

УДК 534.131.2

# ДИНАМИЧЕСКОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ЕЕ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ КАВИТАЦИИ

А. В. ШЕПТИЛЕВСКИЙ<sup>1</sup>, И. Т. СЕЛЕЗОВ<sup>2</sup>, В. М. КОСЕНКОВ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Николаевский Национальный аграрный университет,

<sup>2</sup>Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,

<sup>3</sup>Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев  
shipa76@mail.ru

Получено 11.07.2011

В рамках внутренней задачи гидроупругости, описывающей динамику системы пузырек–жидкость–оболочка, разработан алгоритм взаимодействия упругой сферической оболочки с заполняющей ее сжимаемой жидкостью. В сферической системе координат динамика оболочки описывается уравнениями движения в постановке Кирхгофа–Лява, состояние газа в полости определяется уравнением баланса энергии, движение жидкости – волновым уравнением. Проанализированы случаи безотрывного движения системы жидкость–поверхность оболочки и случай отрыва жидкости с образованием кавитационной полости. Задача рассмотрена в трехмерной постановке.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** гидроупругость, пузырек, упругая оболочка, сжимаемая жидкость, контактное взаимодействие, сферическая волна, отрыв жидкости

В рамках внутрішньої задачі гідропружності, що описує динаміку системи бульбашка–рідина–оболонка, розроблено алгоритм взаємодії пружної сферичної оболонки з стискаємою рідиною, що її заповнює. В сферичній системі координат динаміку оболонки описують рівняння руху в постановці Кірхгофа–Лява, стан газу в порожнині визначається рівнянням балансу енергії, рух рідини – хвильовим рівнянням. Розглянуто випадки безвідривного руху системи рідина–поверхня оболонки та випадок відриву рідини та утворення кавітаційної порожнини. Задачу розглянуто в тривимірній постановці.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** гідропружність, бульбашка, пружна оболонка, стискаєма рідина, контактна взаємодія, сферична хвиля, відрив рідини

Within the framework of internal task of hydroelasticity, describing the dynamics of the system bubble-liquid-shell, an algorithm for the interaction of an elastic spherical shell with a filling of a compressible fluid. The dynamics of the shell is described by the equations of motion in the formulation of the Kirchhoff-Love, the state of gas in the cavity defined by the equation of energy balance for the fluid wave equation is used. The cases of nonseparated motion of the liquid-surface of the shell and the case of the separation of the liquid to form a cavity. The problem is considered in the three-dimensional formulation.

**KEY WORDS:** hydroelasticity, bubble, elastic shell, compressible fluid

## ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие жидкости с упругой поверхностью встречается очень часто в различных областях науки и техники. При рассмотрении взаимодействия жидкости с твердой поверхностью важную роль играет подвижность границы. Для классических контактных задач вводятся ограничения, которые состоят из таких условий: не проникания, равенства усилий на границе, закона поверхностного трения, граничные условия теплопередачи, условия электромагнитного взаимодействия и т. п. [3, 14].

В процессе взаимодействия жидкости с поверхностью твердого тела можно выделить два основных случая – это безотрывное движение системы и

движение с отрывом жидкости от твердой поверхности. Отрыв жидкости и появление при этом кавитационной полости может возникать при интенсивных динамических нагрузках на поверхность раздела как со стороны жидкости, так и со стороны твердой поверхности. Отрыв жидкости может возникать, например, при гидравлическом ударе либо ударе твердого тела по поверхности жидкости и т. п. [2, 11, 14].

Объектом исследования в данной работе является динамическое контактное взаимодействие сферической оболочки с заполняющей ее идеальной жидкостью с учетом образования кавитационной полости на границе их раздела.

Цель данной работы – разработка алгоритма расчета взаимодействия упругой сферической оболочки с заполняющей ее жидкостью с учетом

образования кавитационной полости между оболочкой и жидкостью.

Задачи исследования:

- Разработать математическую модель взаимодействия оболочки с жидкостью.
- Разработать алгоритм решения поставленной задачи.
- Выполнить тестирование алгоритма контактного взаимодействия жидкости и оболочки с учетом их отрыва.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

При построении математической модели для описания колебаний оболочки были использованы гипотезы Кирхгофа–Лява [8]. Эти предположения позволили рассматривать перемещения в каждой точке оболочки, а также определить напряжения ( $\sigma_{ij}$ ) через перемещения срединной поверхности. Оболочка считалась тонкой, однако учитывались моментные составляющие для возможности рассмотрения различных способов закрепления оболочки. Материал оболочки абсолютно упругий.

Жидкость предполагалась идеальной, сжимаемой, а форма пузырька – сферической в процессе его пульсаций. Учитывались кавитационные явления, возникающие в жидкости.

Для построения математической модели использовалась сферическая система координат с началом в центре сферы. Тогда любая точка системы будет иметь координаты  $M(\theta; \varphi; r)$ . Так как рассматривается срединная поверхность оболочки, то положение точек на ней определяется географическими координатными углами:  $\theta$  – вдоль меридиана,  $\varphi$  – вдоль широты (см. рис.1).

Математическая модель состоит из трех основных систем уравнений: газовой полости, жидкости и оболочки. Связь между ними осуществляется с помощью условий на контактных границах.

Пульсация газовой полости определяется уравнением баланса энергии. Выбор этого уравнения обусловлен тем, что один из способов выведения системы из состояния равновесия состоит во введении энергии в газовую полость [7]:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} (P_b \cdot V_b) + P_b \frac{dV_b}{dt} = N(t), \quad (1)$$

где  $V_b = \frac{4}{3}\pi R_b^3$  – объем пузырька;  $R_b$  – радиус пузырька;  $P_b$  – давление в пузырьке;  $\gamma$  – показатель адиабаты газа в пузырьке;  $N(t)$  – мощность вводимой в полость энергии.

Динамика жидкости определяется волновым уравнением в сферической системе координат в трёхмерной постановке [10, 13]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right], \quad (2)$$

где  $f$  – потенциал скорости жидкости;  $c$  – скорость звука в невозмущенной жидкости.

Давление в жидкости определяется интегралом Коши–Лагранжа:

$$P_f = P_0 - \rho_f \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $P_f$  – давление жидкости;  $P_0$  – начальное давление системы;  $\rho_f$  – плотность жидкости.

