

УДК 532.516

## ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ ПОТОКОМ В КАНАЛЕ СО СТЕНОЗАМИ

И. В. ВОВК, В. С. МАЛЮГА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 17.08.2011 ◊ Пересмотрено 17.10.2011

Рассматривается задача излучения звука потоком жидкости в плоском канале с двумя последовательно расположенными стенозами. В межстенозной области такого течения может происходить самовозбуждение автомодельных колебаний среды, которые являются источником звуковых колебаний в канале. Акустическая задача решается для двух областей: для однородного плоского канала, находящегося вниз по течению от второго стеноза, а также для области с геометрическими неоднородностями, находящейся вверх по потоку от второго стеноза. Для решения данной задачи применяется метод частичных областей.

Розглядається задача випромінювання звуку потоком рідини в плоскому каналі з двома послідовно розташованими стенозами. В міжстенозній області такої течії може відбуватись самозбудження автомодельних коливань середовища, які є джерелом звукових коливань у каналі. Акустична задача розв'язується для двох областей: для однорідного плоского каналу, розташованого вниз за течією від другого стенозу, а також для області з геометричними неоднорідностями, розташованої угору проти потоку від другого стенозу. Для розв'язання даної задачі застосовується метод часткових областей.

The problem of sound radiation by the flow in a flat duct with two consecutive stenoses is addressed. Self-oscillations of the flow may occur in the inter-stenoses area and be the source of the sound vibrations in the duct. The acoustic problem is solved for two domains: for the homogeneous flat duct situated downstream from the second stenosis and also for the domain with geometrical irregularities situated upstream from the second stenosis. The method of partial domains is used for the solution of the latter problem.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследовались акустические характеристики золотых тонов, возникающих при обтекании кругового цилиндра. Был предложен метод оценки звукового поля, генерируемого потоком, который основывался на двух принципиальных предположениях:

- мощность звука, порожденного потоком, набегающим на препятствия (в данном случае стенозы), существенно меньше мощности той части потока, которая набегаёт на препятствие;
- порожденный потоком звук не влияет на характер самого потока.

В данной работе мы применяем аналогичный подход. Мы также полагаем, что по третьей координате канал и стенозы имеют бесконечную длину и искомые поля вдоль этой координаты неизменны. Это существенно упрощает задачу, поскольку теперь ее можно рассматривать как плоскую.

Тогда задачу определения характеристик звукового поля, порождаемого течением в канале со стенозами, можно разделить на два этапа. На первом этапе рассматривается гидродинамическая задача. В силу того, что размеры источников звука, порождаемого потоком (в данном случае размеры стенозов и межстенозных ниш), малы по сравнению с длиной звуковой волны [6, 22], гидродинами-

ческую задачу можно рассматривать в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. С этой целью численно решаем нестационарную систему уравнений Навье-Стокса. На основе полученного решения определяем частоту процесса образования вихрей в межстенозной области, число Струхала и распределение скорости на входе  $u_1(y, t)$  и на выходе  $u_2(y, t)$  из отверстия нижнего стеноза в течение одного периода этого процесса [4].

После этого можно перейти ко второму этапу и рассмотреть акустическую задачу, заключающуюся в определении звукового поля, генерируемого таким течением. Действительно, распределение скорости на входе в отверстие нижнего стеноза  $u_1(y, t)$ , рассчитанное в течение одного периода, можно трактовать как граничное условие при постановке акустической задачи в области, лежащей выше по потоку от нижнего стеноза. И, соответственно, распределение скорости на выходе из отверстия нижнего стеноза  $u_2(y, t)$  можно принять за граничное условие при постановке акустической задачи в области, лежащей ниже по потоку от нижнего стеноза. Тогда решение задачи об определении звукового поля сводится к решению двух хорошо известных плоских задач: акустической задачи в плоском полубесконечном волноводе постоянного сечения, на торце которого задано некоторое, периодически изменяющееся распределение продольной скорости, и аналогичная акусти-

ческой задача в плоском составном волноводе [2]. При этом, если числа Маха относительно малы, то движением потока можно пренебречь и считать, что звук распространяется так же, как в неподвижной среде. После решения этих двух задач можно определить все акустические характеристики звуковых полей в областях, расположенных по обе стороны от нижнего стеноза, в том числе распределение звукового давления и колебательной скорости.

## 1. ПОСТАНОВКА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Постановка гидродинамической задачи и подробное описание численного алгоритма ее решения приведены в работах [4, 5, 27]. Расчетная область и принятые обозначения представлены на рис. 1. Предполагается, что стенки канала, а также стенки стенозов неподвижные и абсолютно жесткие, а поток жидкости попадает в расчетную область через левую границу  $x = 0; 0 \leq y \leq D_1$  и покидает расчетную область на правой границе  $x = L_1; 0 \leq y \leq D_1$ .

Вверх по потоку от первого стеноза ( $0 \leq x \leq L_2$ ), а также вниз по потоку от второго стеноза ( $L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \leq x \leq L_1$ ) канал имеет ширину  $D_1$ , в то время как в межстенном пространстве ( $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4$ ) ширина канала равна  $D_4 \leq D_1$ . То есть в межстенном пространстве может иметь место некоторое сужение канала.

В силу описанного в предыдущем разделе подхода задача о течении в канале с двумя последовательно расположенными стенозами формулируется в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. Такой процесс описывается нестационарной системой уравнений Навье-Стокса. В безразмерных физических переменных их можно представить в тензорной форме следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{UU} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где  $p$  – скалярное поле давления;  $\mathbf{U}$  – векторное поле скорости;  $\mathbf{UU}$  – тензор второго ранга, определенный как внешнее произведение векторов. Покомпонентное представление этих уравнений можно найти в учебной литературе (см., например, [3]).

Для обезразмеривания приведенных уравнений движения за масштаб длины принималось расстояние между стенозами  $L_4$ , за масштаб скорости –

скорость  $V_2$ , т.е. скорость потока в отверстии первого стеноза, осредненная по вертикальному сечению, за масштаб времени – величина  $L_4/V_2$ , а за масштаб давления – удвоенный скоростной напор в отверстии стеноза  $\rho V_2^2$ . Детальные обоснования такого выбора масштабов приведены в [4]. Основным параметром такой задачи, входящим в уравнения движения, является число Рейнольдса, которое определяется следующим образом  $\text{Re} = V_2 L_4 / \nu$ , где  $\nu$  – кинематическая вязкость среды.

На границе расчетной области задавались следующие граничные условия для скорости: равномерный поток на входе в расчетную область при  $x = 0$ , условие прилипания  $U = 0$  на твердых поверхностях канала и стенозов, а также «мягкие» граничные условия типа линейной экстраполяции, соответствующие равенству нулю нормального градиента скорости, на выходе из расчетной области при  $x = L_1$ . Для давления условие равенства нулю нормального градиента формулировалось по всей границе расчетной области [8].

Значения геометрических параметров канала выбирались такие же, как в экспериментальной работе [6], а именно:  $D_1 = 18$  мм,  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $L_1 = 150$  мм,  $L_2 = 20$  мм,  $L_3 = L_5 = 1$  мм,  $L_4 = 5.8$  мм. Кинематическая вязкость принималась равной вязкости воздуха при температуре  $20^\circ\text{C}$ :  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Определенные выше размеры области при расчетах не изменялись, а ширина канала в межстенной области  $D_4$  варьировалась в пределах 6 – 18 мм.

Алгоритм численного решения сформулированной задачи детально описан в [5] и использован в [4] для численного моделирования течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Верификация алгоритма проведена в работе [1] на задаче обтекания кругового цилиндра, для которой имеется большой массив экспериментальных и расчетных данных. Описанный алгоритм решения основан на использовании метода конечных объемов (см. [7 – 9]), который в настоящее время можно считать наиболее популярным численным подходом в задачах механики жидкостей.

Для дискретизации расчетной области использовалась неортогональная сетка со сгущением узлов в отверстиях стенозов (210 точек по вертикальному сечению отверстия, т.е. 208 элементарных ячеек) и со сгущением узлов при приближении к стенке. Такое количество точек в вертикальном сечении отверстия стеноза было выбрано из соображений гладкости профиля скорости в сечении. Точки сетки принимались за вершины контрольных объемов, а значения неизвест-

