0001$, b – сечение изоповерхности Q плоскостью, проходящей через центр сферы и расположенной вдоль по потоку, $в$ – компонента завихренности, направленная перпендикулярно плоскости сечения

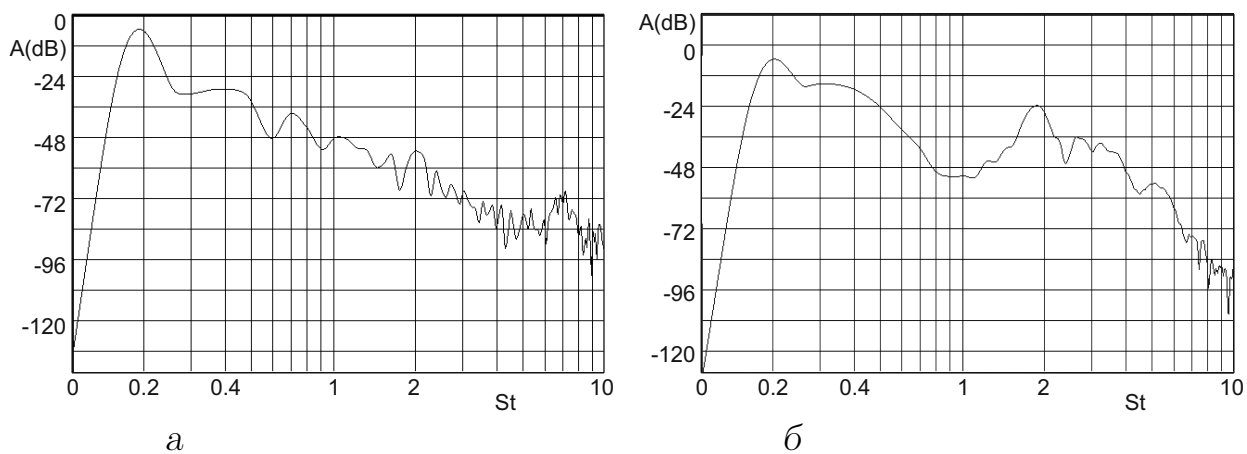


Рис. 12. Частотный спектр коэффициента сопротивления C_x (a) и скорости u_x в точке $(0,0.5,0.5)$ (b) при $Re = 10^4$

Табл. 5. Турбулентный докритический режим ($Re = 10^4$). Среднее значение коэффициента сопротивления C_x , а также значения числа Струхала и угла отрыва пограничного слоя, отсчитываемого от лобовой точки сферы. Сравнение полученных данных с результатами других авторов

	[36]	[24, 38]	[33, 35]	[85]	[86]	[87]	данная работа
St_1	0.191	0.195	0.195	0.17	0.18	0.195	0.196
St_2	1.65-1.82	–	2.1	1.78	1.94	–	1.94
C_x	0.387	0.41	0.393	0.393	0.39	0.402	0.41
θ_s	88°	82.5°	$84 - 86^\circ$	90°	–	84.7°	82.8°

сти сдвигового слоя.

В табл. 5 приведены значения числа Струхала, соответствующие сбросу вихрей (St_1) и неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (St_2), а также средние значения коэффициента сопротивления и угла отрыва ламинарного пограничного слоя. Таблица содержит также результаты, полученные другими авторами. Сравнение показывает достаточно хорошее соответствие между полученными нами результатами и результатами, опубликованными другими авторами.

ВЫВОДЫ

В данной статье предложен алгоритм численного решения трехмерных задач в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Численный алгоритм основывается на методе конечных объемов. При малых числах Рейнольдса применяется техника DNS, при больших числах Рейнольдса – техника LES.

Предложенный численный алгоритм применим к областям произвольной сложной геометрии. Тестирование было проведено на задаче обтекания сферы в широком диапазоне значений числа Рейнольдса от ламинарного безотрывного режима течения до турбулентных режимов. Предложенный численный алгоритм позволил адекватно описать течение во всех известных режимах. Показано хорошее соответствие полученных результатов с результатами других авторов.