Предполагается, что жидкость находится в состоянии кавитации, если давление в ней меньше или равно давлению насыщенного пара ( $P_{cond}$ ):

$$P_f = \begin{cases} P_f & \text{при } P_f > P_{cond}, \\ P_{cond} & \text{при } P_f \leq P_{cond}. \end{cases} \quad (4)$$

Динамика оболочки описывается системой уравнений движения в приближении Кирхгофа–Лява. Перемещения и углы поворота выражаются через усилия и моменты [5]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} + (T_{11} - T_{22}) \operatorname{ctg} \theta + Q_1 + R_{q1} = \rho R h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} + 2T_{12} \operatorname{ctg} \theta + Q_2 + R_{q2} = \rho R h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + Q_1 \operatorname{ctg} \theta - T_{11} - T_{22} + R_{q3} = \rho R h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + (M_{11} - M_{22}) \operatorname{ctg} \theta = Q_1 R + \frac{\rho h^3 R}{12} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + 2M_{12} \operatorname{ctg} \theta = Q_2 R + \frac{\rho h^3 R}{12} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2}, \quad (9)$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $q_i$  – составляющие суммарного давления на поверхность оболочки;  $\rho$  – плотность оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $u, v, w$  – компоненты перемещения срединной поверхности в направлениях  $\theta, \varphi$  и  $r$  соответственно;  $\theta^*, \varphi^*$  – углы поворота срединной поверхности вдоль соответствующих координатных линий;  $T_{11}, T_{22}, T_{12} = T_{21}$  – силы, действующие на единицу длины дуги соответствующей площадки;  $M_{11}, M_{22}, M_{12} = M_{21}$  – моменты срединной поверхности, где индексами обозначены направления  $\theta$  и  $\varphi$  соответственно;  $Q_1, Q_2$  – перерезывающие силы.

Система дополнена физическими и геометрическими соотношениями, которые определены через перемещения и повороты оболочки (индексом "3" в формулах обозначено направление, нормальное срединной поверхности) [5].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \theta + w \right), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{ctg} \theta \right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} \right), \\ \chi_{11} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta^*}{\partial \theta}, \\ \chi_{22} &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varphi} + \theta^* \operatorname{ctg} \theta \right), \\ \chi_{12} &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi} - \varphi^* \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \\ T_{11} &= \frac{Eh}{1-v^2} (\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22}), \\ T_{22} &= \frac{Eh}{1-v^2} (\varepsilon_{22} + v\varepsilon_{11}), \\ T_{12} &= \frac{Eh}{1+v} \varepsilon_{12}, \\ M_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} (\chi_{11} + v\chi_{22}), \\ M_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} (\chi_{22} + v\chi_{11}), \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1+v)} \chi_{12}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$Q_2 = \frac{Eh}{1+v} \varepsilon_{23}.$$

В начальный момент времени система находилась в состоянии статического равновесия:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad P_f = P_b = P_0, \quad q_i = 0, \\ \varepsilon_{ij} = 0, \quad \chi_{ij} = 0, \quad T_{ij} = 0, \quad M_{ij} = 0, \\ u = v = w = \theta^* = \varphi^* = 0, \\ R_b = R_0, \quad N(t) = 0, \quad f = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из состояния равновесия система выводилась путем ввода энергии в пузырёк.

Система уравнений (1), (2), (4)–(9) дополнена условиями на контактных границах. На границе пузырька выполняется условие:

$$\frac{dR_b}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad P_b = P^*, \quad (12)$$

где  $P^*$  – давление на границе с пузырьком.

Для определения кавитационного отрыва жидкости от оболочки вводим функцию  $l = l(\theta; \varphi; t)$ , определяющую расстояние между поверхностями жидкости и оболочки (толщину кавитационной полости), тогда

$$M(\theta; \varphi) l = l(\theta; \varphi; t),$$

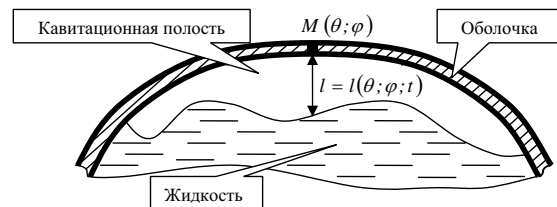


Рис. 1. Схема толщины полости

Для случая  $l = 0$ , то есть при отсутствии отрыва жидкости, граничные условия имеют вид:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad q_3 = P^{**} - P_0, \quad (13)$$

где  $P^{**}$  – давление на границе с оболочкой.

При  $l > 0$ , то есть при возникновении отрыва жидкости от оболочки, на границе жидкости с оболочкой возникает зона разрежения, давление в которой равно давлению насыщенного пара:  $P^{**} = P_{cond}$ , тогда

$$q_3 = P_{cond} - P_0. \quad (14)$$

Радиальное перемещение оболочки определяем при известном давлении на границе из уравнения (7), а потенциал жидкости на границе – из уравнения давления жидкости (3).

Для контроля выполнения гипотезы об упругих деформациях оболочки использовали условие Губера–Мизеса [4, 15]:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \leq \frac{2}{3}\sigma_T^2, \tag{15}$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала оболочки.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Уравнения математической модели (1)–(14) решали с помощью численных методов. Непрерывную в пространстве и времени область решения системы уравнений заменяли дискретной. Дифференциальные уравнения дискретизировали в пространстве и во времени по методу конечных разностей [12, 16]. Для решения полученной алгебраической системы уравнений применяли явные численные методы с использованием рекуррентных по времени формул.

Решение уравнения (1) выполняли по двухслойному по времени методу Эйлера–Коши [9]. Для решения системы (4)–(8), описывающей движение оболочки, применяли трехслойную по времени схему “крест” [6]. Дискретизацию уравнений оболочки выполняли по пространственному шаблону, приведенному на рис. 2. В узловых точках шаблона определяли кинематические характеристики (перемещения и углы поворота), а в промежуточных – силовые (мембранные силы, перерезывающие силы, моменты).

