

УДК 532.59

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ВОДЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

И. Т. СЕЛЕЗОВ*, А. А. РЯБЕНКО**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

**Национальный университет водного хозяйства и природопользования, Ровно

Получено 11.05.2011

Представлены три типа эволюционных уравнений, описывающих распространение уединенных волн в жидкости конечной глубины. Уравнения обобщают известные ранее результаты на случаи переменной глубины, подвижной донной поверхности и генерации волн в течении при наличии локальной неоднородности. Вывод уравнений основан на применении асимптотического анализа, характеризуемого большим объемом работы. Обсуждаются некоторые эффекты, предсказываемые приведенными моделями. Показано расширение области применимости первой модели путем сравнения с известными экспериментальными и численными результатами. Вторая модель характеризует влияние упругого подвижного дна на распространение волн. Третья модель приводит к нагруженному уравнению Кортевега-де Вриза и обнаруживает быструю и медленную волновые моды при течении жидкости над локальной неоднородностью в двухслойной жидкости.

Представлені три типи еволюційних рівнянь, які описують розповсюдження відокремлених хвиль у рідині кінцевої глибини. Рівняння узагальнюють раніше відомі результати на випадки змінної глибини, рухливої донної поверхні та генерації хвиль у потоці при наявності локальної неоднорідності. Вивід рівнянь заснований на застосуванні асимптотичного аналізу, що характеризується великим обсягом роботи. Обговорюються деякі ефекти, що були прогнозовані наведеними моделями. Показано розширення області застосовності першої моделі порівнянням з відомими експериментальними і чисельними результатами. Друга модель характеризує вплив пружного рухливого дна на розповсюдження хвиль. Третя модель приводить до навантаженого рівняння Кортевега-де Вриза та виявляє швидку та повільну хвильові моди при потоці рідини над локальною неоднорідністю у двохшаровій рідині.

Three types of evolution equations describing solitary waves in the finite depth fluid are presented. The equations generalize earlier known results to cases of variable depth, exciting bottom surface and wave generation in flow in the presence of a local inhomogeneity. Derivation of equations is based on application of asymptotic analysis characterizing big work. Some effects predicted presented models are discussed. Extension of field application the first model is shown by comparison with known experimental and numerical results. The second model characterizes the effect of excitable elastic bottom on wave propagation. The third model leads to the forced Korteweg-de Vries equation and discovers the fast and slow wave modes at fluid flow over a local inhomogeneity in two-layer fluid.

ВВЕДЕНИЕ

При движении жидкости даже в однородном слое при высоких скоростях появляется резкое увеличение высоты – гидравлический прыжок – в случае, когда слой замедляется от сверхкритической скорости (число Фруда $Fr > 1$) к докритической ($Fr < 1$). Это явление впервые на основе аналогии с газовой динамикой рассмотрел Рябушинский [21].

Течение над полукруглым выступом на дне исследовано в работах (Forbes & Schwartz, 1982; Jean-Marc & Vanden-Broeck, 1987; [11, 13]), где показано, что суперкритические решения существуют только для величин чисел Фруда, больших некоторой величины. В работе (Binder & Vanden-Broeck, 2007; [5]) рассмотрена задача для потенциального течения, когда верхняя заслонка перекрывает течение от свободной поверхности до некоторой глубины (ворота шлюза). В предыдущих исследованиях не удовлетворялось условие излучения от шлюза и были решения типа распростра-

няющихся волн за шлюзом. Здесь показано, что при удалении от шлюза волны не распространяются.

В (Castro-Orgaz et al., 2008; [6]) проведен анализ критического течения над крупногребневыми плотинами. Показано, что поток в гребне плотины критический только для некоторой энергии, а для большей величины он сверхкритический. В работе (Kostic & Parker, 2007; [15]) исследуется течение потока взвешенных наносов в условиях каньонов. Показано, что переход от сверхкритического до докритического потока сопровождается гидравлическим прыжком.