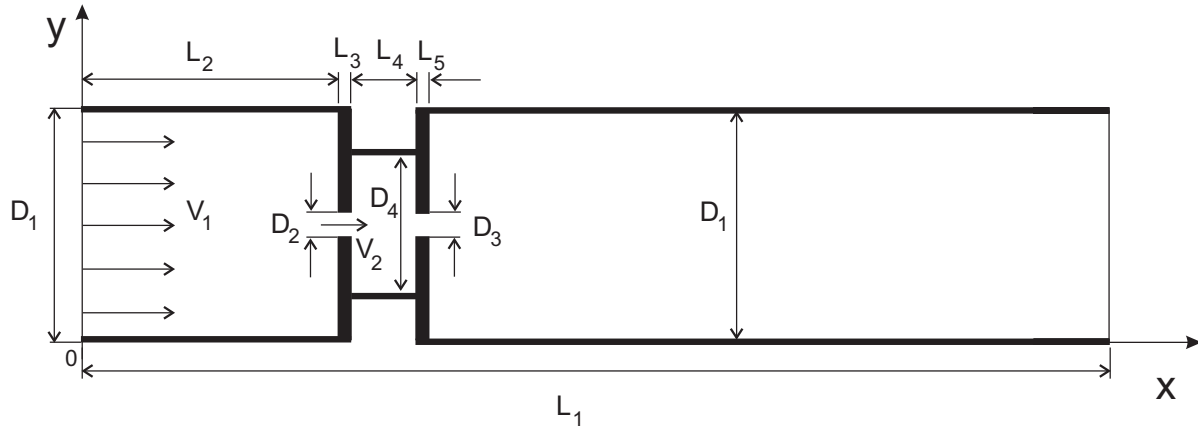


Рис. 1. Геометрия расчетной области

ных функций определялись в центроидах ячеек. Метод конечных объемов, вообще говоря, не накладывает ограничений на геометрические характеристики каждого из контрольных объемов, однако в данном исследовании мы использовали кусочно-структурированную сетку с четырехугольной формой ячейки (но в общем случае не прямоугольной), что более естественно соответствовало геометрии задачи, давало меньшее число ячеек и более быструю сходимость по сравнению с неструктурированными триангулярными сетками. С целью верификации полученных результатов расчеты выполнялись при различном числе контрольных объемов и при различных значениях коэффициентов сгущения узлов сетки. Представленные в данной работе результаты получены на сетке с 264496 контрольных объемов с минимальным шагом 0.004 мм вблизи угловых точек у отверстий стенозов.

При расчетах использовались библиотеки тулбокса с открытым кодом OpenFOAM [10, 11]. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему применялась общая процедура Гаусса, согласно которой интеграл по объему представляется через интеграл по поверхности ячейки, а значение функции на поверхности ячейки интерполируется из значений функции в центроидах соседних ячеек. Для интерполяции конвективных членов использовалась TVD схема, имплементированная в [11] (limitedLinearV), которая согласно классификации [13] соответствует обобщенной кусочно-линейной схеме Chakravarthy-Osher [12]. На ортогональных участках сетки нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки, необходимые при вычислении диффузионных членов по теореме Гаусса, вычислялись из значений скорости в центроидах соседних ячеек по схеме вто-

рого порядка. На неортогональных участках сетки использовалась итерационная процедура коррекции погрешности, вызванной неортогональностью сетки [14]. В качестве схемы дискретизации производной по времени использовалась неявная трехточечная несимметричная схема второго порядка с разностями назад (backward differencing).

Для связанного расчета поля скорости и давления использовалась процедура PISO pressure implicit with splitting of operators), предложенная Issa [15], с числом корректоров 4. Детальное описание процедуры PISO может быть также найдено в учебной литературе по вычислительной гидромеханике (см., например, [3, 9]). Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений применялись солверы PCG и PBiCG – итерационные солверы, использующие методы сопряженных и бисопряженных градиентов с предобуславливанием для симметричных и асимметричных матриц соответственно. В качестве предобуславливателя были выбраны процедуры DIC (предобуславливатель, основанный на упрощенной схеме неполной факторизации Холецкого) и DILU (предобуславливатель, основанный на упрощенной неполной LU факторизации) для симметричных и асимметричных матриц соответственно [16].

Верификация предложенного численного алгоритма была проведена в работе [1] на задаче обтекания кругового цилиндра, для которой имеется большой массив экспериментальных и расчетных данных. Полученные в работе [1] результаты продемонстрировали хорошее согласование с расчетными и экспериментальными результатами других авторов в том диапазоне чисел Рейнольдса, в котором возможно применение ламинарных солверов.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ

Численное моделирование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами было проведено с использованием вышеизложенного численного алгоритма в работах [4, 5, 27]. В [5] также предполагалось, что в межстенной области может иметь место сужение канала. Здесь мы кратко изложим полученные в данных работах результаты.

На рис. 2 представлено поле завихренности течения при различных значениях числа Рейнольдса. Цветом передается значение завихренности<sup>1</sup>. Синий цвет соответствует отрицательной завихренности (закручивание элемента жидкости по часовой стрелке), красный – положительной завихренности (закручивание элемента жидкости против часовой стрелки). Хорошо видно как поток, входя из широкой левой части канала в узкое отверстие первого стеноза, образует в межстенном пространстве струю. На передних поверхностях первого стеноза формируются два ламинарных пограничных слоя (верхний и нижний), которые после отрыва от передних кромок первого стеноза сносятся потоком в межстенную область, где формируют два свободных сдвиговых слоя (слои смещения) на верхней и нижней границах струи. При этом скорость движения среды  $V_x$  в слое смещения изменяется драматически. Так, при продвижении от внутренней поверхности слоя смещения к его внешней поверхности скорость движения среды снижается примерно на порядок.

На пути от левого стеноза к правому сдвиговые слои несколько расширяются и поэтому общая толщина струи со сдвиговыми слоями при подходе ко второму стенозу становится больше ширины его отверстия. Это приводит к тому, что каждый сдвиговый слой разрезается передними кромками отверстия второго стеноза. Внутренние части сдвиговых слоев проходят через отверстие второго стеноза и покидают межстенную область, а внешние слои заворачивают в верхнюю и нижнюю ниши, где формируют два основных циркуляционных течения (два крупных вихря). Вращаясь в межстенных нишах эти два основных вихря переносят часть кинетической энергии струи из ра-

йона входа ее в отверстие второго стеноза в район выхода струи из первого стеноза (корень струи). Таким образом, два крупных вихря, образованные в межстенных нишах, выполняют роль канала обратной связи, по которому часть энергии с выхода рассматриваемой нелинейной динамической системы переносится на ее вход. А как известно из теории автоколебаний, наличие обратной связи в нелинейных системах создает предпосылки для возникновения в ней автоколебательных процессов. Конечно, возникнут автоколебания или нет – зависит от многих факторов, главными из которых являются относительный уровень энергии в канале обратной связи и его запаздывание по времени (или фаза). При относительно низкой скорости потока указанные факторы не оказывают достаточного влияния на корень струи и поэтому автоколебаний в системе не возникает (см. рис. 2, а для  $Re = 2088$  ( $V_1 = 0.6$  м/с)).

Как видно, с увеличением значения числа Рейнольдса картина течения становится существенно отличной. Теперь энергии в канале обратной связи оказывается достаточно, чтобы влиять на форму струи. При  $Re = 3132$ , начиная примерно с середины межстенного пространства, струя приобретает извилистый характер, а в сдвиговых слоях образуется характерная последовательность вихрей. При этом ряды вихрей в верхнем и нижнем сдвиговых слоях располагаются относительно друг друга в шахматном порядке. Набегая на отверстие второго стеноза, эти ряды вихрей вызывают несимметричные (относительно оси струи) периодические колебания вертикального профиля скорости в выходном сечении второго стеноза. Что касается больших вихрей, образующихся в нишах и являющихся, по-сути, каналом обратной связи, то теперь их слои имеют не сплошной характер, а прерывистый.

Можно отметить ряд важных свойств, присущих рассматриваемой гидродинамической системе:

- Автоколебания в системе возникают только после достижения некоторой пороговой скорости потока, что в общем типично для всех гидроаэродинамических систем, в которых наблюдаются автоколебания. В рассматриваемой системе автоколебания начинают возникать при значениях  $Re$ , лежащих между 2088 и 3132.
- Две последовательности вихрей, которые образуются в сдвиговых слоях, располагаются в шахматном порядке. Следовательно, верхние и нижние вихри достигают передних кромок

<sup>1</sup>К сожалению, цветные рисунки представлены только в электронной версии статьи, размещенной в интернете на сайте Института гидромеханики НАН Украины ([www.hydromech.kiev.ua](http://www.hydromech.kiev.ua)). В печатном же варианте поле завихренности представлено в градации серого, что не позволяет передать информацию о направлении завихренности. Авторы приносят свои извинения и рекомендуют обратиться к электронному варианту статьи.

