ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2012. Том 14, N 2. С. 80 – 83 **КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ**

УДК 532.5

НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ: ОТ СОЛИТОНОВ ДО ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

В. Ю. КОРОЛЕВИЧ,* И. Т. СЕЛЕЗОВ**

**Отделение природоохранительных технологий, Лаборатория "Чалк Ривер", Агенство атомной энергии Канады, г. Чалк Ривер, Онтарио, Канада*
***Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

Получено 23.12.2011

Представлен анализ распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в жидкости переменной глубины на основе асимптотического метода многомасштабных разложений. Показано, что при некоторых неоднородностях донной поверхности задача может быть сведена к неавтономной динамической системе, которая приводится к системе Лоренца. Отсюда следует возможность перехода солитонного решения в детерминированный хаос.

Представлено аналіз розповсюдження нелінійних поверхневих гравітаційних хвиль в рідині змінної глибини на основі асимптотичного методу багатомасштабних розкладань. Показано, що при деяких неоднорідностях донної поверхні задача може бути зведена до неавтономної динамічної системи, яка приводиться до системи Лоренца. Звідси, як наслідок, випливає можливість переходу солітонного розв'язку в детермінований хаос.

Analysis of surface gravity wave propagation over a variable bottom using the asymptotical method of multiple scale expansions is presented. It is shown that under some inhomogeneous of a bottom surface the problem can be reduced to a nonautonomic dynamical system, which is reduced to the Lorenz system. It is follow from that the possibility of transition of a soliton solution to a determinate chaos.

Рассматриваются плоские квазилинейные уединенные волны. Задача характеризуется тремя малыми параметрами $k\,a$, $k\,h$ и $k\,\Delta h$. Полные двумерные уравнения могут быть приведены либо к уравнениям мелкой воды, либо сразу к аппроксимации Буссинеска известными соотношениями баланса малых параметров [1–3].

Остановим свой выбор на системах, полученных для переменной глубины Кеворкяном [4, 5], а также Ньюэллом [6] и Кникербокером [7]. Представляется любопытным исследовать параллельно также систему, полученную на основании эвристического подхода, которую приведем без вывода. Итак, соответственно, в трех случаях имеем (малые параметры устранены при обезразмеривании):

$$\left.\begin{aligned} &h_t + (uh)_x = 0, \\ &u_t + h_x + uu_x - \frac{1}{3}H_0 h_{xtt} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &h_t + (uh)_x - \frac{1}{6}h^3 u_{xxx} = 0, \\ &u_t + h_x + uu_x - \frac{1}{2}h^2 u_{xxt} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &h_t + (uh)_x = 0, \\ &u_t + h_x + uu_x - \frac{1}{3}\left(h^2 h_{xx}\right)_x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Как видно, имеется произвол в уравнении сохранения продольного импульса (если не принимать во внимание дисперсионный член в кинетических граничных условиях системы Ньюэлла (2)). Однако, как будет показано далее и как можно было заменить интуитивно по идентичности физических посылок для включения поправочных членов, конечные результаты отличаются лишь количественно. Следующим существенным моментом является определенный произвол и физических параметров, в первую очередь, отсутствие оценок критических градиентов неоднородностей и их протяженности, позволяющих использовать тот или иной тип решения, например уединенные и кноидальные волны, а также пакеты.

Рассмотрим достаточно плавные градиенты неоднородностей, что позволит пренебречь отраженными волнами (так называемыми "Slope-on" оценками), но уже не оставит у нас уверенности в регулярной эволюции амплитуды. Итак, полагаем, что из бесконечности на неоднородность набегает узкополосный пакет. Используем эффективную ширину носителя пакета в k -пространстве в качестве малого параметра ε метода многих масштабов [1,2,6]. Разлагая зависимые и независимые переменные (а в результате и дифференциальные операторы) в ряд по ε, получаем линейную систему для первого приближения и условия отсутствия резонансного отклика у следующих приближений решения:

$$\begin{aligned} &u \to \varepsilon u + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + O(\varepsilon^4),\\ &h \to h_0 + \varepsilon h + \varepsilon^2 h_1 + \varepsilon^3 h_2 + O(\varepsilon^4),\\ &x \to x + X + X_1 + X_2 + O(\varepsilon^4),\\ &t \to t + T + T_1 + T_2 + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \tag{4}$$