В работах (Grimshaw et al., 2007, 2010; [9, 10, 12]) задача о течении над выступом сведена к нагруженному уравнению Кортевега-де Вриза и показано, что при транскритическом течении выступ генерирует только вперед распространяющуюся волнистую бору, а отрицательный выступ генерирует распространяющуюся по потоку волнистую бору. Транскритические течения исследовались теоретически и экспериментально в (Lee et al., 1989; El et al., 2006; [16, 10]). Криволиней-

ные гидравлические прыжки изучали (Рябенко, 1992, 2001; Montes & Chanson, 1998; [2, 18, 20]). Профиль гребня течения водослива исследовался в (Bhajantri et al., 2006; [4]) с учетом быстро изменяющегося течения с резко выраженной кривизной линий тока в вертикальном направлении. Учет кривизны проводился в (Dressler, 1978; [8]). В работе (Dasgupta & Govindarajan, 2010; [7]) проанализированы гидравлические прыжки в течениях мелкой вязкой воды.

В данной статье рассматриваются модели, описывающие распространение нелинейных поверхностных гравитационных волн в случаях неоднородного рельефа донной поверхности, донного возбуждения и наличия обтекаемого локального препятствия в двухслойной жидкости.

1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛАБО ДИСПЕРСИОННЫХ ВОЛН НАД НЕОДНОРОДНЫМ ДНОМ

Для вывода эволюционных уравнений в жидкости малой глубины применяется метод степенных рядов, т. е. разложения искоемых функций по малой толщинной координате (глубине), следуя алгоритму, развитому в теории упругих тел малой толщины, начиная от Коши и Пуассона [3, 22, 25]. Таким образом, из полностью нелинейной постановки выведена асимптотическим методом для случая распространения плоских волн система эволюционных уравнений (Selezov, 2003; [23, 24])

$$\eta_t + (hu)_x = 0, \quad (1)$$

$$u_t + \eta_x + \alpha uu_x = \beta \left(\frac{H^3}{3} u_{xxt} + HH_x u_{xt} + \frac{H}{2} H_{xx} u_t \right) + \alpha\beta \left[(\eta H)_x u_{xt} + HH_x u u_{xx} + \frac{2}{3} \eta H u_{xxt} + \frac{H^2}{3} u u_{xxx} - \frac{H^2}{3} u_x u_{xx} + \frac{H}{2} H_{xx} u_t + \right. \quad (2)$$

$\left. + \frac{3}{2} H H_{xx} u u_x + \frac{H}{2} H_{xxx} u^2 + \eta_x H_x u_t \right] + L_1 + O(\beta^2)$, где L_1 – оператор, учитывающий нелинейности более высокого порядка, т. е. $O(\alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha^4\beta)$, $h = H(x) + \alpha\eta$.

Система (1), (2) описывает распространение уединенных волн при малых дисперсионных эффектах $\beta = \left(\frac{H_0}{l}\right)^2 \ll 1$ по сравнению с нелинейными эффектами порядка $\alpha = \frac{a}{H_0}$, где H_0 – глубина; l – горизонтальный масштаб; $a = |\eta|_{\max}$ –

амплитуда. Система эволюционных уравнений (1), (2) описывает распространение нелинейных волн при отсутствии течения.

При $\alpha \sim \beta$ система сводится к известным уравнениям над неоднородным дном (Peregrine, 1967; [19]):

$$\eta_t + (hu)_x = 0 \quad (3)$$

$$u_t + \alpha uu_x + \eta_x = \quad (4)$$

$$= \beta \left(\frac{H^3}{3} u_{xxt} + \frac{HH_x u_{xt} + \frac{H}{2} H_{xx} u_t}{L_{inh}} \right) + O(\beta^2).$$

В случае однородного дна получаем уравнение Кортевега-де Вриза

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (5)$$

При $\beta \ll 1$ и $\beta \ll \alpha$ получаем уравнения мелкой воды

$$u_t + \alpha uu_x + \eta_x = 0, \quad (6)$$

$$\eta_t + [(h + \alpha\eta)u]_x = 0.$$

Наконец, в линейном приближении $\alpha \ll 1$ из уравнений (6) следуют уравнения линейной модели:

