

УДК 532.59

НЕСТАЦІОНАРНИЙ РУХ ТОЧКОВОГО ВИХОРА У ДВОХШАРОВІЙ РІДИНІ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 21.12.2011

Розв'язана лінійна задача про нестационарний рух зі стану спокою плоского точкового вихора в двошаровому глибокому середовищі з верхнім шаром скінченної товщини. Розв'язок одержано у вигляді квадратур. На прикладі двох режимів руху – горизонтального руху з постійною швидкістю з початкового моменту та такого ж руху з накладеним на нього періодичним поперечним рухом з постійною швидкістю – проаналізовано особливості формування амплітудної картини збуреного руху на границі розділення шарів та характер зміни потужності, яка затрачується вихором на випромінювання енергії цього руху.

Решена линейная задача о нестационарном движении из состояния покоя плоского точечного вихря в двухслойной глубокой среде с верхним слоем конечной толщины. Решение получено в виде квадратур. На примере двух режимов движения – горизонтального движения с постоянной скоростью с начального момента времени и такого же движения с наложенным на него периодическим поперечным движением с постоянной скоростью – проанализированы особенности формирования амплитудной картины возмущенного движения на границе раздела слоев и характер изменения мощности, затрачиваемой вихрем на излучение энергии этого движения.

The linear problem of non-stationary movement of two-dimensional vortex from the state of rest in the two-layer deep medium with upper layer of finite thickness is solved. The solution is provided in quadrature. The peculiarities of formation of the field of the internal waves on the interface between the layers and the change of the power being utilized by the vortex for emitting the energy of the wave motions are analysed based on the example of two modes of motion (the first one relates to an achievement of the uniform horizontal motion and the second one relates to an achievement of the uniform horizontal motion to which the periodic vertical fixed-speed motion is applied).

ВСТУП

Динаміка руху та взаємодії двовимірних точкових вихорів є одним із важливих напрямків досліджень вихрових рухів в ідеальній рідині. Окремий клас складають задачі про рух таких вихорів в умовах наявності стратифікації середовища за густиною. Відомо, що навіть слабка стратифікація кардинально змінює характер вільного руху таких вихорів. При цьому можуть утворюватись зони нестійкого руху середовища. Тому, на відміну від однорідного середовища, наявність стратифікації істотно обмежує клас рухів вихорів, які допускають їх коректне математичне описання. До такого класу належать вимушені рухи точкових вихорів, результати досліджень яких є базовими при розв'язанні задач динаміки руху плоских крилових профілів довільної форми.

Починаючи з фундаментальних робіт Кочина М.Є. [1,2], задачі про рух вихорів, вихроджерел та плоских профілів розв'язувались для схем шаруватості стратифікації [3]. Найбільш повна лінійна постановка для випадку n шарів виконана в [4]. Бібліографія виконаних в цьому напрямку досліджень з відповідним аналізом наведена в [5]. Їх характерною особливістю є використання при розв'язанні відповідних задач методу М.Є.Кочина, коли вводиться комплексний потенціал течії з подальшим застосуванням теорії ана-

літичних функцій. Для середовищ з неперервною стратифікацією такий підхід неможливий, оскільки рух рідини в таких середовищах має вихровий характер. Стационарні режими руху в середовищі з неперервною стратифікацією розглянуті в роботах [6-9]. Зокрема, в роботі [7] одержано лінійне рівняння, яке описує збурений рух середовища з довільною стійкою стратифікацією, викликаний рухом плоского точкового вихора, і містить в явній формі параметри вихора. При цьому стратифікація може бути як неперервною, так і шаруватою. Останнє дозволяє при розв'язанні таких задач ефективно використовувати методи інтегральних перетворень, що і було зроблено в цих роботах.

На відміну від задач про рух масових джерел, нестационарний рух точкових вихорів вивчено значно менше і то лише для шаруватих схем стратифікації. Тут слід відмітити монографію [3], в якій представлені задачі про горизонтальний рух плоского вихроджерела з пульсуючою по гармонічному закону його інтенсивністю біля границі розділення середовищ, та робіт [10, 11], де при розв'язанні задач про нестационарний рух зі стану спокою плоских профілів довільної форми під вільною поверхнею глибокої рідини та біля границі розділення двошарової безмежної рідини спеціально знаходився розв'язок відповідної задачі для точкового вихора. Щодо нестационарного руху вихорів, у неперервно стратифікованому середовищі, то тут

слід відмітити лише роботу [12], де одержано лінійне рівняння руху збуреного середовища з довільною стійкою стратифікацією, що містить параметри рухомого вихора в явному вигляді. З його використанням розв'язана задача про генерацію поля внутрішніх хвиль (ВХ) при вертикальному русі в шарі скінченої товщини лінійно стратифікованого середовища з постійною швидкістю протягом скінченного інтервалу часу вихрової пари з незмінною інтенсивністю вихорів.

В даній роботі в лінійній постановці розглянута задача про нестационарний рух плоского вихора в двохшаровій глибокій рідині, де верхній шар має скінчену товщину. Досліджені особливості формування внутрішніх хвиль на стрибку густини та величина потужності, яка затрачується на їх випромінювання для двох режимів руху зі стану спокою в початковий момент: горизонтальний рух з постійною швидкістю і горизонтальний рух з постійною швидкістю, на який накладено поперечний періодичний рух також з постійною величиною швидкості. Характерною особливістю даної роботи є використання універсального підходу до розв'язання даної задачі з використанням методу інтегральних перетворень.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нестационарний рух із стану спокою двовимірного горизонтально орієнтованого точкового вихора, який знаходиться нижче стрибка густини в глибокому шарі з густиною середовища ρ_1 , над яким знаходиться шар скінченої товщини L з густиною ρ_2 . Система координат $yo z$ вибирається так, що додатній напрям вісі y протилежний напрямку руху вихора, вісь z направлена вгору, а початок координат знаходиться на вільній поверхні.

В безрозмірній формі, де в якості масштаба довжини взято L , часу – L/U , інтенсивності вихора і функції течії – UL , де U – характерне значення швидкості руху; рівняння, які описують збурений рух середовища, представляються в термінах функції течії ψ_i , такої, що $u_i = \partial\psi_i/\partial z$ – горизонтальна і $w_i = -\partial\psi_i/\partial y$ – вертикальна складові збуреної швидкості у вигляді

$$\Delta\psi_1 = 0, \quad (1)$$

$$\Delta\psi_2 = -\Gamma(t)\delta[y - y_0(t)]\delta[z - z_0(t)], \quad (2)$$

де $y_0(t)$ і $z_0(t)$ – координати рухомого вихора в часі, а $\delta[y - y_0(t)]$ і $\delta[z - z_0(t)]$ – дельта-функції Дірака. Приймається, що $y_0(0) = 0$.