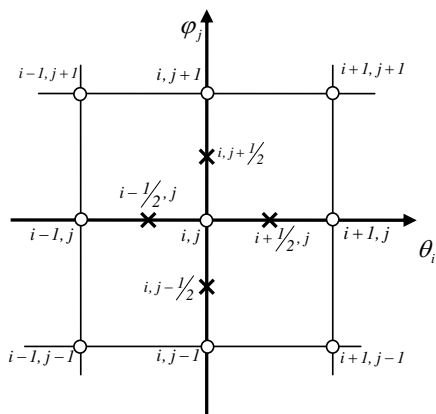


Рис. 2. Схема шаблона для дискретизации системы уравнений движения оболочки

Дискретизацию волнового уравнения выполняли с использованием шаблона, показанного на рис. 3. В его узловых точках определяются потенциалы и давления, а в промежуточных – компоненты вектора скорости жидкости.

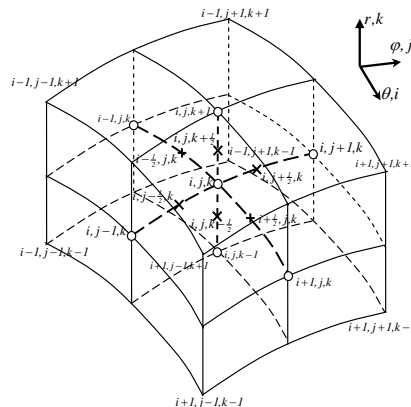


Рис. 3. Схема шаблона для дискретизации волнового уравнения

Узлы на контактной границе в жидкости совпадают с узловыми точками сетки оболочки.

На рис. 4 представлена блок-схема алгоритма взаимодействия жидкости и оболочки и далее приведено его описание.

1. Определяем перемещения из условия равенства нулю давления на границе.

- Задаем давление на границе жидкости и оболочки, равное нулю:  $P_{ijn_k}^{n+1} = 0$ ,  $q_{ij}^{n+1} = -P_0$
- Находим потенциал  $f_{ijn_k}^{n+1}$  из уравнения (3) после его дискретизации,  $P_{ijn_k}^{n+1} = P_0 - \rho_f \frac{f_{ijn_k}^{n+1} - f_{ijn_k}^n}{\Delta t}$ , при условии равенства нулю давления на границе. Получим:  $f_{ijn_k}^{n+1} = \frac{P_0 \Delta t}{\rho_f} + f_{ijn_k}^n$
- Определяем скорости радиального перемещения границы жидкости:  $V_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2\Delta r} (f_{ijn_k}^{n+1} - f_{ijn_k-1}^{n+1} + f_{ijn_k}^n - f_{ijn_k-1}^n)$ .
- Находим перемещение границы жидкости по формуле трапеции:  $w_{fij}^{n+1} = \int_{t_1}^{t_2} V dt = \frac{\Delta t}{2} (V_{ij}^{n+1} + V_{ij}^n) + \sum_{p=1}^n w_{fij}^p$ .
- Из уравнения (7) находим перемещение оболочки  $w_{ij}^{n+1}$  при условии равенства давления нулю на границе.