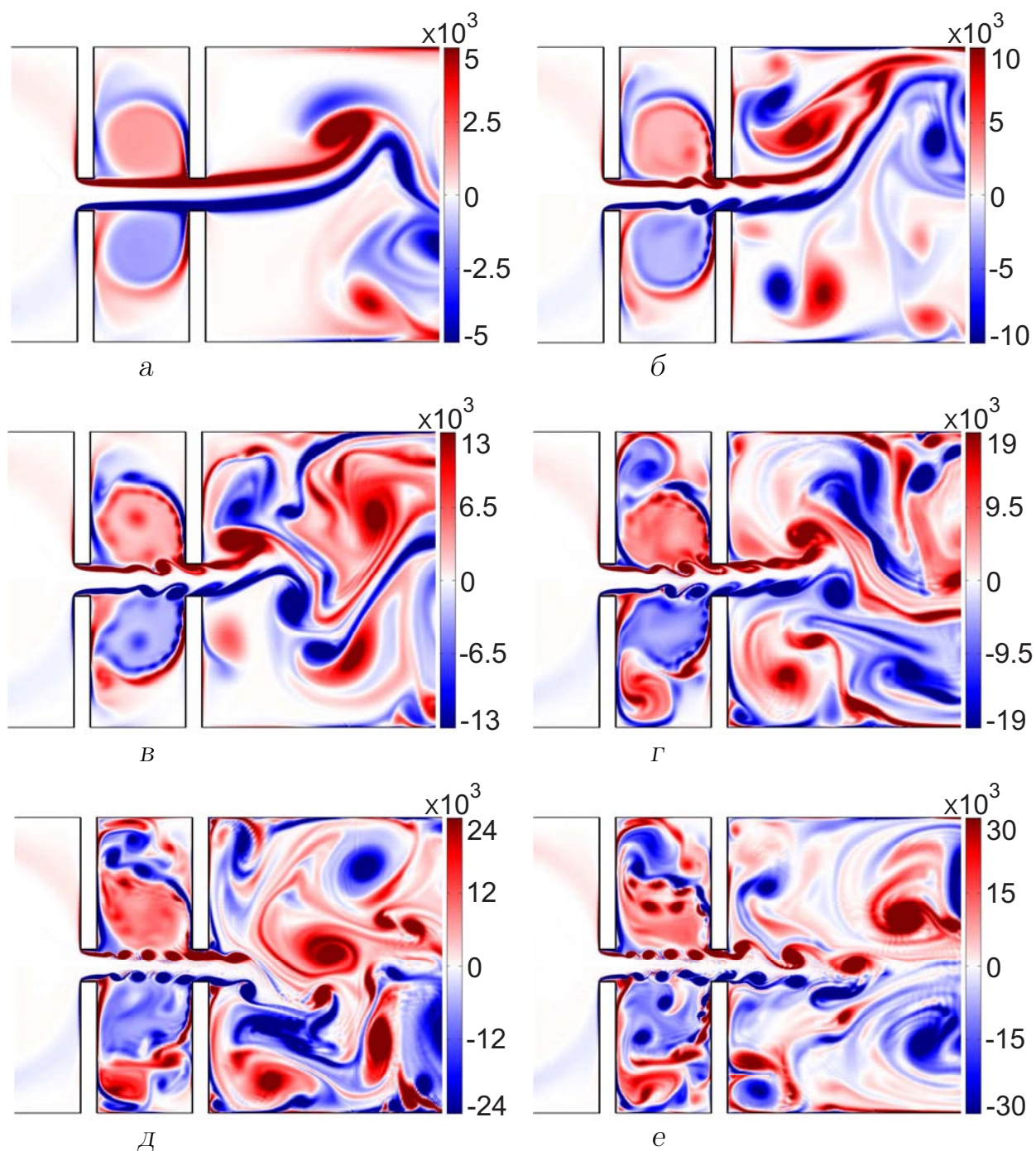


Рис. 2. Поле завихренности при различных значениях числа Рейнольдса (в электронном варианте статьи представлены цветные рисунки). Ширина межстенной области равна ширине канала, т. е.  $D_4 = D_1$ :  
 а –  $Re = 2088$  ( $V_1 = 0.6$  м/с), б –  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с), в –  $Re = 4176$  ( $V_1 = 1.2$  м/с), г –  $Re = 6264$  ( $V_1 = 1.8$  м/с), д –  $Re = 8352$  ( $V_1 = 2.4$  м/с), е –  $Re = 10440$  ( $V_1 = 3$  м/с)

Табл. 1. Значения числа Струхала при различных значениях числа Рейнольдса. Также приведены размерные величины скорости на входе  $V_1$  и периода вихребразования  $T$

Re	$V_1$ (м/с)	$T$ (с)	St
3132	0.9	$2.77 \cdot 10^{-4}$	2.58
4176	1.2	$1.94 \cdot 10^{-4}$	2.77
6264	1.8	$1.16 \cdot 10^{-4}$	3.08
8352	2.4	$0.74 \cdot 10^{-4}$	3.63

второго стеноза поочередно.

- Период автоколебаний уменьшается с ростом скорости потока. Значения периода  $T$  и числа Струхала  $St = L_4/(V_2 T)$  при различных значениях числа Рейнольдса приведены в табл. 1.
- С ростом скорости потока также растет амплитуда колебаний профиля скорости, что вполне естественно, поскольку растет кинетическая энергия потока.
- С увеличением скорости потока зона, где начинают сворачиваться вихри в сдвиговых слоях, смещается в сторону первого стеноза. Дальнейшее увеличение скорости до  $V_1 = 2.4$  м/с ( $Re = 8352$ ) приводит к тому, что зона сворачивания вихрей в сдвиговом слое смещается к задней кромке отверстия первого стеноза.
- При дальнейшем увеличении скорости потока образование вихрей в сдвиговых слоях в межстенной области все еще наблюдается, однако описанные выше закономерности движения потока в межстенной области могут не сохраняться. Характер движения потока может оказаться нестабильным и принимать несколько режимов, чередующихся со временем. Нарушается периодичность процесса сворачивания вихрей и их набегания на второй стеноз.

Выше было рассмотрено численное решение задачи о течении жидкости в плоском канале при наличии следующих друг за другом двух стенозов, то есть предполагалось, что ширина канала в межстенной области была равна ширине канала за стенозами. В работе [5] рассмотрена аналогичная задача, однако предполагалось, что в межстенном пространстве может иметь место некоторое сужение канала. Расчеты проводились только для  $Re = 3132$ , а ширина канала в  $D_4$  варьировалась. В частности, было показано, что при уменьшении глубины межстенных ниш вдвое вихри в сдвиговых слоях также расположены в шахматном по-

рядке (рис. 3, а). И, следовательно, в колебаниях профиля скорости в отверстии второго стеноза доминирует антисимметричная составляющая. При уменьшении глубины межстенных ниш вчетверо возмущения в сдвиговых слоях уже будут иметь симметричный характер относительно оси канала (рис. 3, б) и, следовательно, колебания профиля скорости в отверстии второго стеноза будут симметричными. Кроме того, следует отметить, что в данной задаче период симметричных автоколебаний будет почти вдвое больше, чем период колебаний в соответствующей задаче с глубокими межстенными нишами. Так, при  $Re = 3132$  период колебаний в задаче с глубокими нишами был равен  $T = 2.77 \cdot 10^{-4}$ . В случае же симметричного течения в задаче с мелкими нишами период будет  $T = 5.2 \cdot 10^{-4}$ .

Согласно предложенному методу оценки звукового поля, изложенному в разделе 2, для нас интерес представляют прежде всего колебания профиля продольной скорости на входе и на выходе из отверстия второго стеноза. С этой целью распределение скорости  $U_x$  в сечениях  $S_1$  и  $S_2$  было разложено на стационарную и осциллирующую составляющие:

$$u_k(y, t) = u_k^{(s)}(y) + u_k^{(o)}(y, t), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

где стационарная часть профиля скорости определяется как нулевой член разложения Фурье по времени:

$$u_k^{(s)}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T u_k(y, t) dt, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

На рис. 4 представлена осциллирующая часть скорости  $u_k^{(o)}(y, t)$  в различные моменты периода колебаний через интервал  $T/8$  для случая  $Re = 3132$ . Видно, что профиль скорости имеет сложную форму, однако антисимметричная часть является доминирующей. Профиль скорости в сечении  $S_2$  для течений с другими значениями числа Рейнольдса представлены в [1].

Естественно, требует проверки вопрос: являются ли колебания профилей скорости  $u_k^{(o)}$ ,  $k = 1, 2$  периодическими? Чтобы ответить на этот вопрос можно представить исследуемые профили скорости в виде ряда Фурье по координате  $y$ :

$$u_k^{(o)}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{2n\pi y}{D_3} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \cos \frac{2n\pi y}{D_3}, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$



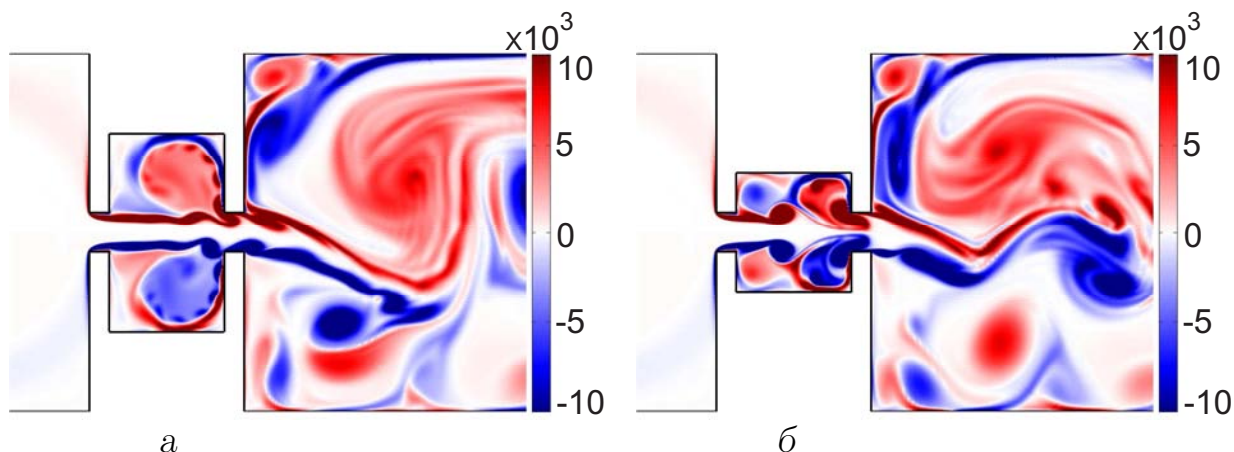


Рис. 3. Поле завихренности при уменьшении вертикального размера (глубины) межстенозных ниш (в обоих случаях  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с)):