$$u_t = -\eta_x,$$

$$\eta_t = -(hu)_x,$$

которые при $u = \partial\varphi/\partial x$ сводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Полученная система (1), (2) может быть представлена в виде суммы трех операторов: КдВ оператора, включающего члены порядка $\alpha \sim \beta \ll 1$, оператора, учитывающего неоднородность донной поверхности порядка $\beta \ll 1$ (Peregrine, 1967; [19]), и оператора, включающего нелинейности порядка $\alpha\beta$ (Селезов et al., 1983; [27]):

$$L_g = L_{kdv} + L_{inh} + L_{inh}. \quad (8)$$

$\alpha \sim \beta \quad \alpha \sim \beta \quad \alpha\beta$

Оператор (8) включает как частные случаи уравнения (3) – (7). Систему эволюционных уравнений (1), (2), так же как и систему уравнений (3), (4) и оператор (8), не представляется возможным привести к одному разрешающему уравнению даже в случаях простейших видов неоднородностей. Приведенные уравнения применялись для исследования наката солитона в более мелкую воду. Численным анализом и сопоставлением с экспериментами показано (рис. 1), что обобщенные эволюционные уравнения (1), (2) описывают распространение поверхностных волн более высокой

амплитуды по сравнению с уравнением Кортевега-де Вриза (5) (Selezov et al., 1983; [28]). Было показано также искажение формы импульса и появление хвостов в результате учета членов порядка α/β .

Исследование наката волн на наклонный берег на основе других моделей проводилось многими исследователями, отмеченными в последней работе (Доценко и Санникова, 2011; [1]). Отметим, что подход, основанный на методе степенных рядов и приводящий к системе эволюционных уравнений (1), (2), может быть обобщен на случай наличия стационарного течения над искривленным дном, следуя работе (Dressler, 1972; [8]).

2. УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НАД ПОДВИЖНЫМ ДНОМ

Рассматривается полностью нелинейная постановка задачи и предполагается, что глубина жидкости зависит не только от плановых координат x, y , но и от времени t . Применяя, как и выше, разложение по малой толщинной координате (глубине) и асимптотический анализ, получаем с точностью до членов порядка $O(\alpha, \beta, \gamma)$ систему эволюционных уравнений (Selezov, 2006; [24]):

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - c_0^2(\eta, \xi) \nabla^2 \varphi_0 - \quad (9)$$

$$-\frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \nabla^2 \varphi_0}{\partial t^2} + \frac{\beta}{6} \nabla^4 \varphi_0 = \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$F = -\xi - \beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\beta^2}{2} \nabla^2 \xi, \quad \eta_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (h_0 \vec{\nabla} \eta_0) - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (11)$$

$$c_0^2(\eta, \xi) = 1 + \alpha \eta_0 - \gamma \xi,$$

где η_0 – отклонение свободной поверхности; F – функция, зависящая от временного возбуждения донной поверхности; $\vec{\nabla}$ – оператор, зависящий от плановых координат.

В линейном приближении мелкой воды $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ для жидкости переменной глубины $h_0 \neq \text{const}$ система (9)–(11) сводится к гиперболическому уравнению

$$\vec{\nabla} \cdot (h_0 \vec{\nabla} \eta_0) - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Как видно из (12), наличие подвижного дна приводит к появлению возбуждающей силы $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ и,

следовательно, к изменению скорости распространения волн $c_{sh} = \sqrt{gH_0}$, которая при введенных безразмерных параметрах равна 1.

В случае задачи распространения плоских волн в однородной жидкости ($h_0^* = 1$) уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Рассмотрим упругое податливое основание, следующее закону

$$\xi = \frac{1}{\mu} \eta_0, \quad (14)$$

где μ – модуль постоянной основания. Это простейшая так называемая однопараметрическая модель основания (основание Винклера).

Подставляя выражение (14) в (13), получаем

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} - \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = 0, \quad (15)$$

где

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu - 1}}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что при $\mu \leq 1$ решение не существует. Следовательно, величина μ изменяется в интервале

$$1 < \mu < \infty. \quad (17)$$

При $\mu \rightarrow \infty$ получаем $w = 0$ и $\hat{c} = 1 = c_{sh}^*$, что соответствует жесткому дну. При $\mu \rightarrow 1$ $\eta = \infty$, что соответствует резонансному поведению. Изменение величины μ от ∞ до 1 увеличивает скорость распространения волн \hat{c} .