ε^1 :

$$\left(\frac{1}{3} H_0 \, h_0 \, \partial_{x\,x\,t\,t} + h_0 \, \partial_{x\,x} - \partial_{t\,t}\right) \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{1}{3} h_0 \, \partial_x^3 + h_0 \, \partial_x\right) \partial_x - \right.\\ &\left. - \partial_{t\,t} - \frac{1}{2} h_0^2 \, \partial_{x\,x\,t\,t}\right) \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3} h_0^3 \, \partial_x^4 + h_0 \, \partial_x^2 - \partial_{t\,t}\right) \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = 0,\\ &h_t = -h_0 \, u_x - \left\{\frac{1}{6} h_0^3 \, u_{x\,x\,x}\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь и далее член в $\{...\}$ существует только для системы типа Ньюэлла. Принимая во внимание лишь пространственную зависимость коэффициентов, отделим временную компоненту в классе бегущих волн посредством фактора $e^{-i\,\omega\,t}$. Чтобы не усложнять выкладки дополнительными асимптотическими построениями, прибегнем к точному интегрированию полученных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядка, определив класс тестовых неоднородностей.

Следуя результатам Ватсона [8] и К. Иосиды [9, 10], и Мизохаты [11] соответственно, сужаем поиск решения до класса бесселевых функций. В результате получим для неоднородности вида

$$h_0 = C x^{(2-m)}$$

решение системы (5)

$$h \approx \sqrt{x} H_\nu^{(1)}(kx), \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} &\nu = m^{-1}, \quad k = C \frac{\omega^2}{m^2} \times \\ &\times \left(1 - \frac{1}{3} H_0 \, \omega^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3} H_0^2 \, \omega\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Решение систем (6) и (7) имеет идентичный вид, однако при неоднородности системы (6) в виде

$$\begin{aligned} &h_0(x) = 4a\omega^2 / \left(b^2 - 2aCx^{(2-m)}\right),\\ &a \approx \frac{1}{6}, \quad b = 1 + \omega^2/2, \quad k^2 = Cx^{(2-m)} \end{aligned} \tag{10}$$

и при неоднородности системы (7) в неявном виде – решении следующего уравнения относительно h_0 будет:

$$\begin{aligned} &C \, x^{(m-2)} \, h^2 - \sqrt{b - 1/2\omega^2 h} + 3 = 0,\\ &k^2 = C x^{m-2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Как можно видеть, в процессе дифференцирования доминирующую роль в секулярном отклике следующих приближений будет играть член, порожденный дифференцированием экспоненты в асимптотическом представлении функции Ханкеля, и далее пользуемся приближением оператора $\partial_x \to i\theta_x$. Итак, результатом следующего приближения является:

$$(a \, \partial_X + b \, \partial_T + c) \, F = 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &h_{1\,t} = -h_0 \, u_{1\,t} - \left\{\frac{1}{6} h_0^3 \, u_{1\,x\,x\,x}\right\} - e^{i\theta} \, (F_T + \\ &+ \frac{\omega}{k h_0 (1/6 k^3 h_0^3)} \left(h_0 F_X - \left\{\frac{1}{6} h_0^3 F_X k^2\right\}\right)\right), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &a = i \left(h_0 \, \omega + \frac{1}{3} \, \omega \, H_0 \, \omega^2 - \omega \, g\right),\\ &b = i \left(k - \frac{2\,\omega^2}{k\,h_0} - \frac{2}{3} \, k \, \omega^2 \, H_0\right), \end{aligned} \tag{14}$$