$$a - D_4 - D_3 = (D_1 - D_3)/2, \quad б - (D_4 - D_3) = (D_1 - D_3)/4$$

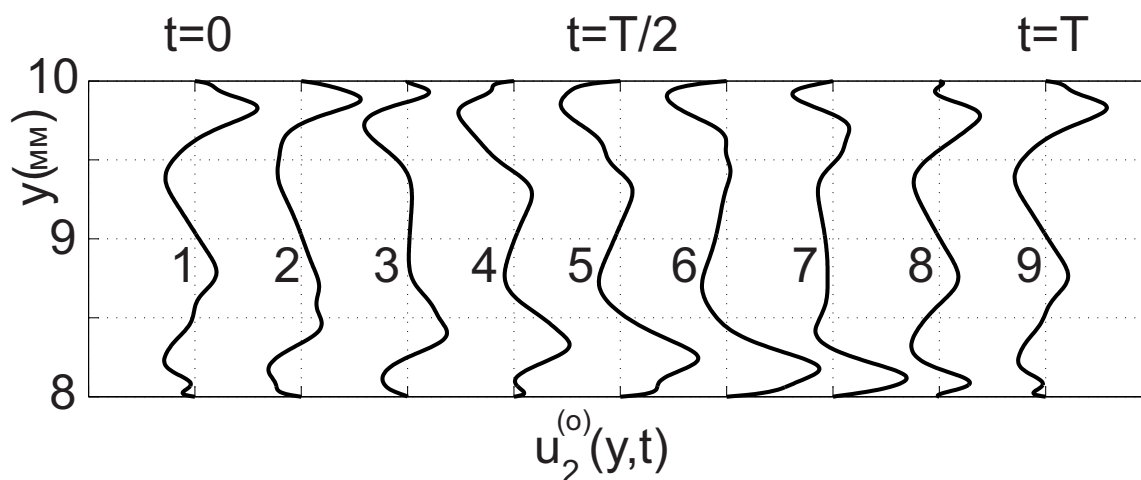


Рис. 4. Осциллирующая часть профиля скорости  $u_2^{(o)}(y, t)$  на выходе из отверстия второго стеноза для случая  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с). Кривые 1 - 9 представлены через интервалы времени  $T/8$ . Кривая 1 показывает распределение скорости в момент  $t = 0$ , кривая 9 - в момент  $t = T$

На рис. 5 показано изменение во времени коэффициентов  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$ , которые имеют наибольшую амплитуду колебаний. Следует прежде всего отметить, что помимо быстрых колебаний, вызванных набеганием на второй стеноз вихрей, образовавшихся в межстенозном пространстве, имеют место медленные колебания, вызванные колебаниями струи, вытекающей из отверстия второго стеноза в канал. Автоколебания струи, вытекающей из отверстия в канал, исследовались в ряде работ (см., например, библиографию в работе [17], а также [18]). Однако в данной работе медленные автоколебательные колебания струи, истекающей из отверстия второго стеноза, не представляют интерес,

поскольку мы исследуем звуковое поле, вызванное быстрыми периодическими процессами, зарождающимися в межстенозном пространстве. Поэтому низкочастотные колебания профиля скорости, вызванные медленными колебаниями струи, выходящей из отверстия в канал, были численно отфильтрованы и извлечены из значений  $a_k$  и  $b_k$ . В определенном диапазоне чисел Рейнольдса оставшиеся колебания  $a_k$  и  $b_k$  носят ярко выраженный периодический характер. Причем, обратим внимание, что частота колебаний для всех коэффициентов одинакова. Таким образом, в рассматриваемой гидродинамической системе действительно имеют место автоколебательные явления с одной домини-

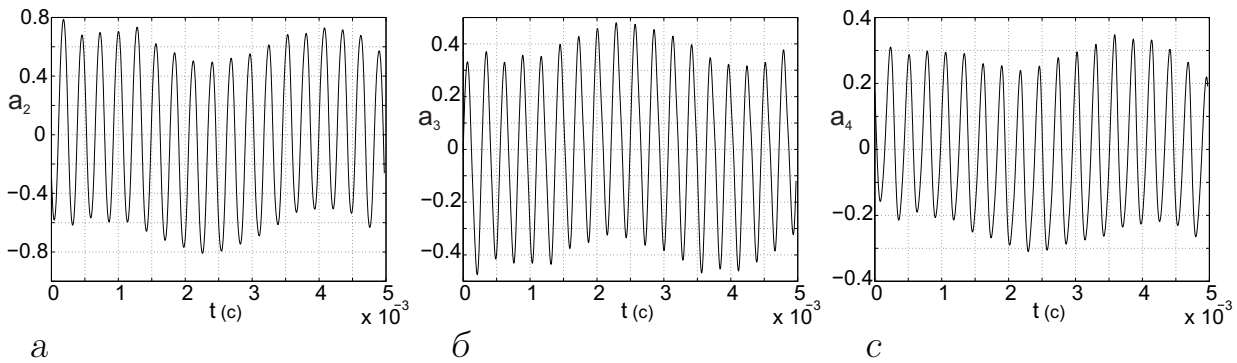


Рис. 5. Изменение во времени коэффициентов разложения профиля скорости  $u_2^{(o)}(y, t)$  в ряд Фурье по координате  $y$  для случая  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с). Видно, что высокочастотные колебания, вызванные процессом вихреобразования в межстенной области, накладываются на низкочастотные колебания, вызванные периодическим изменением направления движения самой струи, причем амплитуда высокочастотных колебаний многократно превосходит амплитуду низкочастотных:

$$a - a_2, \quad б - a_3, \quad в - a_4$$

рующей частотой, в данном случае  $f = 3.61$  кГц.

### 3. ПОСТАНОВКА АКУСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

При решении задачи о течении жидкости в канале с двумя последовательными стенозами, возмущения потока можно условно разделить на две составляющие. Первая – это возмущения полей скорости и давления, зарождающиеся в свободных сдвиговых слоях в межстенном пространстве. Выше было показано, что эти возмущения имеют место, начиная с некоторого порогового значения числа Рейнольдса, и в определенном диапазоне значений числа Рейнольдса эти возмущения имеют периодический характер. Они самоорганизуются в некоторую сложную автоколебательную систему, колебания которой и вызывают появление тонального звука. О физике такого процесса мы подробно говорили в [1]. Вторая составляющая – это возмущения, развивающиеся в струе после истечения ее из отверстия второго стеноза в канал. Это могут быть возмущения, развивающиеся при турбулизации ламинарной струи, в результате чего возникает широкополосный шум. Механизм возникновения шума принципиально отличается от механизма возникновения тонального звука и связан со специфическими колебаниями и взаимодействием частиц среды в турбулентной струе. В таком течении возникают разномасштабные квадрупольные источники звука и, как результат, широкополосный шум [22]. Также вторая составляющая может включать медленные колебания всей струи, вытекающей из отверстия второго стено-

за в канал. В данном исследовании мы уделяем внимание первой составляющей и, следовательно, концентрируем внимание на описании генерации и распространения тонального звука, вызванного периодическим процессом генерации вихрей в межстенном пространстве.

Напомним, что согласно основным положениям акустической аналогии Лайтхилла [19, 20], а также ее обобщения на случай присутствия границ в потоке, сделанного Керлом [21], мы не учитываем обратную реакцию звука на характер потока, распространение звука с переменной скоростью внутри потока (рефракцию звука), а также затухание звука. Теперь мы формулируем и решаем отдельно две акустические задачи. Первая – для той части канала, которая находится правее второго стеноза:  $x > L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ . И вторая – для той части канала, которая находится левее второго стеноза:  $x < L_2 + L_3 + L_4$ .

**Задача 1.** Итак, из численного решения соответствующей задачи гидромеханики, представленного в предыдущем разделе, мы имеем осциллирующую часть распределения продольной скорости  $u_2^{(o)}(y, t)$  в выходном сечении  $x = L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ . Функция  $u_2^{(o)}(y, t)$  изменяется во времени периодически с периодом  $T$ . Эти пульсации скорости в выходном отверстии второго стеноза служат источником звуковых колебаний в канале  $x > L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ . Геометрия задачи показана на рис. 6. Для простоты мы ввели систему координат  $(x', y')$  таким образом, чтобы совместить ось  $y'$  с выходом из отверстия второго стеноза  $x = L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ .



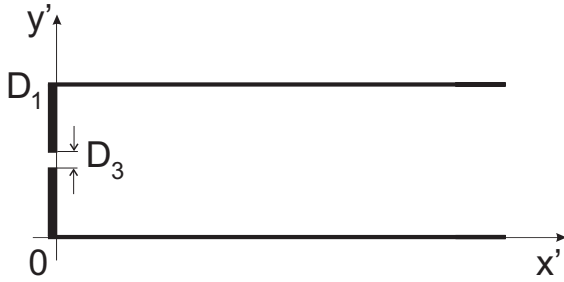


Рис. 6. Геометрия задачи 1

Аналогично тому, как это предполагалось в [1, 22], считаем, что звук не взаимодействует с потоком, а распространяется так же, как в неподвижной среде. Таким образом, потенциал скорости  $\phi(x', y', t)$  находится как решение волнового уравнения, удовлетворяющее в канале  $x' > 0$ ,  $0 < y' < D_1$  следующим граничным условиям. На торцевой стенке  $x' = 0$ :

$$u_{x'} = -\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \begin{cases} 0, & \text{при } y' \in \Gamma, \\ u_2^{(o)}(y', t), & \text{при } y' \in \Delta. \end{cases} \quad (6)$$

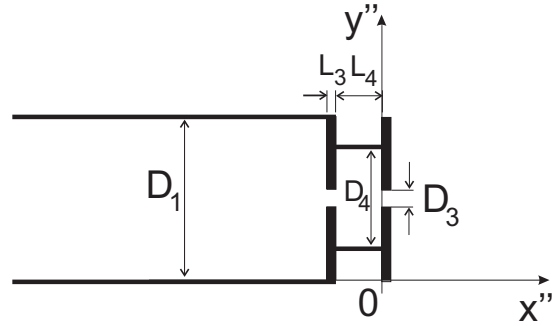
Здесь  $\Gamma$  обозначает твердую поверхность торца, то есть  $\Gamma = [0, (D_1 - D_3)/2] \cup [(D_1 + D_3)/2, D_1]$ , а  $\Delta$  обозначает ту часть торца, которая приходится на отверстие стеноза  $\Delta = [(D_1 - D_3)/2, (D_1 + D_3)/2]$ .

На верхней и нижней стенках канала  $y' = 0$  и  $y' = D_1$  формулируем акустически жесткое граничное условие:

$$u_{y'}(x', y', t) \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial y'} = 0 \text{ при } x' > 0. \quad (7)$$

**Задача 2.** Аналогично формулируем акустическую задачу для той части канала, которая лежит левее второго стеноза  $x < L_2 + L_3 + L_4$ . Из численного решения соответствующей задачи гидромеханики имеем осциллирующую часть распределения продольной скорости  $u_1^{(o)}(y, t)$  во входном сечении  $x = L_2 + L_3 + L_4$ . Функция  $u_1^{(o)}(y, t)$  является периодической по времени с периодом  $T$ . Эти пульсации скорости во входном сечении отверстия второго стеноза служат источником звуковых колебаний в канале  $x < L_2 + L_3 + L_4$ . Геометрия задачи показана на рис. 7. Для простоты введена система координат  $(x'', y'')$  такая, что ось  $y''$  проходит через входное сечение отверстия второго стеноза  $x = L_2 + L_3 + L_4$ . Также введено обозначение  $L_6 = L_3 + L_4$ .

Потенциал скорости  $\phi(x'', y'', t)$  находится как решение волнового уравнения, удовлетворяющее в левой части канала  $x'' < 0$  следующим граничным


 Рис. 7. Геометрия задачи 2. В дальнейшем также используется обозначение  $L_6 = L_3 + L_4$ 

условиям. На торцевой стенке  $x'' = 0$ :

$$u_{x''} = -\frac{\partial \phi}{\partial x''} = \begin{cases} 0, & \text{при } y'' \in \Upsilon, \\ u_1^{(o)}(y'', t), & \text{при } y'' \in \Delta. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $\Upsilon$  обозначает твердую поверхность торца межстенной области, то есть  $\Upsilon = [(D_1 - D_4)/2, (D_1 - D_3)/2] \cup [(D_1 + D_3)/2, (D_1 + D_4)/2]$ , а  $\Delta$ , как и прежде, обозначает отверстие стеноза.

На всех горизонтальных стенках расчетной области имеем акустически жесткое граничное условие:

$$u_{y''}(x'', y'', t) = -\frac{\partial \phi}{\partial y''} = 0. \quad (9)$$

Аналогично, на вертикальных поверхностях первого стеноза имеем

$$u_{x''}(-L_4, y'', t) \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial x''} = 0, \text{ при } y'' \in \Upsilon, \quad (10)$$

$$u_{x''}(-L_6, y'', t) \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial x''} = 0, \text{ при } y'' \in \Gamma. \quad (11)$$

#### 4. РЕШЕНИЕ СФОРМУЛИРОВАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Решение задачи 1.** Задача 1 представляет собой задачу определения акустического поля в плоском регулярном полубесконечном волноводе с заданным возмущением на торце. Решение такой граничной задачи подробно описано в [2, 24]. Оно может быть представлено в виде двойного ряда Фурье:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} e^{i(\gamma_{nm}^{(1)} x' - n\omega t)} \alpha_m^{(1)}(y'), \quad (12)$$

где

$$\alpha_m^{(1)}(y') = \cos \frac{\pi m y'}{D_1}, \quad \gamma_{nm}^{(1)} = \sqrt{n^2 k^2 - \frac{\pi^2 m^2}{D_1^2}}, \quad (13)$$

где  $\omega$  - угловая частота,  $k$  - волновое число,  $A_{nm}$  - неизвестные постоянные коэффициенты. Набор функций  $\alpha_m^{(1)}(y')$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  представляет собой полную ортогональную систему на интервале  $[0, D_1]$ . Следует отметить, что при построении решения волновод (рис. 6) рассматривается как бесконечный плоскопараллельный волновод с заданным в сечении  $x' = 0$  распределением скорости. Это позволяет в комплексном ряде Фурье по  $n$  в (12) суммировать только по положительным частотам. Отрицательные номера  $n$  соответствуют волнам, распространяющимся в левой части волновода  $x' < 0$ .

Решение (12) удовлетворяет граничное условие (7) на верхней и нижней стенках канала. А коэффициенты  $A_{nm}$  определяются в явном виде из граничного условия (6) на торце. Действительная часть скорости  $u_{x'}$  на торце  $x' = 0$  имеет вид:

$$u_{x'} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [a_{nm} \cos(n\omega t) + b_{nm} \sin(n\omega t)] \alpha_m^{(1)}(y'), \quad (14)$$

где  $a_{nm}$ ,  $b_{nm}$  - действительная и мнимая части коэффициента  $-i\gamma_{nm}A_{nm} = a_{nm} + ib_{nm}$ . Подставляя выражение (14) в условие (6) и раскладывая его по функциям  $\alpha_m^{(1)}(y')$ , получаем выражения для неизвестных коэффициентов

$$a_{nm} = G \int_0^T \int_{\Delta} u_2^{(o)}(y', t) \alpha_m^{(1)}(y') dy' \cos(n\omega t) dt, \quad (15)$$

$$b_{nm} = G \int_0^T \int_{\Delta} u_2^{(o)}(y', t) \alpha_m^{(1)}(y') dy' \sin(n\omega t) dt, \quad (16)$$

где нормировочный коэффициент:

$$G = \frac{(2 - \delta_{n0})(2 - \delta_{m0})}{TD_1}. \quad (17)$$

Здесь  $\delta_{n0}$ ,  $\delta_{m0}$  - символы Кронекера.

**Решение задачи 2.** Область, лежащая слева от второго стеноза, состоит из полубесконечной полосы и двух прямоугольников. Ниже эти области обозначены римскими цифрами:

- I:  $x'' < -L_6$ ,  $y'' \in \Delta \cup \Gamma$ ;
- II:  $-L_6 < x'' < -L_4$ ,  $y'' \in \Delta$ ;
- III:  $-L_4 < x'' < 0$ ,  $y'' \in \Delta \cup \Upsilon$ .

Для решения задачи 2 мы используем метод частичных областей. Подробное описание основных положений метода частичных областей можно найти в учебной литературе (см., например,

[2]). В [25, 26] метод частичных областей был использован для построения решения волнового уравнения в каналах с геометрическими неоднородностями в виде ступеньки или камеры. Согласно этому методу, неизвестный потенциал скорости вводится в каждой области отдельно, а на границе раздела областей удовлетворяется условие сопряжения полей. Для рассматриваемой задачи имеем следующие условия шивки:

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(1)} &= \phi^{(2)}, \\ u_{x''}^{(1)} &= u_{x''}^{(2)} \end{aligned} \right\} \text{ при } x'' = -L_6, \quad y'' \in \Delta \quad (18)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(2)} &= \phi^{(3)}, \\ u_{x''}^{(2)} &= u_{x''}^{(3)} \end{aligned} \right\} \text{ при } x'' = -L_4, \quad y'' \in \Delta. \quad (19)$$

Здесь верхний индекс обозначает область, в которой определено данное поле. Искомые поля могут быть представлены в виде двойных рядов Фурье следующим образом:

$$\phi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^{(1)} e^{-i(\gamma_{nm}^{(1)}(x''+L_6)+n\omega t)} \alpha_m^{(1)}(y''), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( B_{nm}^{(2)} e^{-i(-\gamma_{nm}^{(2)}(x''+L_6)+n\omega t)} + \right. \\ &\quad \left. + C_{nm}^{(2)} e^{-i(\gamma_{nm}^{(2)}(x''+L_4)+n\omega t)} \right) \alpha_m^{(2)}(y''), \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{(3)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( B_{nm}^{(3)} e^{-i(-\gamma_{nm}^{(3)}(x''+L_4)+n\omega t)} + \right. \\ &\quad \left. + C_{nm}^{(3)} e^{-i(\gamma_{nm}^{(3)}x''+n\omega t)} \right) \alpha_m^{(3)}(y''), \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_m^{(2)}(y'') = \cos\left(\frac{\pi m}{D_3}\left(y'' - \frac{D_1 - D_3}{2}\right)\right), \quad (23)$$

$$\alpha_m^{(3)}(y'') = \cos\left(\frac{\pi m}{D_4}\left(y'' - \frac{D_1 - D_4}{2}\right)\right), \quad (24)$$

$\gamma_{nm}^{(1)}$  задано формулой (13), а выражения для  $\gamma_{nm}^{(2)}$  и  $\gamma_{nm}^{(3)}$  имеют такой же вид, как и (13), однако вместо  $D_1$  следует подставить  $D_3$  и  $D_4$  соответственно.