В случае более общей двухпараметрической модели основания (основание Пастернака)

$$\eta_0 = \mu \xi - G \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (18)$$

для фазовой скорости получаем следующее выражение:

$$c_p = \left[1 + \frac{G}{\mu} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \times \left[1 - \frac{1}{\mu} + \frac{G}{\mu} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (19)$$

Скорость \hat{c} , определяемая выражением (16), получается из (19) как предельный случай при $G \rightarrow 0$ или в случае, когда длина волны $\lambda \rightarrow \infty$.

Таким образом, из вышеприведенного следует, что учет податливости основания увеличивает скорость распространения волн \hat{c} . Оценки для реальных упругих свойств основания показывают, что

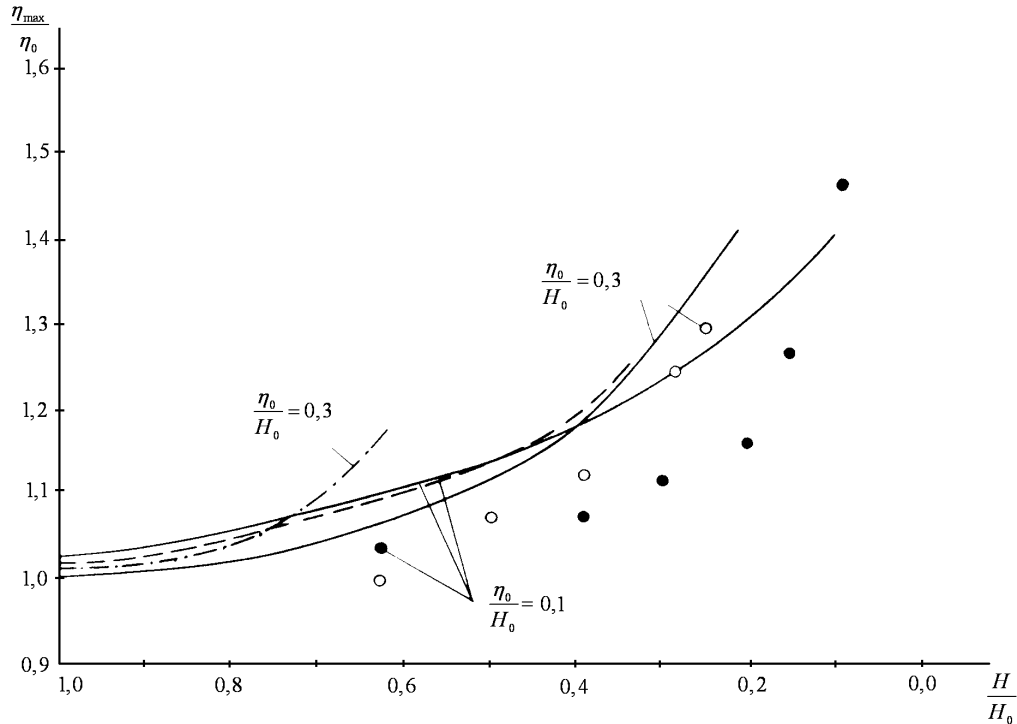


Рис. 1. Зависимость амплитуды волны η_{\max}/η_0 от глубины жидкости H/H_0 над равномерным наклонным берегом $\gamma = 1/20$ при отношениях $\eta_0/H_0 = 0.1$ и 0.3 .

Численные результаты: — — — (0.1), — · — · — (0.3) (Madsen & Mei, 1969) [17]

Экспериментальные данные: ○(0.1), ●(0.3) (Kishi & Sacki, 1966) [14]

Численное решение уравнений (1), (2): —

скорость распространения волн в мелкой воде c_{sh} может возрасти на 20% (Selezov, 2006; [24]).

Эффекты, предсказываемые приведенными выше моделями, могут иметь место и в случае течения жидкости с околоскритическими скоростями.

Анализ околоскритических течений, возникающих при изменении глубины жидкости, предсказывает появление солитообразных решений. Это показано теоретически и экспериментально. Однако, кроме числа Фруда, необходимо учитывать также искривление потока в вертикальной плоскости (Рябенко, 1992; [2]).