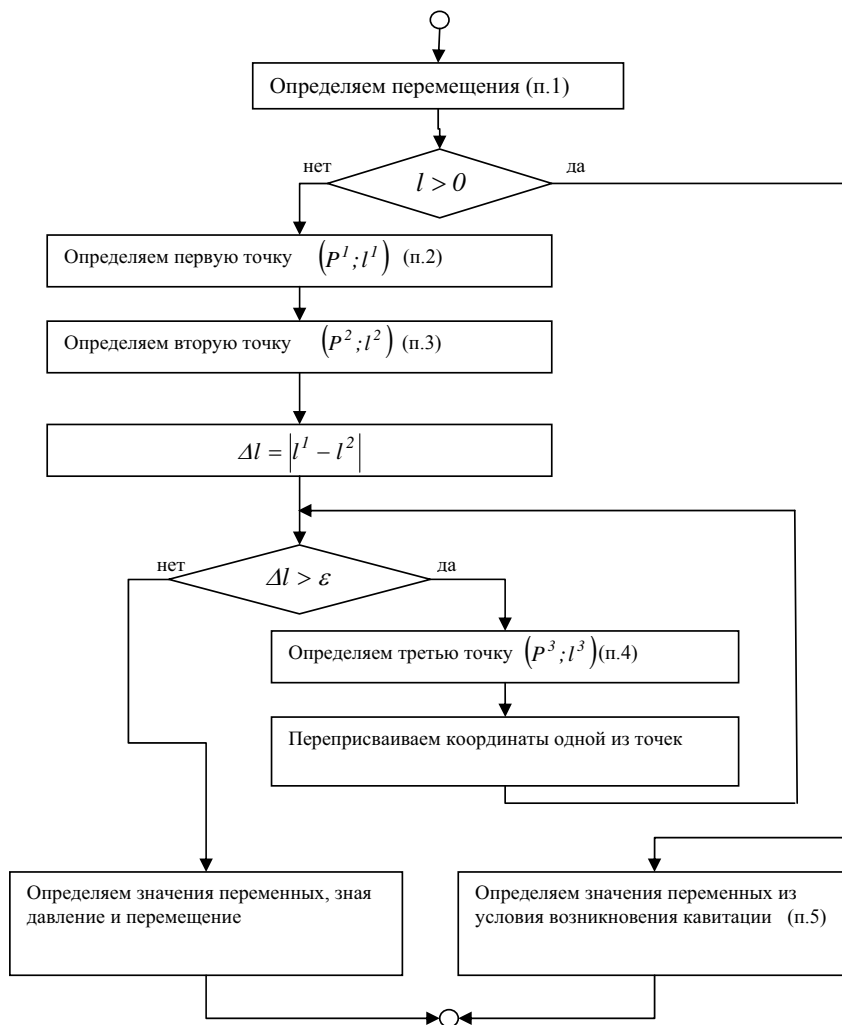


Рис. 4. Блок-схема алгоритма взаимодействия жидкости с оболочкой

- Определяем разность перемещений границ оболочки и жидкости:  $l = w_{ij}^{n+1} - w_{fij}^{n+1}$ .
- 2. Определяем толщину кавитационной полости в первой точке.
  - Задаем давление, равное начальному:  $P^1 = P_{ijn_k}^{n+1} = P_0$ .
  - Находим потенциал  $f_{ijn_k}^{n+1}$  из уравнения (3) после его дискретизации,  $P_{ijn_k}^{n+1} = P_0 - \rho_f \frac{f_{ijn_k}^{n+1} - f_{ijn_k}^n}{\Delta t}$ , при условии, что давление на границе жидкости и оболочки равно начальному давлению, получим:  $f_{ijn_k}^{n+1} = \frac{(P_0 - P_{ijn_k}^{n+1}) \Delta t}{\rho_f} + f_{ijn_k}^n$ .
- Определяем скорости перемещения границы жидкости:  $V_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2\Delta r} (f_{ijn_k}^{n+1} - f_{ijn_k-1}^{n+1} + f_{ijn_k}^n - f_{ijn_k-1}^n)$ .
- Находим перемещение границы жидкости по формуле трапеции:  $w_{fij}^{n+1} = \int_{t_1}^{t_2} V dt = \frac{\Delta t}{2} (V_{ij}^{n+1} + V_{ij}^n) + \sum_{p=1}^n w_{fij}^p$ .
- Находим перемещение оболочки  $w_{ij}^{n+1}$  при заданном давлении из уравнения (7).
- Находим разность перемещений:  $l^1 = w_{ij}^{n+1} - w_{fij}^{n+1}$ .
- 3. Определяем толщину кавитационной полости во второй точке.

• Задаем давление, равное:  $P^2 = P_{ijn_k}^{n+1} = 2P_0$ .

• Находим потенциал  $f_{ijn_k}^{n+1}$  из уравнения (3) после его дискретизации,

$$P_{ijn_k}^{n+1} = P_0 - \rho_f \frac{f_{ijn_k}^{n+1} - f_{ijn_k}^n}{\Delta t}, \text{ получим:}$$

$$f_{ijn_k}^{n+1} = \frac{(P_0 - P_{ijn_k}^{n+1}) \Delta t}{\rho_f} + f_{ijn_k}^n.$$

• Определяем скорости перемещения границы жидкости:

$$V_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2\Delta r} (f_{ijn_k}^{n+1} - f_{ijn_k-1}^{n+1} + f_{ijn_k}^n - f_{ijn_k-1}^n).$$

• Находим перемещение границы жидкости по формуле трапеции:

$$w_{fij}^{n+1} = \int_{t_1}^{t_2} V dt = \frac{\Delta t}{2} (V_{ij}^{n+1} + V_{ij}^n) + \sum_{p=1}^n w_{fij}^p.$$

• Находим перемещение оболочки  $w_{ij}^{n+1}$  при заданном давлении из уравнения (7).

• Находим разность перемещений (толщину кавитационной полости)  $l^2 = w_{ij}^{n+1} - w_{fij}^{n+1}$ .

4. Определяем толщину кавитационной полости по методу секущих.

• Рассматриваем две точки  $(P^1; l^1)$ ,  $(P^2; l^2)$  и составляем уравнение прямой, проходящей через две точки:  $\frac{l - l^1}{l^2 - l^1} = \frac{P - P^1}{P^2 - P^1}$ , откуда определяем разность перемещений (толщину кавитационной полости):

$$l = \frac{l^2 - l^1}{P^2 - P^1} P - \frac{l^2 - l^1}{P^2 - P^1} P^1 + l^1.$$

• Приравниваем функцию к нулю и определяем давление:  $\frac{l^2 - l^1}{P^2 - P^1} P - \frac{l^2 - l^1}{P^2 - P^1} P^1 + l^1 = 0$ ,  $P = P^1 - \frac{P^2 - P^1}{l^2 - l^1} l^1$ , фактически это  $P^3$ .

• Определяем разность перемещений, как в пункте 2 при известном давлении. Получаем точку  $(P^3; l^3)$ .

5. Определяем значения переменных при условии возникновения кавитации на границе жидкости и оболочки:

•  $P_{ijn_k}^{n+1} = 0, \quad q_{ij}^{n+1} = -P_0.$

•  $f_{ijn_k}^{n+1} = \frac{P_0 \Delta t}{\rho_f} + f_{ijn_k}^n.$

• Находим перемещение оболочки  $w_{ij}^{n+1}$  при условии равенства давления на границе нулю из уравнения (7).

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

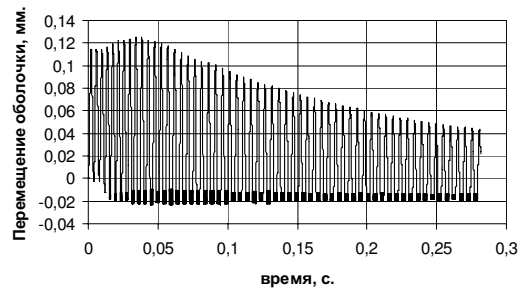


Рис. 5. Радиальные перемещения срединной поверхности незакрепленной оболочки после введения энергии в пузырек

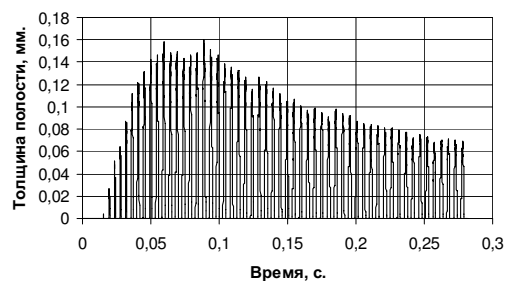


Рис. 6. Толщина полости, возникающей между поверхностями незакрепленной оболочки и жидкости при их движении, при введении энергии в пузырек

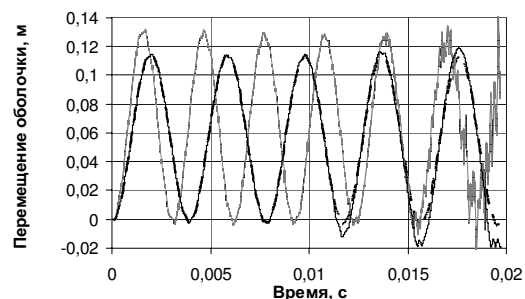


Рис. 7. Радиальные перемещения оболочки с использованием разработанного алгоритма (сплошная линия) с учетом образования кавитационной полости, без учета (штриховая линия) и при использовании упрощенного алгоритма (тонкая сплошная линия)

При введении в пузырек радиусом 5 см энергии 0.7 кДж, при начальном давлении 0.1 МПа, система начинает совершать колебательные движения, амплитуда которых затухает со временем (рис. 5). Динамическое контактное взаимодействие жидко-

сти и сферической оболочки рассчитывалось по разработанному алгоритму (рис. 4).