Построенные таким образом решения удовлетворяют граничные условия (9) на горизонтальных поверхностях. А неизвестные коэффициенты решения определяются из граничных условий на вертикальных поверхностях (8), (10), (11), а также условий сопряжения полей (18), (19).

Подставляя выражения (20) – (22) в граничные условия (8), (10), (11), а также условия сопряжения полей (18), (19), получим соответствующие пять функциональных уравнений. Алгебраизацию этих функциональных уравнений проводим стандартным образом, подробно описанным в [2]. С этой целью раскладываем каждое функциональное уравнение по соответствующей системе функций  $\alpha_m^{(i)}(y'')$ , образующей полную и ортогональную систему на соответствующем интервале, а также по полной и ортогональной на интервале  $(0, T)$  системе функций  $\cos(n\omega t)$ ,  $\sin(n\omega t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В результате получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которая решалась численно методом редукции [2].

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

Сначала рассмотрим полученные численные результаты отдельно для задач 1 и 2, а затем энергетические характеристики звукового поля для всей расчетной области в целом.

**Задача 1.** Прежде всего следует отметить, что с целью выбора числа членов двойного ряда в решении (12), которые необходимо учитывать для получения решения с приемлемой точностью, нами были проведены следующие проверочные расчеты. После нахождения неизвестных коэффициентов решения  $A_{nm}$ , представленных двойными интегралами (15), было проверено численное выполнение граничных условий (6) на торце  $x' = 0$ . В качестве примера рассмотрим случай  $Re = 3132$  при полной глубине межстеночных ниш  $D_4 = D_1$ . На рис. 8, а показан профиль скорости  $u_2^{(o)}$ , заданный на торце  $x' = 0$  на выходе из отверстия второго стеноза  $y' \in \Delta$ , а также профиль скорости, полученный из решения (12) при использовании 360 членов ряда при суммировании по  $m$  и 20 членов ряда по  $n$ . Видно, что такого числа учтенных членов ряда достаточно, чтобы адекватно передать форму заданной кривой. Незначительное расхождение, имеющее лишь локальное значение, наблюдается в непосредственной близости к стенке одного из стенозов, где заданный профиль скорости имеет сложную искривленную форму. На рис. 8, б показана скорость  $u_{x'}$ , рассчитанная на всем торце  $x' = 0$ . Видно, что даже в непосредственной близости к кромкам стенозов погрешность не превосходит 1% скорости, заданной в отверстии стеноза. При удалении же от грани стеноза менее, чем на 1% от  $D_1$  погрешность не превосходит 0.1% от за-

данной в отверстии скорости. Интегральная оценка точности решения проводилась с помощью следующих двух соотношений:

$$\delta_1 = \frac{1}{A} \int_0^T \int_{\Delta} [u_2^{(o)}(y', t) - u_{x'}(y', t)]^2 dy' dt, \quad (25)$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{1}{A} \int_0^T \int_{\Gamma} u_{x'}^2(y', t) dy' dt, \quad (26)$$

где нормировочный коэффициент определен следующим образом

$$A = \int_0^T \int_{\Delta} [u_2^{(o)}(y', t)]^2 dy' dt. \quad (27)$$

Величина  $\delta_1$  является интегральной оценкой выполнения граничного условия в отверстии второго стеноза, а  $\delta_2$  – оценкой выполнения граничного условия на всем торце  $x' = 0$ . Для рассматриваемого примера  $\delta_1 = 6.5 \cdot 10^{-4}$  и  $\delta_2 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ . Такая точность представляется вполне приемлемой. Однако отметим, что при необходимости сходимость рядов, а, следовательно, и точность решения может быть повышена. Для этого необходимо выделить в явном виде особенность звукового поля в окрестности ребра, которая определяется условиями Мейкснера (см. [2, 23]), и использовать эти формулы в решениях (20) – (22). Однако, в данной статье в этом не было необходимости, поскольку верификация выполнения граничного условия на торце говорит о том, что точность численного решения и так является достаточно высокой.

На рис. 9 представлен амплитудно-частотный спектр колебаний скорости в отверстии второго стеноза. Видно, что расчетные данные хорошо согласуются с экспериментальными как по амплитуде, так и по главной частоте (3610 Гц), что также является подтверждением достаточной точности выбранного численного метода решения задачи. Обратим внимание, что на рис. 9, а, на котором представлены расчетные данные, отчетливо видно присутствие также гармоник более высоких порядков. А на рис. 9, б присутствует шумовая составляющая.

Также с целью подтверждения корректности полученных расчетных данных нами был рассчитан средний за период поток мощности звукового поля сквозь два сечения канала:

$$W_c(x') = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{D_1} pu_x^* dy' dt, \quad (28)$$

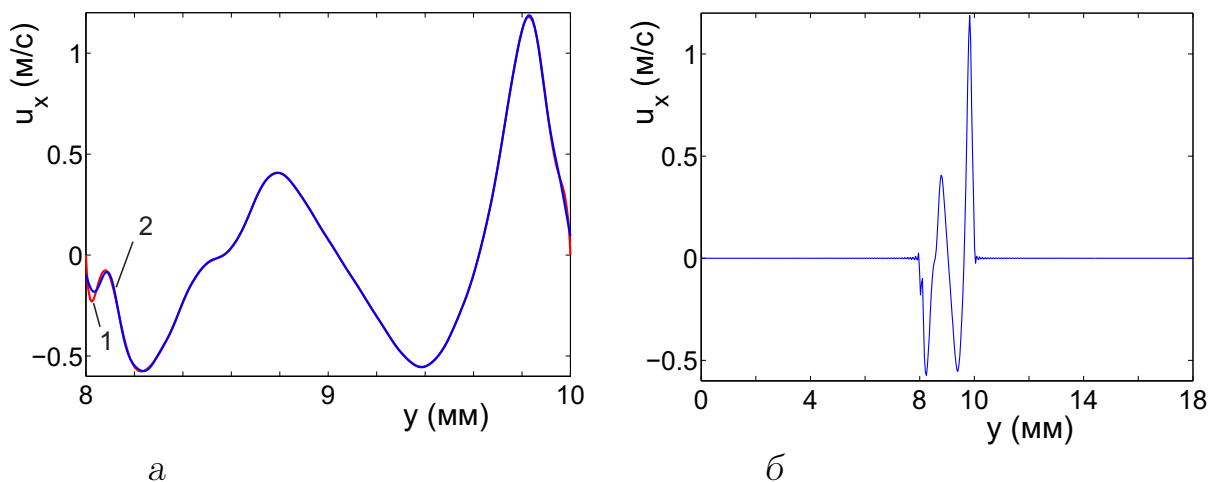


Рис. 8. Проверка выполнения граничного условия на торце канала  $x' = 0$  для случая  $Re = 3132$  и  $D_4 = D_1$  (в цветном электронном варианте статьи линии отличаются цветом, в печатном черно-белом варианте линии обозначены цифрами);

$a$  – скорость  $u_{x'}$  на выходе из отверстия второго стеноза  $y' \in \Delta$  в момент  $t = 0$ ; красная линия (кривая 1) – заданный профиль скорости  $u_2^{(o)}$ , синяя линия (кривая 2) – скорость, рассчитанная по (12) с использованием 360 членов в сумме по  $m$  и 20 членов в сумме по  $n$ ,  $b$  – скорость  $u_{x'}$ , рассчитанная на всем торце  $x' = 0$  в момент  $t = 0$

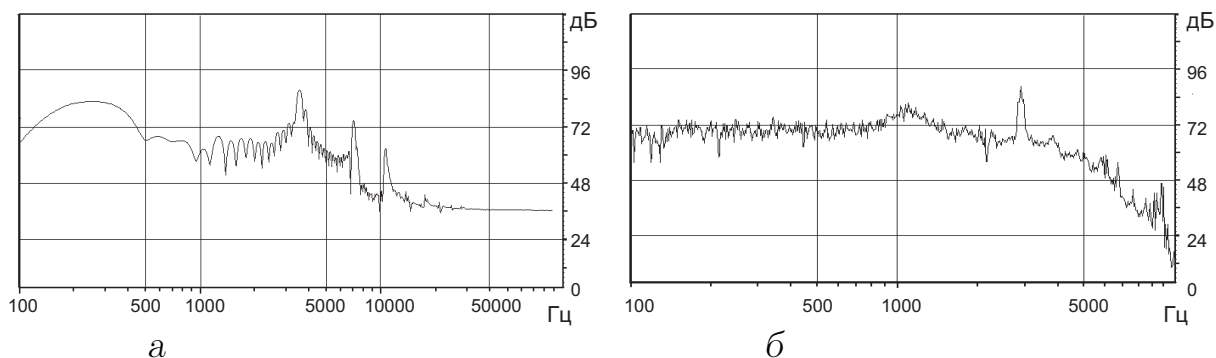


Рис. 9. Спектр колебаний скорости  $u_2^{(o)}$  в отверстии второго стеноза ( $Re = 3132$  и  $D_4 = D_1$ ):  $a$  – расчетные теоретические данные;  $b$  – экспериментальные данные

где \* обозначает комплексное сопряжение. Одно сечение располагалось прямо на торце  $x' = 0$ , а второе сечение – на расстоянии  $x' = 2$  м. Следует отметить очень хорошее совпадение результатов. Относительное расхождение при всех рассмотренных значениях числа Рейнольдса не превышало  $10^{-10}$ .