Также определен диапазон чисел Рейнольдса, в котором в потоке возникают автоколебания и, следовательно, такой поток может порождать звук. Описаны как одночастотные, так и многочастотные колебательные режимы. Также было установлено, что в ламинарном режиме течения амплитуда колебаний боковой силы, приложенной к сфере, примерно в пять раз превосходит амплитуду колебаний силы сопротивления. Этот факт позволяет предположить, что, как и в случае обтекания кругового цилиндра, основная часть акустической энергии, генерируемой потоком при обтека-

нии сферы, будет излучаться в боковом направлении. При турбулентных режимах течения срывающиеся вихри по форме близки к вихревым кольцам и, следовательно, можно ожидать, что основная часть акустической энергии, генерируемой потоком при обтекании сферы, будет излучаться в направлении потока, а не в боковом направлении.

Автор выражает глубокую признательность профессору И.В. Вовку и академику В.Т. Гринченко за помощь в постановке задачи и участие в обсуждении полученных результатов.

1. Tomboulides A. G., Orszag S. A., Karniadakis G. E. Direct and large eddy simulations of axisymmetric wakes // AIAA Paper 93-0546, 1993
2. Taneda S. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan.– 1956.– **11**.– P. 1104–1108.
3. Magarvey R. H., Bishop R. L. Transition ranges for three-dimensional wakes // Can. J. Phys.– 1961.– **39**.– P. 1418–1422.
4. Magarvey R. H., Bishop R. L. Wakes in liquid-liquid systems // Phys. Fluids.– 1961.– **4**.– P. 800–805.
5. Nakamura I. Steady wake behind a sphere // Phys. Fluids.– 1976.– **19**.– P. 5–8.
6. Wu J. S., Faeth G. M. Sphere wakes in still surroundings at intermediate Reynolds numbers // AIAA J.– 1993.– **31**.– P. 1448–1455.
7. Natarajan R., Acrivos A. The instability of the steady flow past spheres and disks // J. Fluid Mech.– 1993.– **254**.– P. 323–344.
8. Johnson T. A., Patel V. C. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // J. Fluid Mech.– 1999.– **378**.– P. 19–70.
9. Tomboulides A. G., Orszag S. A. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere // J. Fluid Mech.– 2000.– **416**.– P. 45–73.
10. Ormières D., Provansal M. Transition to turbulence in the wake of a sphere // Phys. Rev. Lett.– 1999.– **83**.– P. 80–83.
11. Sakamoto H., Haniu H. The formation mechanism and shedding frequency of vortices from a sphere in a uniform shear flow // J. Fluid Mech.– 1995.– **287**.– P. 151–171.
12. Chrust M., Goujon-Durand S., Wesfreid J. E. Loss of a fixed plane of symmetry in the wake of a sphere // J. Fluids Struct. – In press, Available online 28 December 2012.