Граничні умови задачі, окрім умови "твердої кришки" на вільній поверхні, виражають неперервність тиску і вертикального зміщення на границі шарів та затухання збурень з глибиною

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\text{при } z = -1 \quad \frac{\partial^3\psi_1}{\partial t^2\partial z} - \lambda\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} = \kappa\left(\frac{\partial^3\psi_2}{\partial t^2\partial z} - \lambda\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \frac{\partial\psi_2}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\text{при } z \rightarrow -\infty \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Тут $\kappa = \rho_2/\rho_1 > 1$, $\lambda = gL/U^2$ – обернене число Фруда.

2. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Для знаходження розв'язку задачі (1)–(6) використовується метод інтегральних перетворень Лапласа по часу і Фур'є – по горизонтальній координаті y :

$$\psi_i(y, z, t) = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \bar{\psi}_i(k, z, s) dk. \quad (7)$$

Для функції-образу $\bar{\psi}_i(k, z, s)$ ($i = 1, 2$) одержується задача для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\bar{\psi}_1'' - k^2\bar{\psi}_1 = 0, \quad (8)$$

$$\bar{\psi}_2'' - k^2\bar{\psi}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t) e^{[-st - ik y_0(t)]} \delta[z - z_0(t)] dt, \quad (9)$$

з граничними умовами

$$\text{при } z = 0 \quad \bar{\psi}_1 = 0, \quad (10)$$

$$\text{при } z = -1 \quad \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2, \quad (11)$$

$$s^2\bar{\psi}_1' + \lambda k^2\bar{\psi}_1 = \kappa(s^2\bar{\psi}_2' + \lambda k^2\bar{\psi}_2), \quad (12)$$

$$\text{при } z \rightarrow -\infty \quad \bar{\psi}_2 \rightarrow 0. \quad (13)$$

Використання методу варіації сталих інтегрування для знаходження частинного розв'язку рівняння (8) приводить до розв'язку задачі (7)–(13) у

вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= C_1 e^{|k|} + C_2 e^{-|k|}, \\ \bar{\psi}_2 &= C_3 e^{|k|} + \frac{1}{|k|} \int_0^\infty \text{sh} \{ |k| [z - z_0(\tau)] \} \times \\ &\times \Gamma(\tau) e^{-s\tau + ik y_0(\tau)} H[z - z_0(\tau)] d\tau, \end{aligned}$$

де $H[z - z_0(t)]$ – одинична функція Хевісайда.

Після визначення з граничних умов сталих інтегрування має місце представлення

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= \frac{\text{sh}(|k|z)}{|k| \text{sh}|k|} \left(\frac{f_1}{D} + f_2 \right), \\ \bar{\psi}_2 &= -\frac{e^{|k|(z+h)} f_1}{|k|D} + \frac{1}{|k|} f_3, \end{aligned}$$

де

$$f_1 = s^2 (f_{11} - \text{cth}|k| f_{12}) - \lambda |k| (\kappa - 1) f_{12},$$

$$f_{11} = \int_0^\infty F(\tau) \text{ch} \{ |k| [1 + z_0(\tau)] \} d\tau,$$

$$f_{12} = \int_0^\infty F(\tau) \text{sh} \{ |k| [1 + z_0(\tau)] \} d\tau,$$

$$f_2 = \int_0^\infty F(\tau) \text{sh} \{ |k| [1 + z_0(\tau)] \} H[z - z_0(\tau)] d\tau,$$

$$f_3 = \int_0^\infty F(\tau) \text{sh} \{ |k| [z - z_0(\tau)] \} H[z - z_0(\tau)] d\tau,$$

$$F(\tau) = \Gamma(\tau) e^{-s\tau + ik y_0(\tau)},$$

$$D = \lambda(\kappa - 1)|k| + s^2 (\kappa + \text{cth}|k|).$$

Враховуючи, що вертикальна складова збуреної швидкості в лінійному наближенні

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

де $\eta(y, z, t)$ – вертикальне зміщення (на стрибку густини – це амплітуда внутрішніх хвиль), розв’язки для $w_i(y, z, t)$ і $\eta_i(y, z, t)$ представляються як

$$w_i(y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st} ds \int_{-\infty}^{\infty} k \bar{\psi}_i(k, z, s) e^{iky} dk,$$

$$\eta_i(y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds \int_{-\infty}^{\infty} k \bar{\psi}_i(k, z, s) e^{iky} dk.$$

Надалі розглядається лише розв’язок в області нижче стрибка густини. В цій області відповідно

$$w_2(y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{|k|} G e^{ik[y-y_0(\tau)]} dk, \quad (14)$$

$$\eta_2(y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{s|k|} G e^{ik[y-y_0(\tau)]} dk, \quad (15)$$

де

$$G(k, t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \left(-\frac{f_1}{D} + f_3 \right) ds.$$

Підінтегральна функція виразу для D задовольняє умовам леми Жордана і має полюси в s -площині в точках, де

$$D = 0.$$

Відповідне рівняння

$$\lambda(\kappa - 1)|k| + s^2 (\kappa + \text{cth}|k|) = 0$$

дає два чисто уявних полюси

$$s_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\lambda(\kappa - 1)|k|}{\kappa + \text{cth}|k|}} = \pm i\omega.$$

Застосування апарату теорії лишків дає для G розв’язок

$$\begin{aligned} G(k, t, \tau) &= -\frac{\kappa \sqrt{\lambda(\kappa - 1)|k|}}{(\kappa + \text{cth}|k|)^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\times \int_0^t \Gamma(\tau) e^{ik[1+z_0(\tau)]} \sin[\omega(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Ця величина відмінна від нуля лише при $t > \tau$ і тоді з дійсна частина розв’язку (14) для $w_2(y, z, t)$ (враховуючи непарність у k -площині множника перед $\exp\{ik[y - y_0(\tau)]\}$ у відповідному підінтегральному виразі) представляється у вигляді

$$\begin{aligned} w_2(y, z, t) &= -\frac{\kappa \sqrt{\lambda(\kappa - 1)}}{\pi} \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau \int_0^\infty k^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \frac{e^{k[z+2+z_0(\tau)]}}{(\kappa + \text{cth}k)^{\frac{3}{2}}} \sin[\omega(t - \tau)] \times \\ &\times \sin\{k[y - y_0(\tau)]\} dk. \quad (16) \end{aligned}$$

Аналогічно знаходиться розв’язок для $\eta_2(y, z, t)$. В цьому випадку, як це впливає з представлення (15), підінтегральна функція має додатково ще

один полюс в точці $s = 0$, але відповідний аналіз показує, що цей полюс не дає вкладу у розв'язок. В результаті

$$\eta_2(y, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{e^{k[z+2+z_0(\tau)]}}{(\kappa + \text{cth } k)} \times \cos[\omega(t - \tau)] \sin\{k[y - y_0(\tau)]\} dk. \quad (17)$$

Надалі розв'язок для амплітуди буде представляти лише на границі шарів (при $z = -1$).