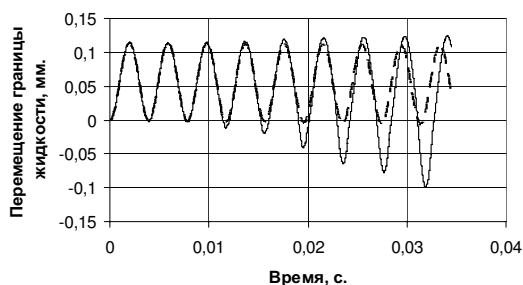


Рис. 8. Перемещение поверхности жидкости при учете образования полости (сплошная линия) и без учета образования полости (штриховая линия)

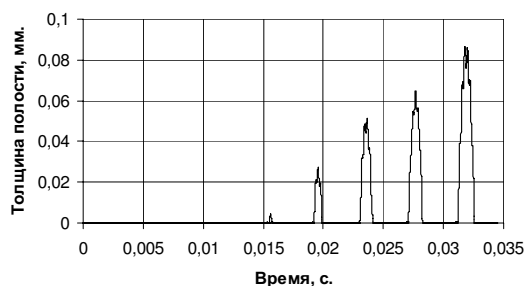


Рис. 9. Толщина кавитационной полости, образующейся на границе жидкости и оболочки при возникновении отрыва

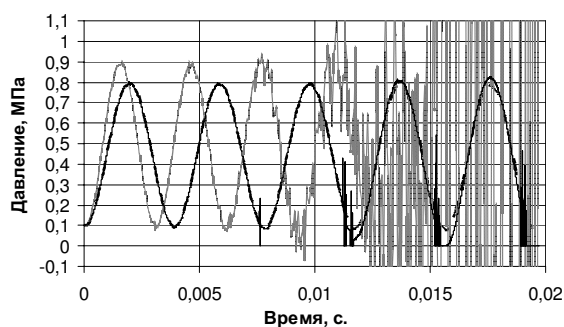


Рис. 10. Давление на границе жидкости и оболочки при учете образования полости (сплошная линия), без учета образования полости (штриховая линия) и при условиях контактного взаимодействия (тонкая сплошная линия)

На рис. 5–13 показаны результаты моделирования начальных периодов колебаний незакрепленной оболочки, жидкости и пульсации пузырька

в результате ввода в пузырек энергии 0,7 кДж. Для случая свободной (незакрепленной) стальной оболочки радиусом 0,3 м, толщиной 1 мм, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью (водой), движения системы являются центрально симметричными, и для рассмотрения ее динамики достаточно исследовать изменения переменных в одной из точек срединной поверхности оболочки.

В процессе колебаний оболочки (рис. 5) и жидко-

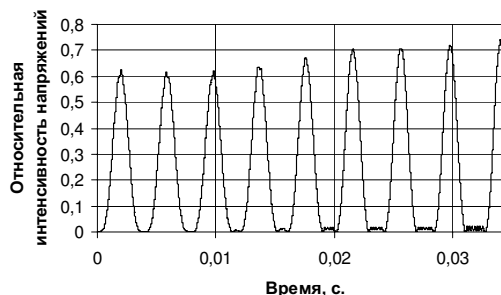


Рис. 11. Относительная интенсивность напряжений в оболочке

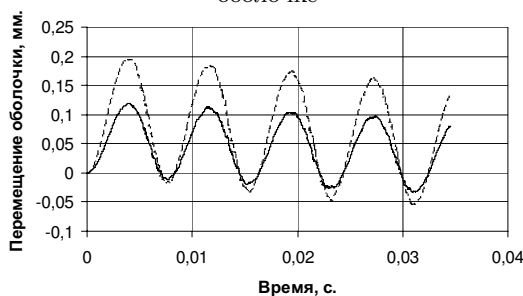


Рис. 12. Динамика движения срединной поверхности оболочки:

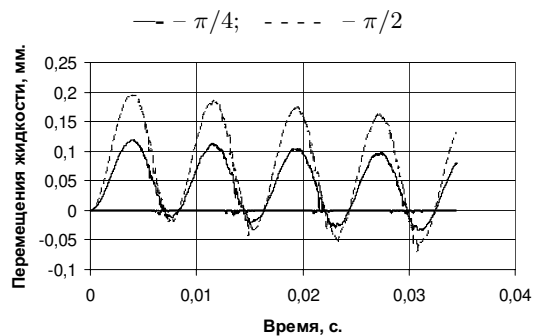


Рис. 13. Динамика движения поверхности жидкости: — — 0; - - - -  $\pi/4$

сти в некоторые моменты времени на их границе происходит образование кавитационной полости, толщина которой со временем стремится к нулю (рис. 6). Положительные перемещения

оболочки близки к синусоидальным с малыми высокочастотными составляющими (рис. 7, сплошная линия), которые возникают в результате волновых процессов в жидкости и существенно не влияют на общую динамику оболочки. В

нищ жидкости и оболочки совпадают (рис. 8). Большие отрицательные перемещения жидкости и оболочки отличаются в результате их отрыва и образования между ними кавитационной полости (рис. 9).