$$c = i \, \omega \, h_0{}',$$

$$\begin{aligned} &a = i \left(\frac{h_0 \, \omega^2}{a_0} + \frac{h_0^3 \, \omega^2 \, k^2}{6\,a_0} + 2\,k \, \frac{\omega^2}{a_0} - \frac{2\,h_0^2 \, k \, \omega}{a_0}\right),\\ &b = i \left(-2\,\omega + \frac{h_0 \, k \, \omega}{a_0} - \frac{h_0^3 \, \omega \, k^3}{6\,a_0} + \right.\\ &\left. + \frac{k\,\omega}{a_0} - \frac{h_0^2 \, k^3}{2\,a_0} + h_0 \frac{\omega}{a_0}\right),\\ &c = -i \, h_0 \, \omega, \quad a_0 = k \, h_0 - \frac{1}{6} \, k^3 \, h_0^3, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &a = i \left(h_0 \, \omega + \frac{1}{3} \, \omega \, h_0^2 \, k^2 - \omega \, g\right),\\ &b = i \left(k - \frac{2\,\omega^2}{k\,h_0} - \frac{1}{3} \, k^3 \, h_0^2\right),\\ &c = -i \, h_0 \, \omega + \frac{1}{3} \, \omega \, k^2 \, h_0^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Решение (12) выбираем в форме

$$F(X,\,T) = F(\tilde{X}) \, e^{-\Delta\,T}, \tag{17}$$

где

$$\tilde{T} = X - C_g T, \quad C_g = \frac{a}{b}, \quad \Delta = \frac{c}{a},$$

что согласуется с предельным переходом к одному случаю.

Решение во втором порядке имеет вид

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \cong F_{20}\, f_1\, e^{i\,\theta} \, + \, F_{21}\, f_2\, e^{i\,\theta} \begin{pmatrix} E_0 \\ G_0 \end{pmatrix} + \text{к. с.} \quad (18)$$

Заметим, что константа принадлежит ядру каждого из уравнений (5), (6) и (7). Однако в силу симметричного характера квадратичных нелинейностей, а также из начальных условий следовало бы константы E_0 и G_0 в первом порядке полагать равными нулю, что мы и сделаем. В то же время, начиная с этого порядка малости, они должны быть включены в решение ($E_0 = \varepsilon E, G_0 = \varepsilon G$) и, как видно будет далее, их роль оказывается существенной.

В (13) учтено первое уравнение системы, определяющее рекурентную связь F и F_{ij}. С равным успехом (в силу дисперсионного соотношения) мы могли бы взять и второе уравнение. Перейдем к следующему порядку ε^3:

$$E_T + h_0 G_X + h_0 G = -\frac{\omega}{h_0 k} |F^2|_X \left(1 - \left\{ \frac{1}{12} h_0^2 k^2 \right\} \right),$$

$$E_X + G_T = -\left(\frac{\omega^2}{2 h_0^2 k^2} + C_3 \right) |F^2|_X + \frac{1}{6} h_0^{'} k^2 |F^2|,$$

$$E_X + G_T = -\left(\frac{\omega^2}{2 h_0^2 k^2} + C_3 \right) |F^2|_X + \frac{1}{6} h_0^{'} k^2 |A^2|,$$

$$\begin{aligned} &(a_3\, \partial_{T_2} + b_3\, \partial_{X_2} + a_2\, \partial_{XX} + b_2 \partial_X + C_2)\, F + \\ &+ a_4 F E + b_4 F G + C_4 F |F^2| = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Итак, мы имеем эволюционную амплитудную систему, зависящую от выбора исходной модели лишь количественно (посредством коэффициентов) да и то, не очень существенно. Как видно, учет средних потоков побудил нас устранить алгебраические секулярности и добавить первые два уравнения. Без средних потоков амплитудная система будет иметь традиционный вид уравнения Гинзбурга-Ландау или Ньюэлла-Уайтхеда с переменными коэффициентами. Прежде чем приступить к анализу (19) введем ряд упрощающих предположений – пренебрежем зависимостью $F(X_2, T_2)$, что есть внесение $O(\varepsilon^2)$ -погрешности в фазу, а функции E и G в плоскости $(\bar{X}, \bar{T})$ аппроксимируем квазистационарными по оси $\bar{T}$, что позволит ввести замену $\partial_T \to \varepsilon \partial_{T_2}$. Во втором уравнении ∂_X целесообразно заменить на $C_g \partial_X + \partial_T$, что позволит исключить из системы G.