3. ПОТУЖНІСТЬ, ЗАТРАЧЕНА НА ГЕНЕРАЦІЮ ХВИЛЬОВИХ РУХІВ

При русі вихора у стратифікованому середовищі відбувається генерація внутрішніх і поверхневих хвиль. Потужність, яку витрачає плоский вихор на хвильове випромінювання при нестационарному русі, визначається сумою потоку енергії через довільну замкнуту поверхню, яка оточує вихор, та похідної по часу від величини енергії всередині області, обмеженої цією поверхнею, в одиницю часу. В роботі [13] відповідна задача визначення випромінюваної енергії розв'язана для стаціонарного режиму руху, в результаті чого визначена величина хвильового опору при горизонтальному рівномірному русі вихора. Застосований там підхід можна використати і в даній роботі. Довільна поверхню навколо вихора вибирається так, щоб вона знаходилася в області нижче стрибка густини.

Система рівнянь руху середовища, з якої одержується рівняння (2) для області нижче стрибка густини, складається з рівнянь Ейлера та рівняння нерозривності і має вигляд

$$\rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

$$\rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial z} = \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} \{ \Gamma(t) H [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Якщо рівняння (18)–(20) домножити на v_2, w_2 і p_2 відповідно, а потім додати їхні ліві і праві частини, то в результаті отримуємо

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(p_2 \vec{v}) = \rho_2 w \frac{\partial}{\partial t} \{ \Gamma(t) H [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \}, \quad (21)$$

де $E = \frac{1}{2} \rho_2 (v^2 + w^2)$ – енергія збуреного руху у виділеній точці. Звідси потужність хвильового ви-

промінювання в безрозмірній формі, де в якості масштабу W взято $\rho_2 U^3 L$, визначається з виразу

$$W(t) = \int \int_S w(y, z, t) \times \frac{\partial}{\partial t} \{ \Gamma(t) H [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \} dy dz, \quad (22)$$

де S – площа поперечного перерізу виділеної області. Після виконання інтегрування по S -області з (16) та (22) маємо

$$W(t) = \frac{\kappa \sqrt{\lambda(\kappa - 1)}}{\pi} \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\sin[\omega(t - \tau)]}{(\kappa + \text{cth } k)^{\frac{3}{2}}} \times e^{k[z_0(t)+2+z_0(\tau)]} (F_1 - F_2) dk, \quad (23)$$

де

$$F_1(t) = \left[k^{\frac{1}{2}} \frac{dz_0}{dt} \Gamma(t) + \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \frac{d\Gamma}{dt} \right] \cos\{k[y_0(t) - y_0(\tau)]\},$$

$$F_2(t) = k^{\frac{1}{2}} \frac{dy_0}{dt} \sin\{k[y_0(t) - y_0(\tau)]\}.$$

4. ПРИКЛАДИ НЕСТАЦІОНАРНОГО РУХУ ВИХОРА

Розглянуто дві схеми нестационарного руху вихора зі стану спокою.

1. В момент часу $t = 0$ вихор постійної інтенсивності Γ_0 , що знаходиться на горизонті $z_0 = -h$, починає рухатись у від'ємному напрямку вісі y з постійною горизонтальною швидкістю $U = 1$ (в якості масштабу швидкості вибрано власне її значення). В цьому випадку $y_0(t) = -t, y_0(\tau) = -\tau$. Даний режим руху відповідає процесу виходу збуреного гідродинамічного поля на стаціонарний режим при $t \rightarrow \infty$. В розв'язках (16), (17) і (23) в цьому випадку легко виконується інтегрування по τ , в результаті чого отримується розв'язок в нерухомій системі координат у вигляді квадратур:

$$w_2(y, z, t) = -\frac{\kappa \Gamma_0 \sqrt{\lambda(\kappa - 1)}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k^{\frac{1}{2}} e^{k(z+2-h)}}{(\kappa + \text{cth } k)^{\frac{3}{2}}} \times (A_1 + A_2) dk, \quad (24)$$

$$\eta_2(y, -1, t) = \frac{\kappa \Gamma_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{k(1-h)}}{\kappa + \text{cth } k} \times (B_1 - B_2) dk, \quad (25)$$

$$W(t) = \frac{\kappa \Gamma_0^2 \sqrt{\lambda(\kappa - 1)}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k^{\frac{1}{2}} e^{k(2-2h)}}{(\kappa + \text{cth } k)^{\frac{3}{2}}} \times (R_1 - R_2) dk, \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\omega - k} \{ \sin[k(y + t)] - \sin(\omega t + ky) \}, \\ A_2 &= \frac{1}{\omega + k} \{ \sin[k(y + t)] + \sin(\omega t - ky) \}, \\ B_1 &= \frac{1}{\omega - k} \{ \cos[k(y + t)] - \cos(\omega t + ky) \}, \\ B_2 &= \frac{1}{\omega + k} \{ \cos[k(y + t)] - \cos(\omega t - ky) \}, \\ R_1 &= \frac{1}{\omega - k} \sin[t(\omega - k)], \\ R_2 &= \frac{1}{\omega + k} \sin[t(\omega + k)]. \end{aligned}$$

Одержані розв'язки для w_2 і η_2 зручно представити в системі координат, зв'язаній з рухомим вихором. Для цього необхідно покласти $y = -t + y_1$. Якщо опустити індекс "1" при y , то відповідний розв'язок в цій системі координат має вигляд

$$\begin{aligned} w_2(y, z, t) &= -\frac{\kappa\Gamma_0\sqrt{\lambda(\kappa-1)}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k^{\frac{1}{2}} e^{k(z+2-h)}}{(\kappa + \text{cth } k)^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\quad \times (A_{11} + A_{21}) dk, \quad (27) \\ \eta_2(y, -1, t) &= \frac{\kappa\Gamma_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{k(1-h)}}{\kappa + \text{cth } k} \times \\ &\quad \times (B_{11} - B_{21}) dk, \quad (28) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\omega - k} \{ \sin(ky) - \sin[(\omega - k)t + ky] \}, \\ A_{21} &= \frac{1}{\omega + k} \{ \sin(ky) + \sin[(\omega + k)t - ky] \}, \\ B_{11} &= \frac{1}{\omega - k} \{ \cos(ky) - \cos[(\omega - k)t + ky] \}, \\ B_{21} &= \frac{1}{\omega + k} \{ \cos(ky) - \cos[(\omega + k)t - ky] \}. \end{aligned}$$