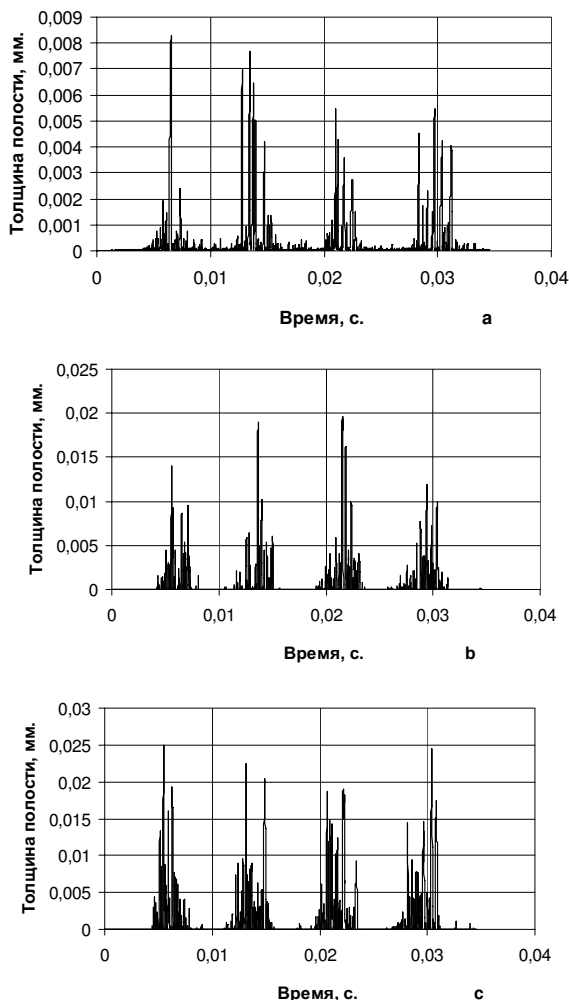


Рис. 14. Динамика образования полости в различных точках меридиана:  
 а – в точке 0 рад, б – в точке  $\pi/4$  рад, в – в точке  $\pi/2$  рад

области отрицательных перемещений оболочки, когда возникает ее отрыв от жидкости, также присутствуют высокочастотные составляющие, которые вызваны постоянным давлением на внешнюю поверхность оболочки (0.1 МПа) и силами ее упругости. После замыкания кавитационной полости колебания оболочки остаются гладкими без явно выраженных высокочастотных составляющих.

В области положительных перемещений гра-

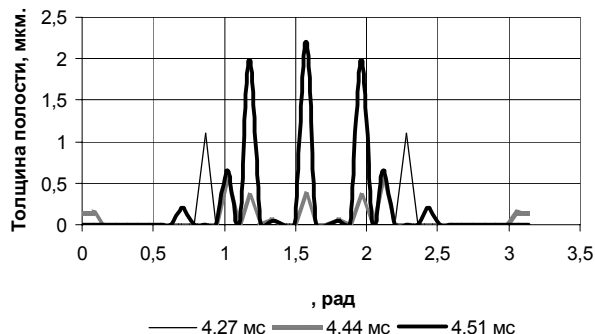


Рис. 15. Начальная стадия возникновения полости на границе жидкости и оболочки

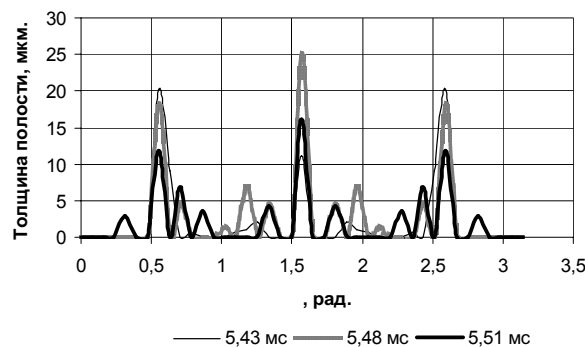


Рис. 16. Динамика полости в интервале времени, когда ее толщина достигает максимальной амплитуды

После образования кавитационной полости давление на границе жидкости и оболочки становится равным давлению насыщенных паров жидкости, которое принимали равным нулю (рис. 10). Перед образованием полости и падением давления до нуля появляются всплески давления на границе, время возникновения которых совпадает с большими отрицательными перемещениями оболочки.

Выполнено сравнение разработанного алгоритма расчета контактного взаимодействия жидкости и оболочки с его модификацией и упрощенным алгоритмом.

Этот алгоритм состоит из последовательности шагов, при выполнении которых использовали условия контактного взаимодействия (13). На пер-



вом шаге по давлению жидкости на оболочку вычисляли ее перемещение и скорость. На втором – по скорости оболочки вычисляли потенциал скорости жидкости. На третьем – по потенциалу вычисляли давление на оболочку.

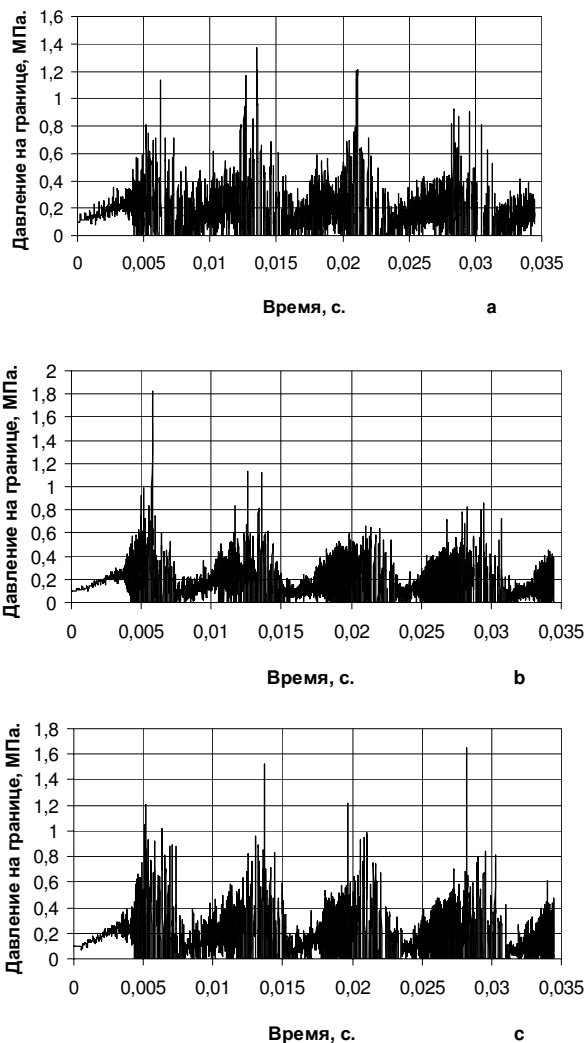


Рис. 17. Давление на границе жидкости и оболочки: а – в точке 0 рад, б – в точке  $\pi/4$  рад, в – в точке  $\pi/2$  рад

Процедуру вычисления перемещения оболочки и давления на неё жидкости на каждом новом временном слое повторяли. Результаты, полученные при вычислении по упрощенному алгоритму, представлены на рис. 7 и 10 тонкой линией. Применение упрощенного алгоритма приводит к уменьшению периода колебаний оболочки на 25% и увеличению амплитуды ее колебаний на 15% по сравнению с предлагаемым алгоритмом (рис. 4). Для этого алгоритма характерна вычислительная неу-

стойчивость, которая возникает в момент формирования отрыва жидкости от оболочки и в дальнейшем препятствует выполнению расчета из-за неограниченного возрастания давления жидкости и скорости оболочки.