Околоскритические течения, т.е. безнапорные потоки жидкости, установившиеся во времени с глубинами, близкими к критической, изучались в работе (Рябенко, 1992; [2]). В экспериментальных исследованиях было показано, что на существование околоскритических течений может существенно влиять распределение гидродинамического давления по глубине потока, т.е. отклонение от гидростатического закона. Ниже представлена модель, предсказывающая солитоноподобные волны

при околоскритических скоростях в случае течения двухслойной жидкости (Selezov et al., 1998, 1999) [26, 27].

3. ГЕНЕРАЦИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН ПРЕПЯТСТВИЕМ ПРИ ТЕЧЕНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Такая задача моделирует течение верхней пресной и нижней соленой жидкостей при наличии препятствия на границе их раздела. В этом случае задача приводится асимптотическим анализом к нагруженному уравнению Кортевега-де Вриза.

Задача формулируется для течения невязкой несжимаемой жидкости: уравнения Лапласа для верхней жидкости (s) и нижней (i)

$$\varepsilon\phi_{s,xx} + \phi_{s,zz} = 0 \quad (20)$$

$$\text{при } z \in (1 + \eta_i + \varepsilon^2 f(x), 1 + \sigma + \eta_s),$$

$$\varepsilon\phi_{i,xx} + \phi_{i,zz} = 0, \quad (21)$$

$$\text{при } z \in (0, 1 + \eta_i - \varepsilon^2 f(x)).$$

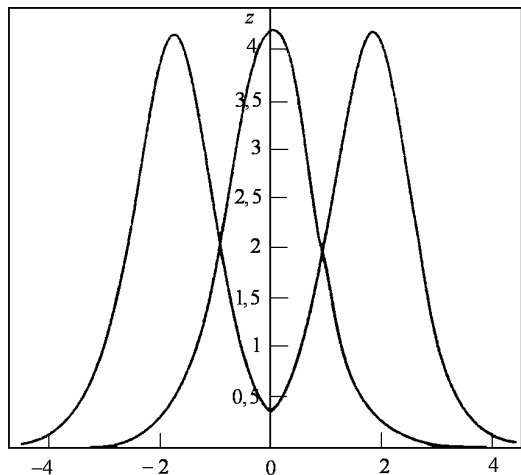


Рис. 2. Профиль возвышения свободной поверхности η_s при $\rho = 0.6, \sigma = 1, \gamma = 1, \lambda = 1.5, U_{cr} = 1.88$ (быстрая мода)

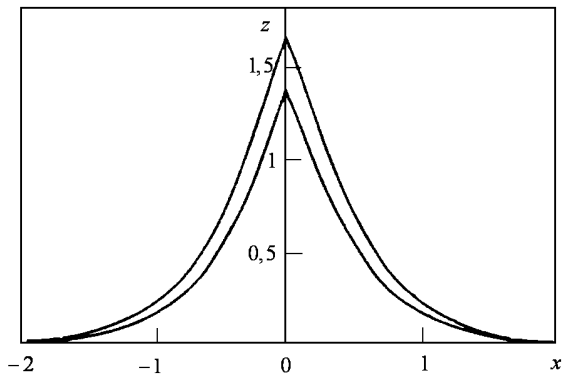


Рис. 3. Профиль возвышения свободной поверхности η_s при $\rho = 0.6, \sigma = 1, \gamma = 1, \lambda = 1.5, U_{cr} = 0.67$ (медленная мода)

На верхней свободной поверхности удовлетворяется кинематическое условие

$$\varepsilon \eta_{s,t} + (U_s + \phi_{s,x}) \eta_{s,x} = \varepsilon^{-1} \phi_{s,y} \quad (22)$$

на $z = 1 + \sigma + \eta_s$

и динамическое условие

$$\varepsilon \phi_{s,t} + \frac{1}{2} (\phi_{s,x}^2 + \varepsilon^{-1} \phi_{s,z}^2) + U_s \phi_{s,x} + \eta_s = 0 \quad (23)$$

на $z = 1 + \sigma + \eta_s$.