Стационарний розв'язок впливає із (28) при $t \rightarrow \infty$. Отже, його можна одержати, опустивши в (28) складові з $\cos[(\omega - k)t]$ і $\cos[(\omega + k)t]$ і виконавши для одержаного розв'язку умову випромінювання. При цьому хвильове число стаціонарного поля внутрішніх хвиль визначатиметься з трансцендентного рівняння

$$k - \frac{\lambda(\kappa - 1)}{\kappa + \text{cth } k} = 0.$$

Необхідності виконувати умову випромінювання в нестационарній постановці для скінчених t немає, оскільки умова затухання збурень $\eta \rightarrow 0$ при

$y \rightarrow \pm\infty$ при цьому виконуються *a priori*. Тому вихід на стаціонарний режим чисто хвильової картини (внутрішніх хвиль) із розв'язку (28) тут не розглядається, оскільки при будь-якому скінченному t підінтегральна функція в (28) не має полюсів в комплексній k -площині. Справді, безпосередньо з виразів для $A_{11}, A_{21}, B_{11}, B_{21}$ випливає, що при $k \rightarrow \omega$ їх значення прямують до скінчених величин. Однак зрозуміло, що при $t \rightarrow \infty$ відповідні стаціонарним внутрішнім хвилям складові будуть все більше проявлятися.

2. В момент часу $t = 0$ вихор постійної інтенсивності починає рухатись у від'ємному напрямку вісі y з постійною горизонтальною швидкістю $U = 1$, причому на цей рух накладається періодичний з періодом T поперечний (вертикальний) рух з постійною величиною швидкості w_z такою, що амплітуда цього руху складає величину $A_z = w_z \frac{T}{4}$. Для такого режиму руху

$$\begin{aligned} y_0(t) &= t; \quad y_0(\tau) = -\tau, \\ z_0(t) &= bt - c - h; \quad z_0(\tau) = b\tau - c - h, \\ b &= (-1)^n \frac{4A_z}{T}; \quad c = 2n(-1)^n A_z, \\ n &= E \left[\frac{2(t + 0.25T)}{T} \right], \end{aligned}$$

де $E[\]$ – ціла частина числової величини в дужках. Для цього режиму руху також вдається одержати розв'язок у вигляді квадратур

$$\begin{aligned} \eta_2(y, -1, t) &= \frac{\kappa\Gamma_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{k(1-c-h)}}{\kappa + \text{cth } k} I_\eta dk, \quad (29) \\ I_\eta &= I_1 \cos(ky + \omega t) + I_2 \sin(ky + \omega t) + \\ &\quad + I_3 \cos(ky - \omega t) + I_4 \sin(ky - \omega t), \\ w_2[y, z_0(t), t] &= -\frac{\kappa\Gamma_0\sqrt{\lambda(\kappa-1)}}{2\pi} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{k^{\frac{1}{2}} e^{k(2-2h+bt-c)}}{(\kappa + \text{cth } k)^{\frac{3}{2}}} I_w dk, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_w &= I_1 \sin(ky + \omega t) - I_2 \cos(ky + \omega t) - \\ &\quad - I_3 \sin(ky - \omega t) + I_4 \cos(ky - \omega t), \\ W(t) &= \kappa\Gamma_0^2 \sqrt{\lambda(\kappa-1)} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{k^{\frac{1}{2}} e^{k(2-2h+bt-c)}}{(\kappa + \text{cth } k)^{\frac{3}{2}}} I_W dk, \quad (31) \\ I_W &= (I_1 + bI_2) \sin[t(k - \omega)] + \\ &\quad + (I_2 - bI_1) \cos[t(k - \omega)] - \\ &\quad - (I_3 + bI_4) \sin[t(k + \omega)] - \\ &\quad - (I_4 - bI_3) \cos[t(k + \omega)], \end{aligned}$$

де

$$I_1 = \frac{e^{bkt} I_{1*} + k - \omega}{b^2 k^2 + (k - \omega)^2},$$

$$I_2 = \frac{e^{bkt} I_{2*} - bk}{b^2 k^2 + (k - \omega)^2},$$

$$I_3 = \frac{e^{bkt} I_{3*} + k + \omega}{b^2 k^2 + (k + \omega)^2},$$

$$I_4 = \frac{e^{bkt} I_{4*} - bk}{b^2 k^2 + (k + \omega)^2},$$

$$I_{1*} = bk \sin[(k - \omega)t] - (k - \omega) \cos[(k - \omega)t],$$

$$I_{2*} = bk \cos[(k - \omega)t] + (k - \omega) \sin[(k - \omega)t],$$

$$I_{3*} = bk \sin[(k + \omega)t] - (k + \omega) \cos[(k + \omega)t],$$

$$I_{4*} = bk \cos[(k + \omega)t] + (k + \omega) \sin[(k + \omega)t],$$

5. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Для ілюстрації особливостей формування поля внутрішніх хвиль на границі шарів та потужності, яка витрачається на їх випромінювання, проведено ряд чисельних експериментів.

Для першої схеми руху розрахунки амплітудної картини виконані в рухомій системі координат, пов'язаній з центром вихора. Розглянуто два режими руху: для $\lambda = 16$ і $\lambda = 4$ і в кожному з них для двох значень $\kappa - 1.02$ і 1.2 та двох значень $h - 1.5$ і 1.2 при незмінному значенні інтенсивності вихора $\Gamma_0 = 0.02$.

Для аналізу хвильової картини на стрибку густини важливо відмітити, що в кожен момент часу рухомим вихором генеруються дві системи збурень, одна з яких поширюється в напрямку руху вихора, а друга – в протилежну сторону. Збурення другої системи на своєму шляху взаємодіють зі збуреннями першої системи, формуючи сумарну хвильову картину.