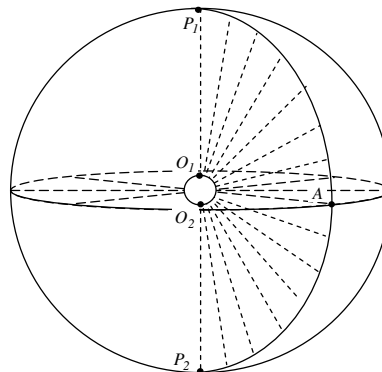


Рис. 18. Схема визуализации распространения волн в жидкости

Модификация разработанного алгоритма состояла в исключении его ветвления в зависимости от знака  $l$ . Вычисления всегда выполняли по той части алгоритма, которая не учитывает возникновения отрыва жидкости от оболочки (пункты 2-4 алгоритма), когда  $l$  меньше или равно нулю. В этом случае кавитационная полость не могла появиться, поэтому движение жидкости и оболочки было безотрывным, как и в случае упрощенного алгоритма. Однако, в отличие от упрощенного алгоритма, модифицированный алгоритм даёт результаты, не отличающиеся от разработанного алгоритма, пока не возникает отрыв жидкости от оболочки (рис. 7, 8, 10 – штриховая линия). Устойчивость этого алгоритма на порядок выше, чем упрощенного, но также возникает после двух десятков периодов колебаний оболочки.

В результате сравнения различных вариантов учета взаимодействия жидкости и оболочки в рамках рассмотренной центрально симметричной задачи можно сделать вывод, что возникновение вычислительной неустойчивости при рассмотрении контактного взаимодействия связано с возникновением отрыва и предложенный алгоритм позволяет учесть возникновение кавитационной полости на границе жидкости и оболочки, а также стабилизировать вычислительный процесс.

Поскольку данная задача рассматривается в рамках упругих деформаций, на рис. 11 представлено отношение интенсивности напряжений к их предельному значению, соответствующему преде-

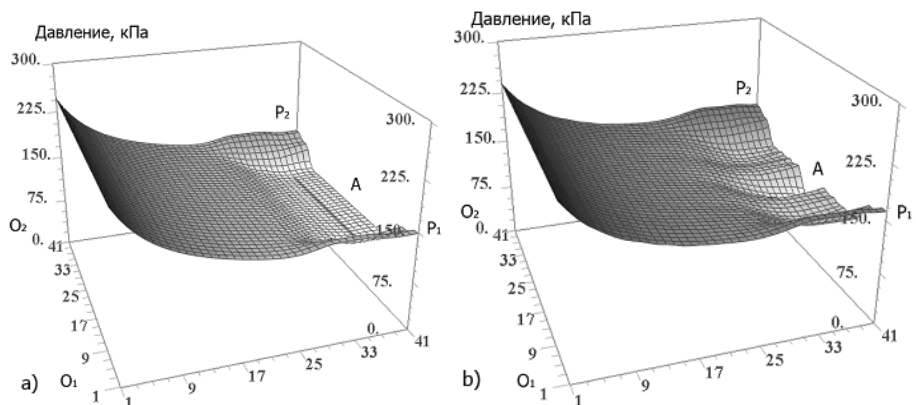


Рис. 19. Поля давления от начала распространения волны от пузырька к оболочке:  
 $a - t=0.25$  мс,  $b - t=0.6$  мс

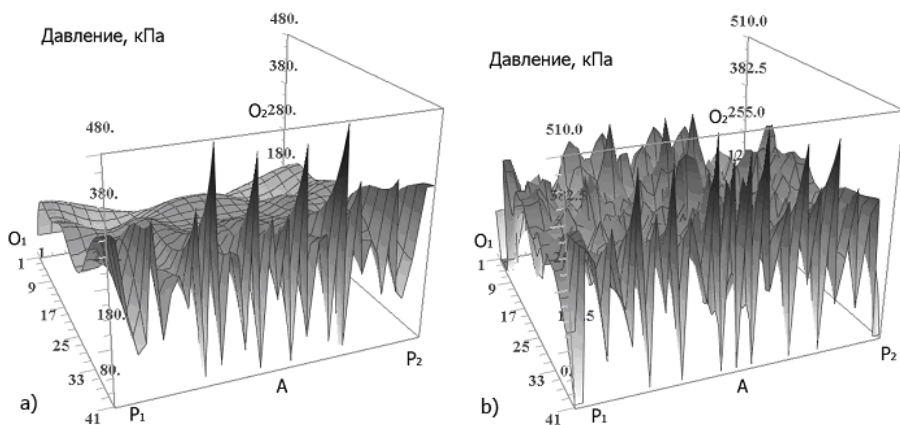


Рис. 20. Поля давления от начала возникновения отрыва жидкости:  
 $a - t=4.13$  мс,  $b - t=4.51$  мс

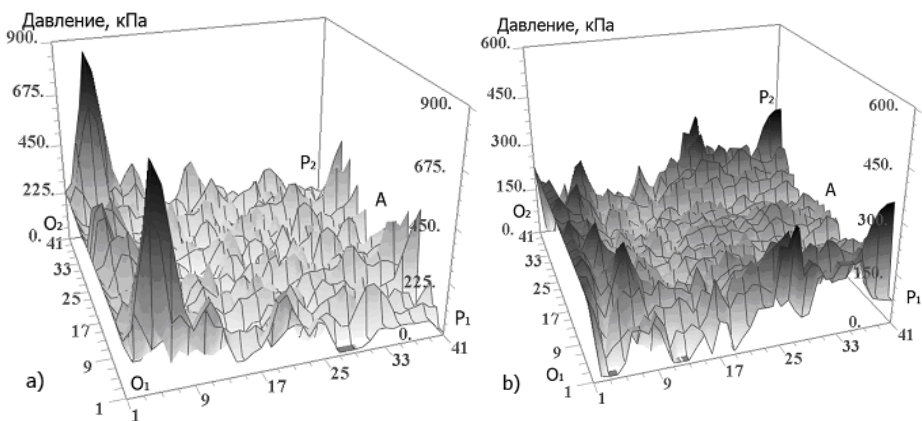


Рис. 21. Поля давления жидкости при максимальном сжатии оболочки:  
 $a - t=7$  мс,  $b - t=8.3$  мс

лу текучести материала оболочки, которое меньше единицы, что свидетельствует об упругих деформациях оболочки.