Известно, что общее решение волнового уравнения в волноводе состоит из суммы бегущих и неоднородных нормальных волн. То есть решение рассматриваемой задачи (12) можно представить

в виде

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(n)} A_{nm} e^{i(\gamma_{nm}^{(1)} x' - n\omega t)} \cos \frac{\pi m y'}{D_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M(n)+1}^{\infty} A_{nm} e^{-|\gamma_{nm}^{(1)}| x' - i n \omega t} \cos \frac{\pi m y'}{D_1}. \quad (29)$$

Здесь первая сумма представляет собой суперпозицию бегущих волн, вторая – неоднородных волн,  $M$  – максимальный номер бегущей волны, то есть максимальный номер моды  $m$ , при котором  $\gamma_{nm}^{(1)}$ , определенное формулой (13), принимает действительные значения. Очевидно, что в такой системе

Табл 2. Наибольший номер  $M$  бегущей волны при различных значениях  $n$

Re = 3132, $D_4 = D_1$										
$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$M$	0	1	0	1	2	1	2	3	2	

Re = 4176, $D_4 = D_1$										
$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$M$	0	1	2	1	2	3	4	5	4	

Re = 6264, $D_4 = D_1$										
$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$M$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Re = 8352, $D_4 = D_1$										
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M$	1	2	3	4	7	8	9	10	13	14

Re = 3132, $D_4 = D_1/3$										
$n$	1-9	10								
$M$	0	2								

наблюдается  $M + 1$  бегущих волн с круговой частотой  $n\omega$ . Из (13) видно, что  $\gamma_{nm}^{(1)2}$  меняет знак при значении периода колебаний

$$T^* = \frac{2D_1 n}{c m}. \tag{30}$$

Если  $T < T^*$ , то  $\gamma_{nm}^{(1)2} > 0$  и, следовательно, данные значения  $n$  и  $m$  определяют бегущую волну. Если же  $T > T^*$ , то данные значения  $n$  и  $m$  определяют неоднородную волну.

Значения периода колебаний при различных числах Рейнольдса течения приведены в табл. 1 для случая глубоких межстенных ниш ( $D_4 = D_1$ ). В случае же симметричных колебаний, возникающих в области с мелкими нишами (см. рис. 3, б), период колебаний резко возрастает. Так, при Re = 3132 период  $T = 5.2 \cdot 10^{-4}$ . Зная значения периода колебаний, несложно из (30) подсчитать старшие номера  $M$  бегущих волн для каждого номера частоты  $n$ . Значения  $M$  для всех рассматриваемых течений приведены в табл. 2. Напомним, что медленные колебания самой струи нами не учитывались, а рассматривались только колебания, вызванные образованием вихрей в сдвиговых слоях в межстенной области. Иными словами, моделируя течение в области с глубокими нишами, где вихри располагаются в шахматном порядке, мы считали, что вихри подходят к отверстию второго стеноза поочередно, но по траекториям, симметричным относительно оси канала  $y' = D_1/2$ .

Табл 3. Амплитуды колебаний величин  $\phi$ ,  $p$  и  $u_{x'}$  для первых номеров частот  $n$  и номеров мод волновода  $m$ , представляющих бегущие волны

Re = 3132, $D_4 = D_1$					
$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $	
2	0	$1.07 \cdot 10^{-7}$	$6.29 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$	
3	1	$1.12 \cdot 10^{-6}$	$9.91 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	
4	0	$4.33 \cdot 10^{-9}$	$5.11 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-6}$	
5	1	$3.16 \cdot 10^{-8}$	$4.66 \cdot 10^{-3}$	$9.39 \cdot 10^{-6}$	
6	0	$1.56 \cdot 10^{-9}$	$2.75 \cdot 10^{-4}$	$6.44 \cdot 10^{-7}$	
6	2	$8.87 \cdot 10^{-9}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-6}$	

Re = 4176, $D_4 = D_1$					
$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $	
2	0	$1.14 \cdot 10^{-7}$	$9.48 \cdot 10^{-3}$	$2.22 \cdot 10^{-5}$	
3	1	$9.75 \cdot 10^{-7}$	$1.22 \cdot 10^{-1}$	$2.28 \cdot 10^{-4}$	
4	0	$4.10 \cdot 10^{-9}$	$6.83 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-6}$	
4	2	$2.01 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-2}$	$3.46 \cdot 10^{-5}$	
5	1	$8.59 \cdot 10^{-8}$	$1.79 \cdot 10^{-2}$	$3.90 \cdot 10^{-5}$	

Re = 6264, $D_4 = D_1$					
$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $	
2	0	$9.80 \cdot 10^{-8}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$	$3.10 \cdot 10^{-5}$	
3	1	$5.38 \cdot 10^{-7}$	$1.09 \cdot 10^{-1}$	$2.37 \cdot 10^{-4}$	
4	0	$1.64 \cdot 10^{-9}$	$4.43 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-6}$	
4	2	$2.13 \cdot 10^{-8}$	$5.75 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-5}$	
5	1	$1.21 \cdot 10^{-8}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$	$9.37 \cdot 10^{-6}$	
5	3	$4.81 \cdot 10^{-8}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$2.85 \cdot 10^{-5}$	

Re = 8352, $D_4 = D_1$					
$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $	
1	1	$2.47 \cdot 10^{-5}$	2.71	$4.65 \cdot 10^{-3}$	
2	0	$4.31 \cdot 10^{-8}$	$9.45 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-5}$	
2	2	$7.47 \cdot 10^{-7}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$	$2.81 \cdot 10^{-4}$	
3	1	$4.40 \cdot 10^{-7}$	$1.45 \cdot 10^{-1}$	$3.30 \cdot 10^{-4}$	
3	3	$1.68 \cdot 10^{-6}$	$5.54 \cdot 10^{-1}$	$9.50 \cdot 10^{-4}$	

Re = 3132, $D_4 = D_1/3$					
$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $	
1	0	$5.15 \cdot 10^{-6}$	$8.04 \cdot 10^{-2}$	$1.88 \cdot 10^{-4}$	
2	0	$1.48 \cdot 10^{-6}$	$4.63 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-4}$	
3	0	$4.80 \cdot 10^{-7}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$5.26 \cdot 10^{-5}$	
4	0	$2.65 \cdot 10^{-7}$	$1.66 \cdot 10^{-2}$	$3.87 \cdot 10^{-5}$	
...	...	...	...	...	
10	2	$7.68 \cdot 10^{-8}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$8.20 \cdot 10^{-6}$	

На практике это означало, что мы принимали во внимание вклад в акустическое поле только той части профиля скорости  $u_2^{(o)}(y', t)$ , которая обла-

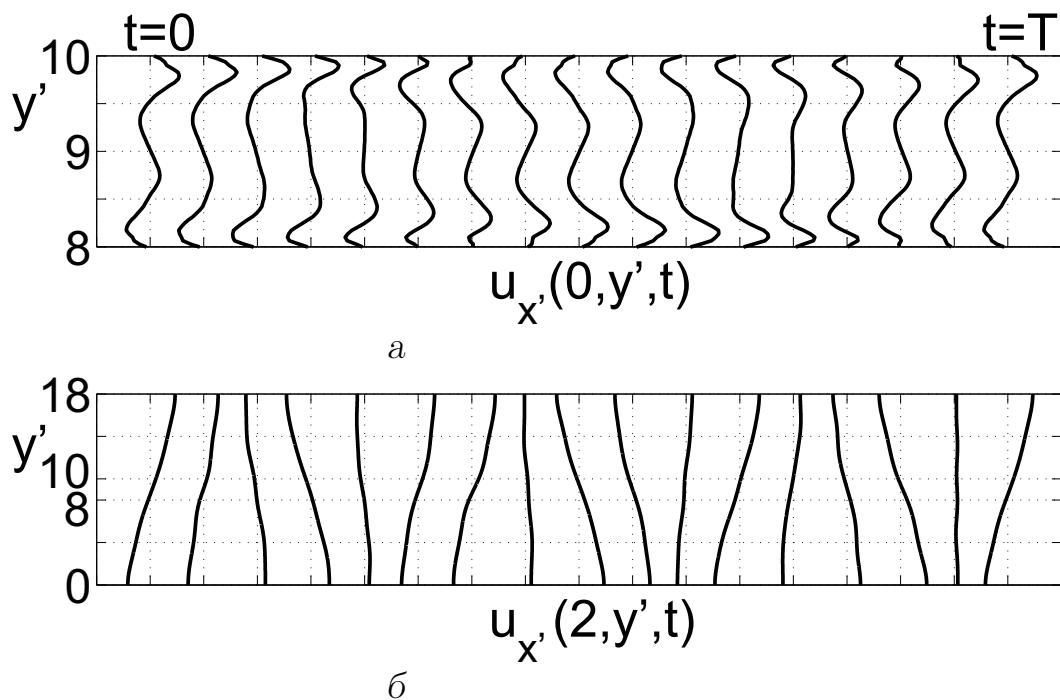


Рис. 10. Изменение профиля скорости  $u_{x'}$  во времени на протяжении одного периода ( $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ ):  
 а – в отверстии второго стеноза  $x' = 0$ , б – в сечении  $x' = 2$  м