На донной поверхности условие

$$\phi_{i,z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (24)$$

Кинематическое условие сверху поверхности раздела имеет вид

$$\varepsilon \eta_{i,t} + (U_s + \phi_{s,x}) (\eta_{i,x} + \varepsilon^2 f_{,x}) = \varepsilon^{-1} \phi_{s,z} \quad (25)$$

на $z = 1 + \eta_i + \varepsilon^2 f$

и аналогичное снизу при $z = 1 + \eta_i - \varepsilon^2 f$, а также динамическое на $z = 1 + \eta_i$.

Задача (20)–(25) решается методом асимптотических разложений до третьего порядка. Из условия разрешимости второго порядка устанавливается связь критических скоростей течения верхней U_s и нижней U_i жидкостей. В результате из условия разрешимости третьего порядка выведено нагруженное уравнение Кортевега-де Вриза

$$m_1 \eta_{s,t}^{(1)} + m_2 \eta_s^{(1)} + m_3 \eta_{s,x}^{(1)} + m_4 \eta_{s,xxx}^{(1)} = \frac{1}{2} F_{,x}, \quad (26)$$

$$F(x) = \left(U_s^{(0)} \right)^2 \left[f(x) \left(\left(U_i^{(0)} \right)^2 - 1 - \frac{\sigma}{\left(U_s^{(0)} \right)^2} \right) \right],$$

$$\eta_s^{(1)}(-\infty) = \eta_{s,x}^{(1)}(-\infty) = \eta_{s,xx}^{(1)}(-\infty) = 0.$$

Возбуждающая функция задается в виде $F(x) = 2pP\delta(x)$, где $\delta(x)$ – δ -дельта-функция Дирака; P – амплитуда. При фиксированных параметрах ρ, σ, U_{cr1} и U_{cr2} на основе (26) показано, что существуют две моды: быстрая и медленная. При этом решение для быстрой моды разделяется на две уединенных волны: одиночную и две заостренных. На рис. 2 и 3 показаны профили этих волн. Такая картина возможна при сливе двухслойной жидкости, когда образуется солитонное решение при околоскритической скорости.

ВЫВОДЫ

Приведены и характеризуются три модели распространения нелинейных волн в жидкости со свободной поверхностью. Первая модель над неоднородным дном при большой нелинейности и слабой дисперсии. Показано сопоставлением с экспериментом расширение области применения уравнений на случай волн большей амплитуды. Вторая модель описывает распространение нелинейных волн над возбуждаемым по времени дном. Показано увеличение распространения волн при наличии податливого основания. Третья модель в двухслойной жидкости приводит к возмущен-

ному уравнению Кортевега-де Вриза, предсказывающему гидравлический прыжок при наличии локальной неоднородности.