В результате жесткого закрепления оболочки в полюсах колебания системы становятся осесимметричными. На рис. 12 представлены зависимости перемещения оболочки от времени для двух точек меридиана ( $\pi/4$  и  $\pi/2$ ). Так как движение системы симметрично относительно плоскости экватора, то представлены только зависимости для Северного полушария. Наибольшей амплитуды перемещения достигают в точке, лежащей на экваторе ( $\pi/2$ ), так как она наиболее удалена от закрепленных полюсов.

Перемещения поверхности жидкости (рис. 13) соответствуют перемещениям оболочки. Вблизи полюсов перемещения жидкости принимают отрицательные значения, характеризующие её отрыв от оболочки в результате смены интенсивной (в результате фокусировки) волны давления волной разрежения.

При взаимодействии жидкости и оболочки возникает их отрыв и происходит образование кавитационной полости (рис. 14–16). В отличие от центральной симметрии, кавитационная полость образуется и замыкается в различных точках меридиана в разные моменты времени. В один и тот же момент времени она состоит из отдельных фрагментов. Форма и размеры фрагментов полости изменяются, что подтверждается колебаниями толщины полости в разных точках поверхности оболочки (рис. 14). Первоначально полость образуется в точках, расположенных вблизи закрепленных полюсов (рис. 15). Максимальные амплитуды толщины полости наблюдались на экваторе и в точках, близких к  $\pi/4$  (рис. 16).

На рис. 17 представлены графики изменения давления в рассматриваемых точках поверхности оболочки.

Визуализация распространения волн давления в жидкости представлена на рис. 18–21 в различные моменты времени. Схема обозначения характерных точек меридиональной плоскости представлена на рис. 18. Волны давления распространяются в жидкости от пузырька к оболочке, вызывая её движение и, вследствие этого, падение давления на границе жидкости и оболочки (рис. 19, а). Вблизи неподвижных полюсов оболочки наблюдается рост давления (рис. 19, б), что вызывает распространение волны сжатия вдоль оболочки в сторону экватора, к области пониженного давления.

На рис. 20 представлено поле давлений жидкости при начальной стадии возникновения кавитационной полости. Зоны пониженного давле-

ния на границе с оболочкой соответствуют возникновению полости (рис. 15) в указанные моменты времени. Быстрые изменения положения и толщины полости в пространстве и во времени приводят к существенной пространственной неравномерности распределения давления на границе с оболочкой. Генерируемые кавитационной полостью волны разрежения распространяются по всему объему жидкости. Несмотря на кажущуюся хаотичность возникающего поля давления, из рис. 20 видно, что оно по-прежнему сохраняет симметрию относительно экваториальной плоскости.

На рис. 21, а представлены поля давления жидкости, когда перемещения оболочки достигают максимального отрицательного значения. При дальнейшем перемещении оболочки давление в жидкости уменьшается за счет волн разрежения, распространяющихся от границы оболочки. Наиболее активно, в целом, давление жидкости уменьшается на подвижной части границы оболочки (рис. 21, б), что вызывает уменьшение давления в окрестности закреплённых полюсов. При дальнейшем движении оболочки происходит общее уменьшение давления в жидкости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм взаимодействия идеальной сжимаемой жидкости с упругой сферической оболочкой при решении внутренней задачи гидроупругости. Рассмотрен процесс образования полости на границе раздела жидкости и оболочки при возникновении их отрыва и отмечено существенное ее влияние на общую динамику исследуемой системы. Необходимость учёта кавитационной полости подтверждается как в случае центральной симметрии, когда оболочка незакреплена, так и для осевой симметрии, при жестком закреплении оболочки в полюсах.

1. Бураго Н.Г., Кужуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Журнал Известия РАН, МТТ, – 2002.
2. Гавериленко В.В. Плоская симметричная задача удара тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости с учетом отрыва // Акустичний вісник. - 1998. – Том 1, № 2.– С. 34–40.
3. Гадияк Г.В., Коробицина Ж.Л. О решении одной контактной задачи жидкость–упругая пластина. Труды Международной конференции RDAMM-2001 // 2001. – Том 6, Ч. 2, Спец. выпуск.– С. 195 – 199.
4. Гольденблат И.Н., Копнов В.А. Критерий прочности и пластичности конструкционных материалов.– М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.

5. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 276 с. – (Итоги науки и техники: Механика твердых деформируемых тел. – Т. 5.)
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
7. Наугольный К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде. – М.: Наука, 1977. – 152 с.
8. Новожилко В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
9. Пирумов У.Г. Численные методы. – М.: Дрофа, 2004. – 224 с.
10. Сташкевич А.П. Акустика моря. – Л.: Судостроение, 1966. – 350 с.
11. Юдович В.И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость. // Владикавказский математический журнал. – 2005. – Том 7, Вып. 3, – С. 79–91.
12. Atkinson K., Han W. Finite Difference Method // Theor Numer. Anal, – 2009. – 39. – P. 253–275.
13. Durst Franz Fluid mechanics: an introduction to the theory of fluid flows. – Berlin: Springer, 2008, – 742 p.
14. Huang P., Zhang X., Ma S., Huang X. Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2011. – 85, No 4, – P. 498–517.
15. Lebedev A.A., Kovalchuk B.I., Giginjak F.F., Lamashevskiy V.P. Handbook of mechanical properties of structural materials at a complex stress state. – New York: Begell House, Inc., 2000. – 500 p.
16. Xi L., Cen Z., Chen J. A Second-order Finite Difference Scheme for a Type of Black-Scholes Equation // Int. J. Nonlin. Sci. – 2008. – 6, No.3, – P. 238–245.