Результати розрахунків представлені на рис. 1 – 7. Характер становлення амплітудної картини збурення в ближній до вихора області добре ілюструють рис. 1 – 3, де наведено вигляд амплітудної картини для значення $\kappa = 1.02$, характерного для тонких океанських термоклівів, і $h = 1.5$, $\lambda = 16$ для різних моментів часу. Як впливає з представленої на рис. 1 картини, вже при $t = 10$ позаду вихора формуються характерна область збурення скінченної довжини, що містить дві характерні зони, розділені областю зі значно меншими амплітудами, і хвильовим характером руху. Максимальна амплітуда збурень відповідає координаті над центром вихора. Зі зростанням t , як це впливає з рис. 2 і 3, максимальні значення амплітуд в обох

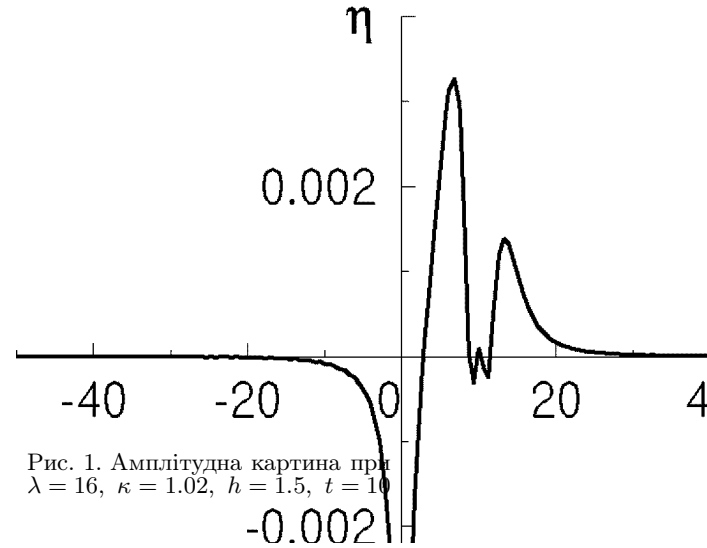


Рис. 1. Амплітудна картина при $\lambda = 16$, $\kappa = 1.02$, $h = 1.5$, $t = 10$

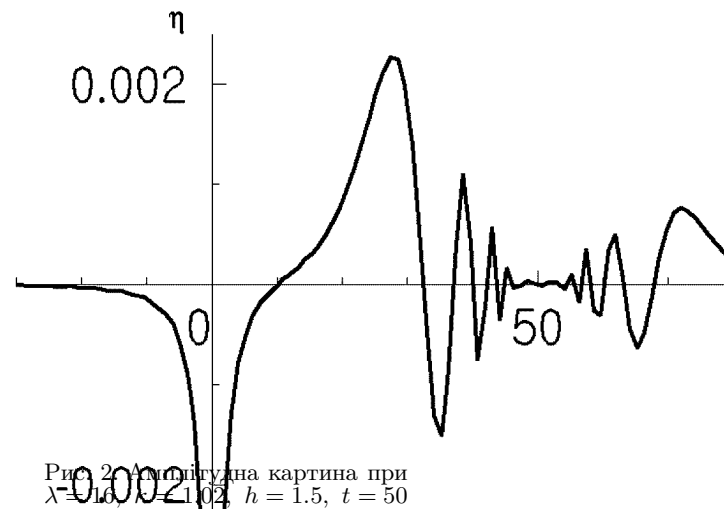


Рис. 2. Амплітудна картина при $\lambda = 16$, $\kappa = 1.02$, $h = 1.5$, $t = 50$

зонах за вихором змінюються, при цьому максимальні додатні значення зменшуються, а максимальні від'ємні значення (відповідні координаті над центром вихора) зростають по модулю до певного значення, а потім зменшуються. Поздовжні координати розміщення відмічених максимальних збурень та протяжність роздільної області з часом зростають. Всі ці характеристики уповільнюють з часом темп своєї зміни. Попереду рухомого вихора відбувається плавне затухання збурення від його максимальних значень у ближній зоні до нуля. Незавжди бачити, що середина проміжної області мінімальних амплітуд близька до координати центра вихора в початковий момент (адже швидкість руху вихора $V = 1$). Таким чином, у початковий момент від точки старту вихора формуються дві зони збурень. У тій з них, що розміщена в сторону вихора, збурення генеруються рухомим вихором, а

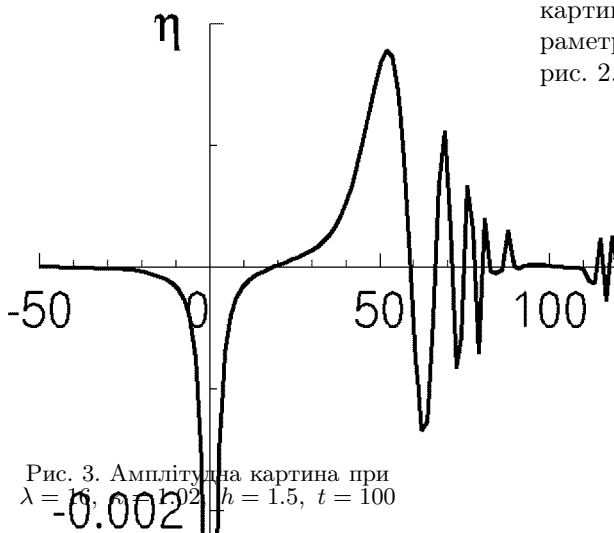


Рис. 3. Амплітудна картина при $\lambda = 16, \kappa = 1.02, h = 1.5, t = 100$

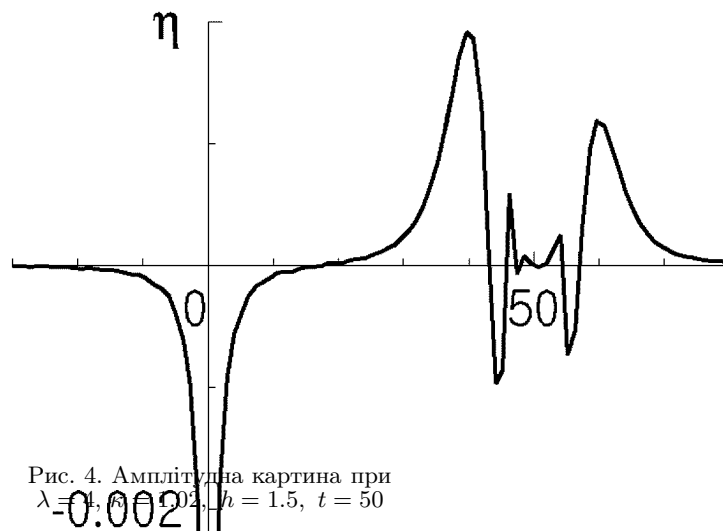


Рис. 4. Амплітудна картина при $\lambda = 4, \kappa = 1.02, h = 1.5, t = 50$

її протяжність постійно зростає. Через деякий інтервал часу від початку руху структура збурення в ближній до вихора області набуває стаціонарного характеру. Протяжність цієї області залежить від параметрів руху. Ближня до вихора зона, крім збурень, які з часом до стаціонарного вигляду, містить також ВХ від початкового збурення в околі точки старту. Навпаки, в другій характерній зоні характер хвильової структури та її протяжність визначаються лише еволюцією в часі сформованого у початковий період руху збурення на стрибку густини. Як показують розрахунки, представлені на рис. 2 і 3, з часом протяжність цієї зони зростає разом з кількістю присутніх там хвильових гармонік, чії амплітуди зменшуються. При $t \rightarrow \infty$ збурення в першій зоні формують стаціонарну картину руху, включаючи поле внутрішніх хвиль за вихором, а збурення в другій області затухають. На представлених рисунках не вдається відокремити складові амплітудної картини, які з часом відповідають стаціонарним внутрішнім хвилям. Як вже відмічалось вище, для цього необхідно використовувати стаціонарний розв'язок задачі.