13. *Thompson M. C., Leweke T., Provansal M.* Kinematics and dynamics of sphere wake transition // *J. Fluids Struct.*– 2001.– **15**.– P. 575–585.
14. *Gushchin V. A., Kostomorov A. V., Matyushin P. V., Pavlyukova E. R.* Direct numerical simulation of the transitional separated fluid flows around a sphere // *Comput. Fluid Dynam. J.*– 2001.– **10**.– P. 344–349.
15. *Levi E.* Three-dimensional wakes: origin and evolution // *J. Eng. Mech.*– 1980.– **106**.– P. 659–676.
16. *Szaltys P., Chrust M., Prządka A., Goujon-Durand S., Tuckerman L. S., Wesfreid J. E.* Nonlinear evolution of instabilities behind spheres and disks // *J. Fluids Struct.*– 2012.– **28**.– P. 483–487.
17. *Ploumhans P., Winckelmans G. S., Salmon J. K., Leonard A., Warren M. S.* Vortex methods for direct numerical simulation of three-dimensional bluff body flows: application to the sphere at $Re = 300, 500$ and 1000 // *J. Comput. Phys.*– 2002.– **178**.– P. 427–463.
18. *Mittal R.* A Fourier-Chebyshev spectral collocation method for simulating flow past sphere and spheroids // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*– 1999.– **30**.– P. 921–937.
19. *Mittal R.* Planar symmetry in the unsteady wake of a sphere // *J. AIAA.*– 1999.– **37**.– P. 388–390.
20. *Mittal R., Najjar F. M.* Vortex dynamics in the sphere wake // *AIAA Paper 99-3806*, 1999
21. *Kiya M., Ishikawa H., Sakamoto H.* Near-wake instabilities and vortex structures of three-dimensional bluff bodies: a review // *J. Wind Eng. Indust. Aerodynam.*– 2001.– **89**.– P. 1219–1232.
22. *Ghidersa B., Dusek J.* Breaking of axisymmetry and onset of unsteadiness in the wake of a sphere // *J. Fluid Mech.*– 2000.– **423**.– P. 33–69.
23. *Sakamoto H., Haniu H.* A study of vortex shedding from spheres in uniform flow // *J. Fluids Eng.*– 1990.– **112**.– P. 386–392.
24. *Achenbach E.* Vortex Shedding from Spheres // *J. Fluid Mech.*– 1974.– **62**.– P. 209–221.
25. *Kim H. J., Durbin P. A.* Observations of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation // *Phys. Fluids.*– 1988.– **31**.– P. 3260–3265.
26. *Möller W.* Experimentelle Untersuchung zur Hydromechanik der Kugel // *Phys. Zeitschrift.*– 1938.– **39**, (2).– P. 57–80.
27. *Chomaz J. M., Bonneton P., Hopfinger E. J.* The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.*– 1993.– **254**.– P. 1–21.
28. *Jenny M., Dušek J., Bouchet G.* Instabilities and transition of a sphere falling or ascending freely in a Newtonian fluid // *J. Fluid Mech.*– 2004.– **508**.– P. 201–239.
29. *Jenny M., Bouchet G., Dušek J.* Nonvertical ascension or fall of a free sphere in a Newtonian fluid // *Phys. Fluids.*– 2003.– **15**.– P. L9–L12.
30. *Veldhuis C. H. J., Biesheuvel A.* An experimental study of the regimes of motion of spheres falling or ascending freely in a Newtonian fluid // *Int. J. Multiphase Flow.*– 2007.– **33**.– P. 1074–1087.
31. *Veldhuis C. H. J., Biesheuvel A., Lohse D.* Freely rising light solid spheres // *Int. J. Multiphase Flow.*– 2009.– **35**.– P. 312–322.