1. Доценко С.Ф., Санникова Н.К. Накат поверхностных волн различной формы на наклонный берег // Мор. гидрофиз. журн. – 2011. – № 1. – С. 3–14.
2. Рябенко А. А. Типы, особенности и условия существования околоритических течений // Гидротехническое строительство. – 1992. – № 5. – С. 9–13.
3. Селезов И. Т. Математическое построение волновых гиперболических моделей упругих пластин и оболочек // "Асимптотичні методи механіки і комплексний аналіз". Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – С. 289–296.
4. Bhajantri M.R., Eldho T.I., Deolalikar P.B. Hydrodynamic modeling of flow over a spillway using a two-dimensional finite volume-based numerical model // Sadhana. – 2006. – **31**, Part 6. – P. 743–754.
5. Binder B.J., Vanden-Broeck J.-M. The effect of disturbances on the flows under a sluice gate and past an inclined plate // J. Fluid. Mech. – 2007. – **576**. – P. 475–490.
6. Castro-Orgaz O., Giraldez J.V., Ayuso J.L. Critical flow over circular crested weirs // J. Hydraulic Eng., ASCE – 2008. – **134**, N 11. – P. 1661–1664.
7. Dasgupta R., Govindarajan R. Nonsimilar solutions of the viscous shallow water equations governing weak hydraulic jumps // Phys. Fluids. – 2010. – **22**. 112108. – P.
8. Dressler R.F. New nonlinear shallow flow equations with curvature // J. Hydraul. Res. – 1978. – **16**(3). – P. 205–222.
9. Ee B.K., Grimshaw R.H.J., Zhang D.-H., Chow K.W. Steady transcritical flow over a hole: Parametric map of solutions of the forced Korteweg-de Vries equation // Phys. Fluids. – 2010. – **22**. 056602. – P. 1–9.
10. El G.A., Grimshaw R.H.J., Smyth N.F. Unsteady undular bores in fully nonlinear shallow-water theory // Phys. Fluids. – 2006. – **18**. 027104. – P. 1–17.
11. Forbes L.K., Schwartz L.W. Free-surface flow over a semicircular obstruction // J. Fluid. Mech. – 1982. – **114**. – P. 299–314.
12. Grimshaw R.H., Zhang D.-H., Chow K.W. Generation of solitary waves by transcritical flow over a step // J. Fluid Mech. – 2007. – **587**. – P. 235–254.
13. Jean-Marc Vanden-Broeck. Free-surface flow over an obstruction in a channel // Phys. Fluids. – 1987. – **30** (8). – P. 2315–2317.
14. Kishi T., Saeki H. The shoaling breaking and run-up of the solitary wave on impermeable rough slopes // Proc. 10th Conf. Coast. Eng., Tokio. – 1966. – **1**. – P. 284–289.
15. Kostic S., Parker G. Conditions under which a supercritical turbidity current traverses an abrupt transition to vanishing bed slope without a hydraulic jump // J. Fluid. Mech. – 2007. – **586**. – P. 119–145.
16. Lee S.-J., Yates G.T., Wu T.Y. Experiments and analyses of upstream-advancing solitary waves generated by moving disturbances // J. Fluid Mech. – 1989. – **199**. – P. 569–593.
17. Madsen O.S., Mei C.C. The transformation of solitary wave over an uneven bottom // J. Fluid Mech. – 1969. – **39**. – P. 781–791.
18. Montes J.S., Chanson H. Characteristics of undular hydraulic jumps: experiments and analysis // J. Hydraulic Eng. – 1998. – **124**, N 2. – P. 192–205.
19. Peregrine D.H. Long waves on a beach // J. Fluid Mech. – 1967. – **27**, N 4. – P. 815–827.
20. Riabenko A.A. Free surface profile of wavelike near-critical flows and solitary solutions of some differential equations // Int. J. Fluid Mech. Research. – 2001. – **28**, N 6. – P. 834–856.
21. Riaboushinsky D. Sur l'analogie Hydraulique des Mouvements dun Fluid Compressible // C.R. Acad. Sci. – 1932. – **195**. – P. 998–1002.
22. Selezov I.T. Wave hydraulic models as mathematical approximations // Proc. 22th Congress, Int. Association for Hydraulic Research (IAHR), Lausanne, 1987. Techn. Session B. – 1987. – P. 301–306.
23. Selezov I. Nonlinear wave propagation in close to hyperbolic systems // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. 8th Int. Conf. in Magdeburg. – 2000. – Vol. 2; Int. Ser. of Numerical Mathematics. – Vol. 141 / Ed. by H. Freistuhler and G. Warnecke. Basel / Switzerland: Birkhauser Verlag, 2001. – P. 851 – 860.
24. Selezov I.T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2006. – **33**, N 1. – P. 44–54.
25. Selezov I.T. Some degenerate and generalized wave models in elasto- and hydrodynamics // J. Applied Mathematics and Mechanics. – 2003. – **67**, N 6. – P. 871–877.
26. Selezov I., Huq P., Mironchuk M., Volynski R. Evolution equation for waves forced by a thin obstacle in a two-layer fluid // Proc. 27th Israel Mechanical Engineering Conf., Technion – Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 19–20 May 1998. – P. 325–326.
27. Selezov I.T., Mironchuk M.V., Huq P. Evolution equation for waves forced by a slender obstacle in a two-layer fluid // Доп. НАН України. – 1999. – № 4. – С. 77–82.
28. Selezov I.T., Zheleznyak M.I., Tkachenko V.A., Yakovlev V.V. On the numerical modeling of tsunami wave generation and propagation // Marine Geodesy. – 1983. – **6**, N 2. – P. 149–165.