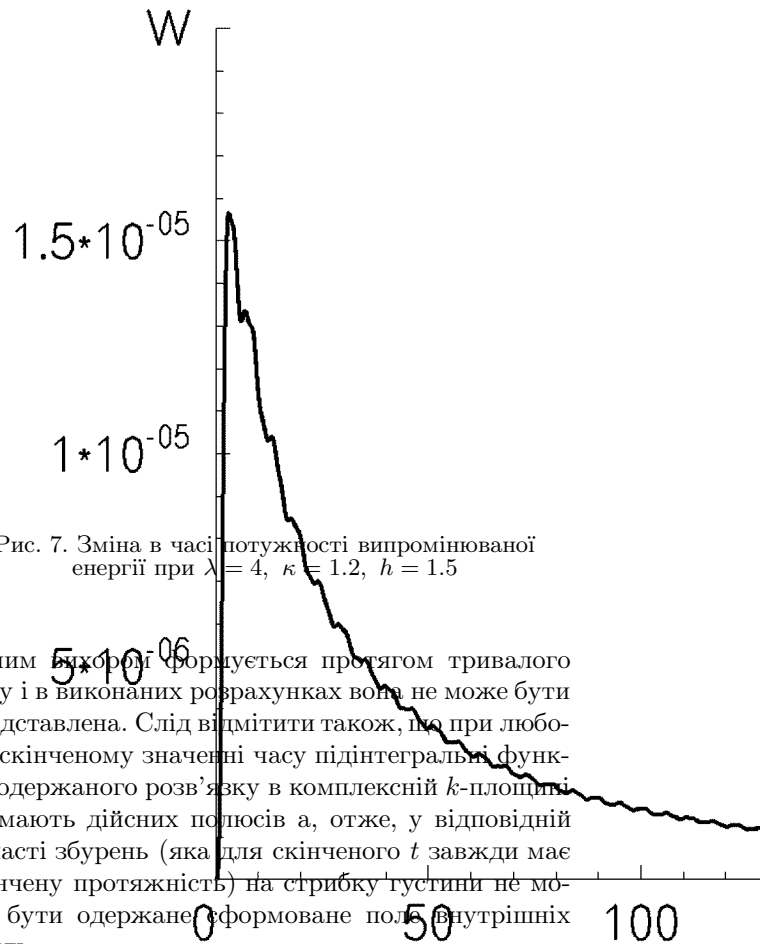
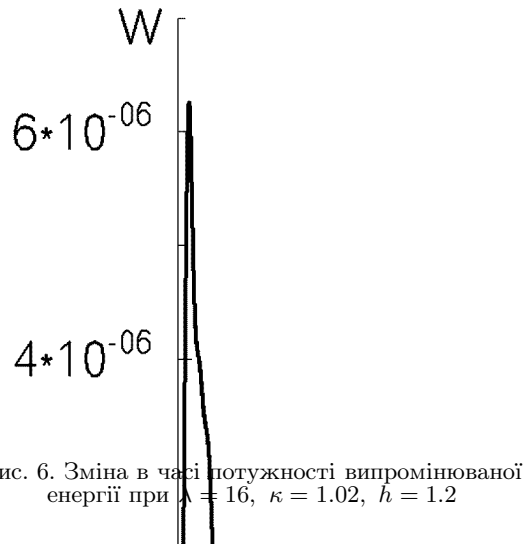
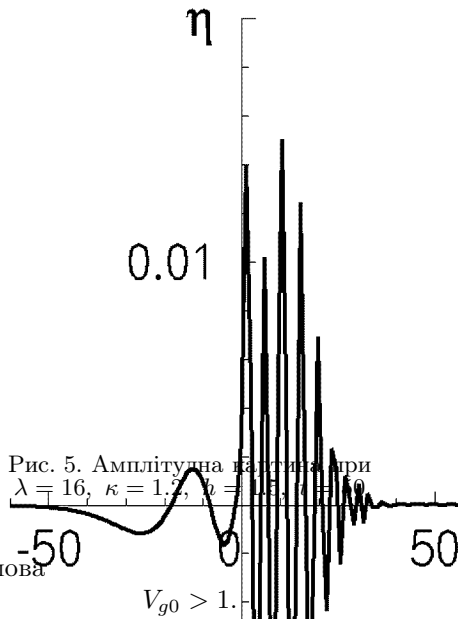
Коли вихор рухається ближче до стрибка густини, максимуми амплітуд збуреного хвильового пакету зростають, що безпосередньо впливає з вигляду розв'язку (28), де величина h знаходиться в показнику експоненти. Зміна величини λ приводить до певної зміни структури та енергетики зони збурення. Так, зменшення значення λ з 16 до 4 приводить до зменшення амплітуд у ближній до вихора області і їх збільшення в протилежній від точки старту області. При цьому має місце зменшення кількості хвильових гармонік в обох із цих областей. Про це свідчить порівняння амплітудних

картин на рис. 4, відповідного $\lambda = 4$ при інших параметрах, таких як для режиму руху, відповідного рис. 2.