32. *Drikakis D.* Development and implementation of parallel high resolution schemes in 3D flows over bluff bodies // *Parallel Computational Fluid Dynamics '95: Implementations and Results Using Parallel Computers*, ed. A.Ecer, J.Periaux, N.Satofuka, S.Taylor.– Elsevier Science, 1995.– P. 191–198.
33. *Constantinescu G., Chapelet M., Squires K.* Turbulence Modeling Applied to Flow over a Sphere // *AIAA J.*– 2003.– **41**.– P. 1733–1742.
34. *Биркгоф Г.* Гидродинамика.– М: Изд-во иностранной литературы, 1963.– 246 с.
35. *Constantinescu G. S., Squires K. D.* Numerical investigations of flow over a sphere in the subcritical and supercritical regimes // *Phys. Fluids.*– 2004.– **16**.– P. 1449–1466.
36. *Jones D. A., Clarke D. B.* Simulation of Flow Past a Sphere using the Fluent Code // *Defence Science and Technology Organisation, Technical Report – DSTO-TR-2232 – AR-014-365*
37. *Taneda S.* Visual observations of the flow past a sphere at Reynolds numbers between 10^4 and 10^6 // *J. Fluid Mech.*– 1978.– **85**.– P. 187–192.
38. *Achenbach E.* Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.*– 1972.– **54**.– P. 565–575.
39. *Bakić V., Perić M.* Visualization of flow around sphere for reynolds numbers between 22000 and 400000 // *Thermophys. Aeromech.*– 2005.– **12**.– P. 307–315.
40. *Вовк И. В., Гринченко В. Т.* Звук, рожденный потоком.– Киев: Наукова думка, 2010.– 224 с.
41. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations // *Mon. Weather Rev.*– 1963.– **91**, N 3.– P. 99–164.
42. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *ДАН СССР.*– 1941.– **30**, N 4.– С. 299–303.
также доступно в
Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *УФН.*– 1967.– **93**.– С. 476–481.
также reprinted by
Kolmogorov A. N. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers // *Proc. Royal Soc. London.*– 1991.– **434**.– P. 9–13.
43. *Leonard A.* Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows // *Adv. Geophys.*– 1974.– **18A**.– P. 237–248.
44. <http://www.opencfd.co.uk/openfoam/>
45. *Малюга В. С.* Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения // *Прикл. гідромех.*– 2010.– **12**, N 4.– С. 45–62.
46. *Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С.* Особенности движения среды в каналах со стенозами // *Прикл. гідромех.*– 2009.– **11**, N 4.– С. 17–30.
47. *Вовк И. В., Малюга В. С.* Численное моделирование течения в канале с двумя последовательными сужениями (стенозами) // *Доповіді НАН України.*– 2010.– N 4.– С. 53–58.
48. *Вовк И. В., Малюга В. С.* Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов // *Акуст. вісник.*– 2010.– **13**, N 2.– С. 3–19.
49. *Малюга В. С.* Численный расчет акустического поля эоловых тонов // *Доповіді НАН України.*– 2011.– N 9.– С. 56–61.
50. *Bardina J., Ferziger J. H., Reynolds W. C.* Improved subgrid models for large eddy simulation // *AIAA Paper 80-1357*, 1980.

51. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // *Phys. Fluids A*.– 1991.– **3**.– P. 1760–1765.
52. Villiers, de, E. The potential of Large Eddy Simulation for the modeling of wall bounded flows. PhD Thesis.– London: Imperial College, 2006.– 351 p.
53. Vengadesan S., Nakayama A. Evaluation of LES models for flow over bluff body from engineering application perspective // *Sadhana*.– 2005.– **30**.– P. 11–20.
54. Lilly D. K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method // *Phys. Fluids A*.– 1992.– **4**.– P. 633–635.
55. Yoshizawa A., Horiuti K. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows // *J. Phys. Soc. Japan*.– 1985.– **54**.– P. 2834–2839.
56. Horiuti K. Large eddy simulation of turbulent channel flow by one-equation modelling // *J. Phys. Soc. Japan*.– 1985.– **54**.– P. 2855–2865.
57. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений.– СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.– 88 с.
58. Piomelli U., Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simulations // *Annu. Rev. Fluid Mech.*– 2002.– **34**.– P. 349–374.
59. Piomelli U. Wall-layer models for large-eddy simulations // *Prog. Aerospace Scien.*– 2008.– **44**.– P. 437–446.
60. Balaras E., Benocci C., Piomelli U. Two-layer approximate boundary conditions for large eddy simulations // *J. AIAA*.– 1996.– **34**.– P. 1111–1119.
61. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper 92-0439*, 1992
62. Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // *J. Fluid Mech.*– 1995.– **285**.– P. 69–94.
63. Kolar V. Vortex identification: New requirements and limitations // *Heat Fluid Flow*.– 2007.– **28**.– P. 638–652.
64. Jiang M., Machiraju R., Thompson D. S. Detection and Visualization of Vortices // *Visualization Handbook*, ed. C. R. Johnson, C. D. Hansen.– Academic Press, 2005.– P. 295–312.
65. Robinson S. K. Coherent motions in the turbulent boundary layer // *Ann. Rev. Fluid Mech.*– 1991.– **23**.– P. 601–639.
66. Lugt H. J. The dilemma of defining a vortex // *Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics*, ed. U. Muller, K. Roesner, B. Schmidt.– Houston: Springer, 1979.– P. 309–321.
67. Sadarjoen I. A., Post F. H., Ma B., Banks D. C., Pagendarm H.-G. Selective visualization of vortices in hydrodynamic flows // *Proceedings IEEE Visualization'98*.– IEEE, 1998.– P. 419–422.
68. Sadarjoen I. A., Post F. H. Geometric Methods for Vortex Extraction // *Proc. Joint Eurographics-IEEE TCVG Symposium on Visualization*.– IEEE, 1999.– P. 53–62.
69. Pagendarm H.-G., Henne B., Rutten M. Detecting Vortical Phenomena in Vector Data by Medium-Scale Correlation // *Proceedings IEEE Visualization'99*.– IEEE, 1999.– P. 409–412.
70. Bisset D. K., Antonia R. A., Browne L. W. B. Spatial organization of large structures in the turbulent far wake of a cylinder // *J. Fluid Mech.*– 1990.– **218**.– P. 439–461.
71. Bisset D. K., Antonia R. A., Britz D. Structure of large-scale vorticity in a turbulent far wake // *J. Fluid Mech.*– 1990.– **218**.– P. 463–482.
72. Hussain A. K. M. F., Hayakawa M. Eduction of large scale organized structure in a turbulent plane wake // *J. Fluid Mech.*– 1987.– **180**.– P. 193–229.
73. Strawn R. C., Kenwright D. N., Ahmad J. Computer visualization of vortex wake systems // *AIAA J.*– 1999.– **37**.– P. 511–512.
74. Chong M. S., Perry A. E., Cantwell B. J. A general classification of three-dimensional flow fields // *Phys. Fluids A*.– 1990.– **2**.– P. 765–777.
75. Hunt J. C. R., Wray A. A., Moin P. Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows // *Center For Turbulence Research Report CTR-S88*, 1988, p. 193–208.
76. Meleshko V. V., Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a finite cylinder // *Proc. R. Soc. Lond. A*.– 2000.– **456**.– P. 1741–1758.
77. Clift R., Grace J. R., Weber M. E. Bubbles, Drops and Particles.– New York: Academic Press, 1978.– 380 p.
78. Tabata M., Itakura K. A precise computation of drag coefficients of a sphere // *Int. J. Comput. Fluid Dynam.*– 1998.– **9**.– P. 303–311.
79. Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R. A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers // *J. Atmos. Sci.*– 1970.– **27**.– P. 308–315.
80. Shirayama S. Flow past a sphere: Topological transitions of the vorticity field // *AIAA J.*– 1992.– **30**.– P. 349–358.
81. Roos F. W., Willmarth W. W. Some experimental results on sphere and disk drag // *AIAA J.*– 1971.– **9**.– P. 285–291.
82. Giacobello M. Wake structure of a transversely rotating sphere at moderate Reynolds numbers. PhD Thesis.– Melbourne: University of Melbourne, Department of Mechanical Engineering, 2005.– 306 p.
83. Kim D., Choi H. Laminar flow past a sphere rotating in the streamwise direction // *J. Fluid Mech.*– 2002.– **461**.– P. 365–386.
84. Constantinescu G. S., Squires K. D. LES and DES investigation of turbulent flow over a sphere // *AIAA Paper 2000-0540*, 2000
85. Yun G., Kim D., Choi H. Vortical structures behind a sphere at subcritical Reynolds numbers // *Phys. Fluids*.– 2006.– **18**.– P. 015102–015102-14.
86. Poon E. K. W., Iaccarino G., Ooi A. S. H., Giacobello M. Numerical studies of high Reynolds number flow past a stationary and rotating sphere // *Seventh International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries CSIRO*.– Melbourne, Australia, 2009.– P. 1–7.
87. Rodriguez I., Lehmkuhl O., Borrell R., Oliva A. Flow dynamics in the turbulent wake of a sphere at subcritical Reynolds numbers // *Computers Fluids*.– 2013.– **80**.– P. 233–243.