В итоге получаем амплитудную систему вида

$$(a_2 \partial_{\bar{X}\bar{X}} + b_2 \partial_X + C_2)\, F + a_6 F E + b_6 F |F^2| = 0,$$

$$a_5 E_X + b_5 E = C_5 + |F^2|_X + d_5 |F^2|, \quad (20)$$

где

$$a_2 = a_1 - C\, g\, b_1 \, + \, C\, g^2\, C_1,$$

$$b_2 = -\Delta\, a_1 + C\, g\, \Delta\, b_1 \, + \, d_1 \, - \, C\, g\, d_2,$$

$$C_2 = \Delta^2\, a_1 \, - \, \Delta\, d_1 \, + \, e,$$

$$\left\{ \begin{aligned} &a_1 = \frac{h_0 \omega}{k}, \quad b_1 = h_0 - \frac{1}{3} g H_0 h_0 \omega^2 + g, \\ &C_1 = \frac{\omega}{k\, h_0}, \quad d_1 = \frac{\omega h_0^{'}}{k}, \quad d_2 = 0, \quad e = \frac{\omega h_0^{''}}{k}, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &a_1 = \frac{h_0^3\, \omega^2\, k}{6 a_0} + 1 + \frac{h_0^2\, k\, \omega}{2\, a_0}, \\ &b_1 = \frac{h_0\, \omega}{a_0} - \frac{h_0^3\, \omega\, k^2}{b\, a_0} + \frac{\omega}{a_0} - \frac{h_0^2\, k^2}{2\, a_0}, \\ &C_1 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = h_0^{'} \frac{\omega}{a_0}, \quad e = h_0^{''} \frac{\omega}{a_0}, \end{aligned} \right. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &a_1 = \frac{h_0 \omega}{k} \, + \, \frac{1}{3} g\, h_0^2\, \omega\, k \, - \, i \frac{g\, \omega\, h_0^2}{3}, \\ &b_1 = \left(h_0 - \frac{1}{3}\, g\, h_0^2\, k^2 + g \right) \, + \, i \frac{g\, h_0^2\, k}{3}, \\ &C_1 = \frac{\omega}{k\, h_0}, \quad d_1 = \frac{\omega h_0^{'}}{k} \, + \, \frac{1}{3}\, g\, (h_0^2)^{'}\, k\, \omega, \\ &d_2 = -\frac{1}{3}\, g\, (h_0^2)^{'}\, k^2, \quad e = \frac{\omega h_0^{''}}{k}, \\ &a_5 = 1 \, - \, \frac{C_g^2\, \omega}{k\, h_0}, \quad b_5 = h_0^{'}\, \frac{\omega}{a_0}, \quad C_5 = \omega\, k^3, \\ &a_6 = -h_0\, k^2, \quad b_6 = -\frac{h_0\, k^2\, \omega}{a_0} \, + \, \frac{1}{2}\, \frac{\omega^2\, k}{a_0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что для систем (1) и (3) a_0 аналогично $k\, h_0$.

Неавтономную динамическую систему, соответствующую (20), в свою очередь можно свести к хорошо известной системе Лоренца [12–14]:

$$\begin{aligned} &d\, X / d\, t \, = \, \sigma\, (X \, - \, Y), \\ &d\, Y / d\, t \, = \, r_1\, X \, - \, \gamma\, X\, Z \, - \, \alpha\, Y, \\ &d\, Z / d\, t \, = \, -\beta\, Z \, + \, \eta / 2 (X^* Y \, + \, X Y^*), \end{aligned} \quad (24)$$