Характер амплітудної картини збурень на стрибку густини істотно залежить від інтенсивності стрибка густини. Розрахунки, виконані для більших значень κ , показують, що в цьому випадку мають місце як передовода структури обох характерних зон збурення, так і істотні зміни їхньої енергетики. Збільшення інтенсивності стрибка густини при інших рівних умовах приводить до збільшення амплітуд збурення в першій характерній зоні та їх зменшення в другій характерній зоні. На рис. 5 представлена амплітудна картина збурень для режиму руху, відповідного рис. 2, але з заміною величини κ з 1.02 на 1.2. Як видно з порівняння рис. 2 і 5, це приводить до збільшення максимальних амплітуд ближньої зони в декілька разів і, відповідно, до ще помітнішого їх зменшення в дальній зоні. При цьому протяжність області, яка розділяє ці зони, помітно зростає. Цікаво відмітити також формування при цьому режимі руху попереду вихора області скінченної протяжності, в якій мають місце збурення хвильового характеру. Утворення цієї області обумовлене тим, що швидкість поширення переднього фронту внутрішніх хвиль V_{g0} може бути більшою швидкості руху самого вихора. Справді, ця величина визначається з дисперсійного відношення $\omega = \omega(k)$ як

$$V_{g0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\lambda(\kappa - 1)}{2}}$$

і вона визначає порогові значення параметрів задачі, при яких попереду вихора починає утворюватись хвильова зона. Для цього повинна викону-



ватись умова

$$V_{g0} > 1.$$

Неважко переконатись, що для розрахованих параметрів рис. 5 ця умова виконується. Протяжність відміченої зони зростає з часом пропорційно різниці швидкостей хвильового фронту і вихора.

В цілому, амплітудна картина збурень на границі розділення шарів з часом прямує до стаціонарного вигляду. При цьому вклад у розв'язок внутрішніх хвиль від початкового збурення в області старту, внаслідок дисперсійних ефектів, з часом прямує до нуля.

Про характер зміни величини $W(t)$ можна судити з рис. 6 та 7, з яких випливає, що в початковий період руху відбувається швидке зростання потужності випромінюваної енергії до свого максимуму, після чого вона зменшується і прямує до сталої величини. Значення цієї величини, як і максимальні значення амплітуд збурення, залежать від віддалі вихора від границі розділу шарів, інтенсивності стрибка густини та величини λ . Збільшення величин κ та λ або зменшення величини h приводять до зростання випромінюваної енергії внутрішніх хвиль і, відповідно, навпаки – при зменшенні κ та λ або збільшенні h випромінювана енергія зменшується.

З наведених рисунків можна зробити оцінку інтервалу часу виходу цієї величини на постійне значення, що відповідає усталеному випромінюванню енергії збуреного поля внутрішніх хвиль на стрибку густини. Цей інтервал визначається, головним чином, значенням параметра κ . Для $\lambda = 16$ і $\kappa = 1.02$ протяжність його близька до значення $t \sim 70$, а для $\lambda = 4$ і $\kappa = 1.2$ знаходиться десь у районі $t \approx 200$.

Стаціонарна картина хвильових збурень за ру-

хомим вихором формується протягом тривалого часу і в виконаних розрахунках вона не може бути представлена. Слід відмітити також, що при будь-якому скінченному значенні часу підінтегральні функції одержаного розв'язку в комплексній k -площині не мають дійсних полюсів а, отже, у відповідній області збурень (яка для скінченного t завжди має скінчену протяжність) на стрибку густини не може бути одержане сформоване поле внутрішніх хвиль.

Для другої схеми руху розрахунки виконані в системі координат, яка рухається горизонтально з вихором паралельно середній лінії його руху на горизонті $z = -h$ зі швидкістю $U = 1$, для двох значень амплітуди поперечного руху $A_z = 0.01$ та $A_z = 0.03$ з періодом $T = 40$. Значення інших па-

раметрів задачі ті самі, що і в попередній схемі. Результати розрахунків показують, що харвктер амплітудної картини на стрибку густини дуже мало відрізняються від розглянутої в попередній задачі. Для режиму руху з $A_z = 0.03$ вже помітний вплив наближення або віддалення вихора від стрибка густини в процесі руху. Про це можна судити з порівняння амплітудних картин для рівномірного руху на рис. 2 і з накладеним поперечним рухом на рис. 8. Як видно з рис. 8, в ближній до вихора зоні збурень максимуми амплітуд зросли на ділянці руху, що відповідає наближенню вихора до стрибка густини. Вплив інших параметрів задачі на характер хвильового руху на стрибку густини аналогічний попередній схемі руху.



Рис. 8. Амплітудна картина при $\lambda = 16$, $\kappa = 1.02$, $\mu = 1.5$, $A_z = 0.03$, $T = 40$

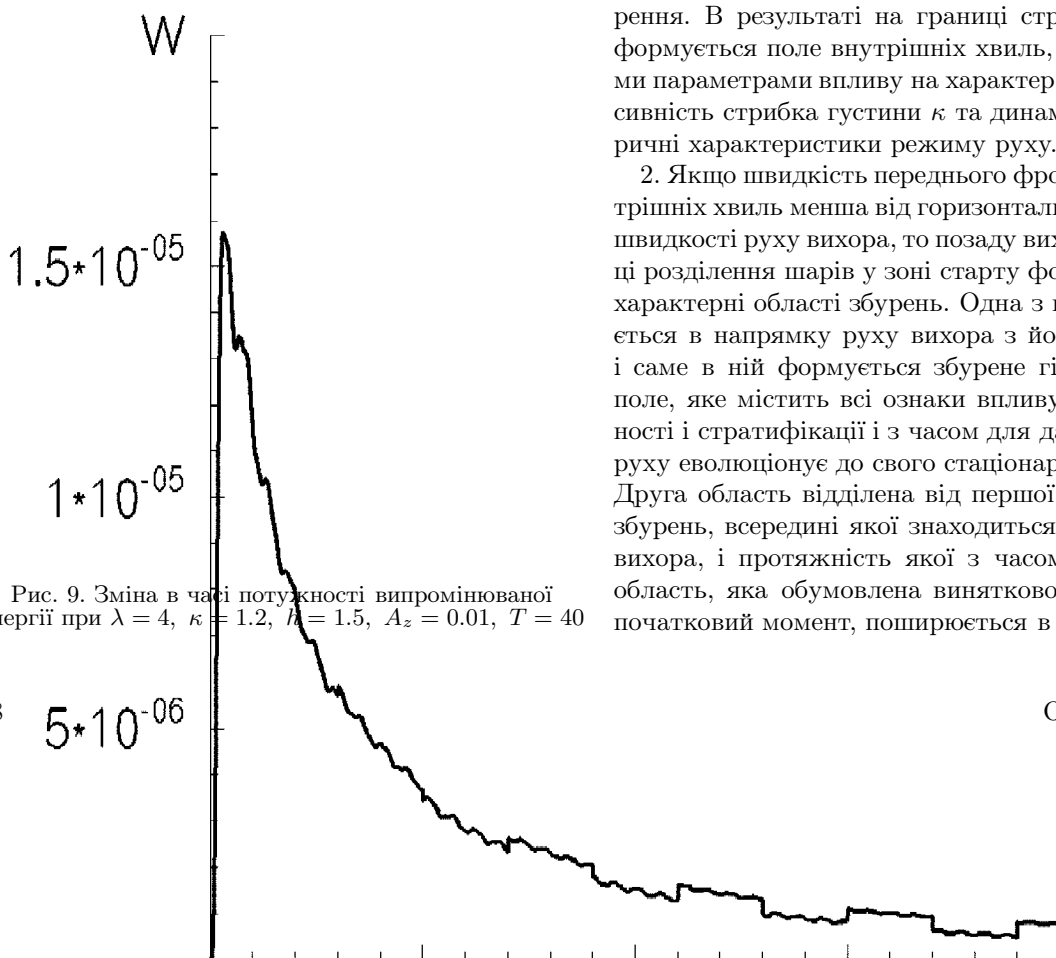


Рис. 9. Зміна в часі потужності випромінюваної енергії при $\lambda = 4$, $\kappa = 1.2$, $\mu = 1.5$, $A_z = 0.01$, $T = 40$

Потужність випромінюваної енергії, як показують розрахунки, виявилась більш чутливою характеристикою. На рис. 9 ця величина наведена для режиму руху, коли всі параметри, окрім періоду поперечного руху, аналогічні режиму руху, відповідному рис. 7 з $A_z = 0.01$. Як видно з порівняння цих рисунків, максимальні значення величин $W(t)$ в обох випадках дуже близькі, але з часом чітко прослідковується періодичний характер її зміни у випадку другої схеми руху.

ЗАКЛЮЧЕННЯ

У проведених дослідженнях виконана загальна постановка лінійної задачі про нестационарний рух зі стану спокою плоского точкового вихора в нижньому шарі двохшарового глибокого середовища з верхнім шаром скінченної товщини. Розроблена відповідна математична модель з використанням методу інтегральних перетворень і одержані розв'язки для двох схем такого руху вихора – рівномірного горизонтального руху з початкового моменту часу та такого ж руху з накладеним на нього вертикальним періодичним рухом з постійною по величині швидкістю. Розв'язки одержані у вигляді квадратур. Аналіз виконаних чисельних розрахунків дозволяє зробити наступні висновки про особливості формування і еволюції поля внутрішніх хвиль для таких схем руху вихора:

1. При нестационарному русі вихора зі стану спокою поблизу границі розділення середовищ з різними густинами вихором генеруються дві системи збурень з протилежними напрямками поширення. В результаті на границі стрибка густини формується поле внутрішніх хвиль, визначальними параметрами впливу на характер якого є інтенсивність стрибка густини κ та динамічні і геометричні характеристики режиму руху.

2. Якщо швидкість переднього фронту поля внутрішніх хвиль менша від горизонтальної складової швидкості руху вихора, то позаду вихора на границі розділення шарів у зоні старту формуються дві характерні області збурень. Одна з них розширюється в напрямку руху вихора з його швидкістю і саме в ній формується збурене гідродинамічне поле, яке містить всі ознаки впливу нестационарності і стратифікації і з часом для даного режиму руху еволюціонує до свого стаціонарного вигляду. Друга область відділена від першої зоною малих збурень, всередині якої знаходиться точка старту вихора, і протяжність якої з часом зростає. Ця область, яка обумовлена винятково збуренням в початковий момент, поширюється в протилежний

напрямку руху вихора бік і внутрішні хвилі в ній з часом затухають.

3. Якщо швидкість переднього фронту поля внутрішніх хвиль більша горизонтальної складової швидкості руху вихора, то попереду вихора утворюється ще одна область хвильових рухів, протяжність якої зростає з часом зі швидкістю $V_{g0} - U$.

4. Потужність випромінюваних рухомим вихором внутрішніх хвиль у розглянутих схемах руху спочатку швидко наростає до свого максимуму, після чого плавно зменшується до свого значення, відповідного стаціонарному, або періодично-змінному руху. Величина потужності випромінювання зростає зі збільшенням інтенсивності стрибка густини та товщини верхнього шару рідини і зменшенням швидкості руху вихора та віддалі вихора від границі розділення шарів. При зворотній зміні вказаних параметрів має місце зменшення величини потужності випромінюваної енергії.

Використаний в роботі метод інтегральних перетворень можна застосовувати також і в нестационарних задачах з неперервною стратифікацією, оскільки для таких середовищ є лінійне рівняння, яке описує збурений рух середовища, викликаний нестационарним рухом точкового вихора, і містить його параметри в явному вигляді.

1. *Кочин Н.Е.* О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженного в жидкость тела.– Собр.соч., М., Л.: Из-во АН СССР, 1949, т. 2.– С. 105–182.
2. *Кочин Н.Е.* О влиянии рельефа земли на волны на поверхности раздела двух жидкостей разной плотности (статья вторая).– Собр. соч., М., Л.: 1949, т. 1.– С. 467–477.
3. *Басин М.Я., Шадрин И.П.* Гидродинамика крыльев вблизи границы раздела сред.– Л.: Судостроение, 1980.– 304 с.
4. *Горлов С.И.* Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Известия АН СССР, МЖГ.– 1995.– 31.– С. 121–132.
5. *Степанянц Н.А., Стурова И.В., Теодорович А.В.* Линейная теория поверхностных и внутренних волн// Итоги науки и техники, Серия "Механика жидкости и газа М.– ВИНТИ, 1987.– т. 21.– С. 92–179
6. *Janowitz G.S.* Line singularities in inbound stratified fluid // J.Fluid Mech.– 1974.– 66, N 3.– P. 455–464.
7. *Стеценко О.Г.* Лінійна задача про стаціонарний рух вихора у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2004.– 6(78), N 1.– С. 62–68.
8. *Стеценко О.Г.* Стаціонарний рух вихора біля твердої стінки у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2006.– 8(80),N 4.– С. 58–64.
9. *Стеценко О.Г.* Стаціонарний рух точкового вихора в шарі скінченої товщини стратифікованого середовища // ПГМ.– 2010.– 12(84), N 1.– С. 68–75.
10. *Шебалов А.Н.* О волновом сопротивлении и подъемной силе плоского профиля произвольной формы при неустановившемся движении под свободной поверхностью // ПММ.– 1962.– 28, № 6.– С. 1104–1111.
11. *Шебалов А.Н.* Неустановившееся движение плоского контура произвольной формы под поверхностью раздела жидкостей различной плотности // Тр.Лен.Корабл.Ин-та.– 1971.– № 107.– С. 52–58.
12. *Стеценко О.Г.* Наведенне магнітне поле, обумовлене вертикальним рухом вихорової пари у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2010.– 12(84), N2.– С. 70–84.
13. *Стеценко О.Г.* Динаміка стаціонарного руху вихроджерела у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2006.– 9(80), N4.– С. 66–77.