где Y – промежуточная переменная, и

$$X \, = \, \alpha^*\, F,$$

$$Z \, = \, \beta^*\, F \, + \, \gamma\, F^2.$$

Как известно [9, 15], при $r_1 \in]1 - C_2; 1 + C_2[$ мы имеем устойчивый предельный цикл незатухающих пульсаций F и E, а при $r_1 \ll 1$ – фокус, т. е. колебания X, релаксирующие к стационарному состоянию. Заметим, что в исходном представлении в ряде случаев можно рассматривать уравнения Гинзбурга-Ландау как возмущенное уравнение Шредингера и, соответственно, его возмущенные солитонные решения [16], с которых мы собственно и начали, полагая их данными Коши. Наиболее интересная картина в решении возникает не в солитонной или квазипериодической области, а при $r_1 \gg 1$ [15, 17], что соответствует в системе Лоренца режиму существования бесконечного множества периодических устойчивых, а также гомоклинических траекторий. Последние, однако, в пространстве начальных данных принадлежит множеству меры нуль, т. е. могут рассматриваться как флуктуации. При дальнейшем увеличении параметра порядка наблюдаются кооперативные эффекты и образование предтурбулентных волновых структур, а также аттрактора гомоклинических траекторий. Еще раз заметим, что в исходных величинах это будут пульсации многопериодического характера из F в средний поток E, перемежающиеся хаотическими колебаниями (в процессе продвижения волн в области с иным балансом параметров). Далее при увеличении параметра порядка возникает и остается лишь странный аттрактор.

Как видно, параметром порядка амплитудной системы (20) можно считать величину $r = \omega h_0^{'}$. Поскольку $h_0^{'}$ измеряется в единицах медленной шкалы, в системе могут достигаться необходимые для детерминированного хаоса величины r.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется распространения уединенных волн в жидкости переменной глубины методом многомасштабных асимптотических разложений. Показана возможность сведения задачи к системе Лоренца и в результате переход к режиму детерминированного хаоса.

1. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves.– John Wiley & Sons: New York, 1974.– 656 p.; русский перевод: *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир. – 1977. – 622 с.
2. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods.– New York: Wiley-Interscience, 1973.– 425 p.; русский перевод: *Найфэ А.* Методы возмущений. – М.: Мир. – 1976. – 456 с.
3. *Kevorkian J., Cole I. D.* Perturbation methods in applied mathematics.– Springer-Verlag: New York, 1981.– 558 p.
4. *Kevorkian J., Li H.-K.* Resonant modal interactions and adiabatical invariance for a nonlinear wave conations in a variabl domain // Stud. Appl. Math.– 1984.– **71**, N 1.– P. 1–64.
5. *Kevorkian J., Yu J.* Passage through the critical Froude number for shallow-water waves over a variable bottom // J. Fluid Mech.– 1989.– **204**.– P. 31–56.
6. *Newell A. C.* Solitons in mathematics and physics.– SIAM: CBMS-NSF Vol. 48, 1985.– 244 p.; русский перевод: *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир. – 1989. – 326 с.
7. *Knickerbocker C., Newell A.* Reflection of solitary waves in channels of decreasing depth // J. Fluid Mech.– 1985.– **153**.– P. 1–16.
8. *Watson Gr. N.* A treatise on the theory of Bessel functions.– Cambridge: University Press, 1922.– 804 p.; русский перевод: *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. – М.: ИЛ. – 1949. – 798 с.
9. *Yoshida K.* On algebroid solutions of ordinary differential equations // Jap. J. Math.– 1933.– **10**.– P. 253–256.
10. *Yoshida K.* Functional analysis.– New York: Springer-Verlag, 1980.– 256 p.; русский перевод: *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир. – 1967. – 624 с.
11. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными.– М.: Мир, 1977.– 504 с.
12. *Странные аттракторы / Математика.* Сб. статей.– М.: Мир, 1981.– 253 с.
13. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Sci.– 1963.– **20**.– P. 130–141.
14. *Sparrow C.* The Lorenz equations.– New York: Springer-Verlag, 1982.– 321 p.
15. *Hassard B. D., Kazarinov N. D., Ven Y.-H.* Theory and applications of hopf bifurcation. Cambridge: University Press. –1981.; русский перевод:*Хэссард Б., Казаринов Н, Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир. – 1985. – 280 с.
16. *Kaup D.* Forced integrable systems // SIAM-AMS, Santa-Fe.– 1984.– **2**.– P. 195–215.
17. *Guckerheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations dynamical systems and bifurcations of vector fields.– New York: Springer-Verlag, 1983.– 453 p.