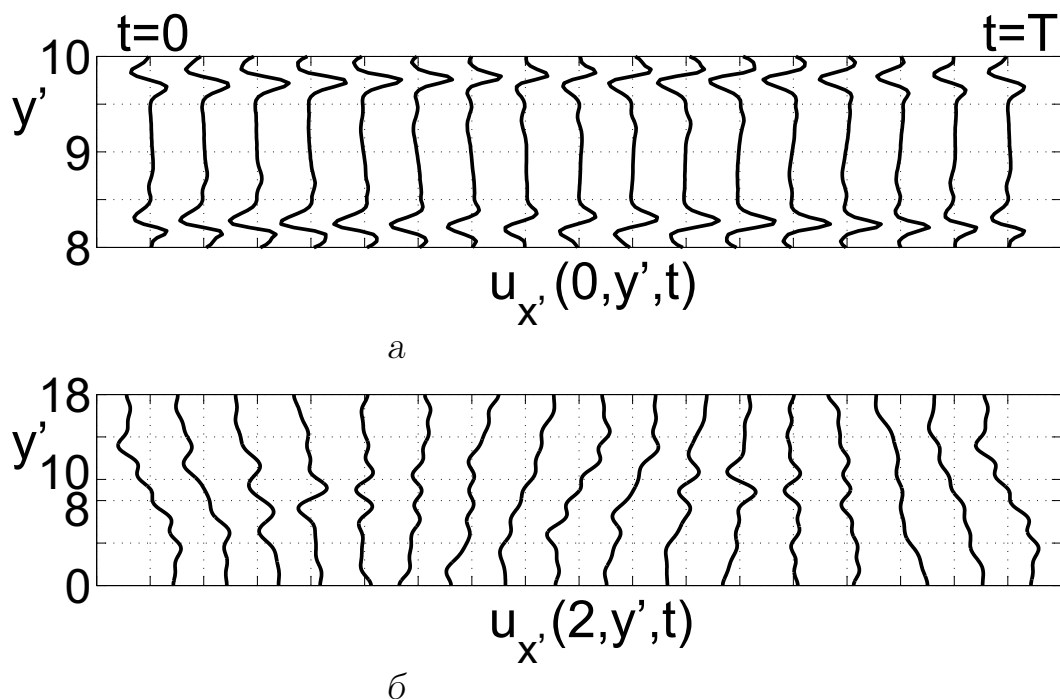


Рис. 11. Изменение профиля скорости  $u_{x'}$  во времени на протяжении одного периода ( $Re = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ ):  
 а – в отверстии второго стеноза  $x' = 0$ , б – в сечении  $x' = 2$  м



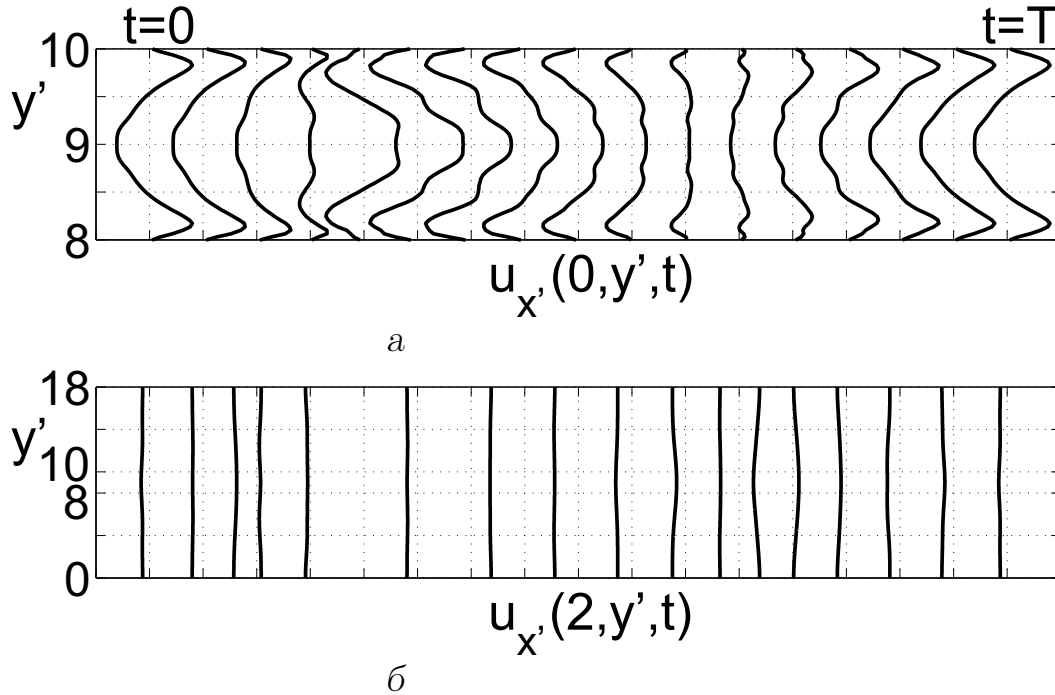


Рис. 12. Изменение профиля скорости  $u_{x'}$  во времени на протяжении одного периода ( $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$ ):  
 $a$  – в отверстии второго стеноза  $x' = 0$ ,  $b$  – в сечении  $x' = 2$  м

дает следующим свойством симметрии:

$$u_2^{(o)}(y', t) = u_2^{(o)}(D_1 - y', t + \frac{T}{2}). \quad (31)$$

То есть через полпериода поле скорости отображается симметрично относительно оси канала  $y' = D_1/2$ . Тогда из выражений (15), (16) очевидно, что  $A_{nm} = 0$ , если один из индексов нечетный, а другой четный:  $n + m = 2k - 1$ . Естественно, в табл. 2 приведены только те значения  $M$ , которые соответствуют членам с ненулевой амплитудой  $A_{nM} \neq 0$ . Аналогично, в случае течения в области с мелкими межстенными нишами мы учитывали вклад в звуковое поле только симметричной части профиля скорости на торце  $u_2^{(o)}(y', t) = u_2^{(o)}(D_1 - y', t)$ , таким образом игнорируя медленные смещения самой струи. Такая симметрия означает, что все моды с нечетными номерами имеют нулевые амплитуды  $A_{n2k-1} = 0$ . Следует отметить, что на первых девяти частотах бегущей будет только плоская волна (нулевая мода).

Сначала проанализируем результаты для течения с глубокими нишами ( $D_4 = D_1$ ). Во всех рассматриваемых случаях, кроме последнего ( $Re = 8352$ ), на первой частоте  $n = 1$  бегущей может быть только нулевая мода  $M = 0$ . Однако, в си-

лу (31), ее амплитуда  $A_{nM} = 0$  и поэтому она не указана в таблице. Далее видно, что с возрастанием скорости потока и, следовательно, частоты возникающих в нем колебаний моды с большими номерами появляются при меньших номерах частот. Так, в случае  $Re = 3132$  видно, что для частоты  $n = 2$  только нулевая мода является бегущей волной, более высокие моды представляют неоднородные волны. Другими словами, на низшей частоте только обычная плоская волна распространяется вдоль оси волновода. И только начиная с третьей частоты ( $n = 3$ ), появляется бегущая мода первого порядка ( $M = 1$ ) с распределением амплитуды по сечению волновода в форме косинуса. Такая же картина наблюдается и при  $Re = 4176$ , а также при  $Re = 6264$ . При дальнейшем увеличении скорости потока ( $Re = 8352$ ) бегущая мода первого порядка ( $M = 1$ ) появляется уже на первой частоте  $n = 1$ . В случае области с мелкими межстенными нишами, который приведен последним в табл. 2, на первых девяти частотах только плоская волна распространяется вдоль волновода. Вторая мода  $M = 2$  становится бегущей волной только на десятой частоте ( $n = 10$ ). Следует также отметить, что бегущая мода первого порядка должна была бы появиться на пятой частоте  $n = 5$ , если бы мы не приняли профиль скорости на торце

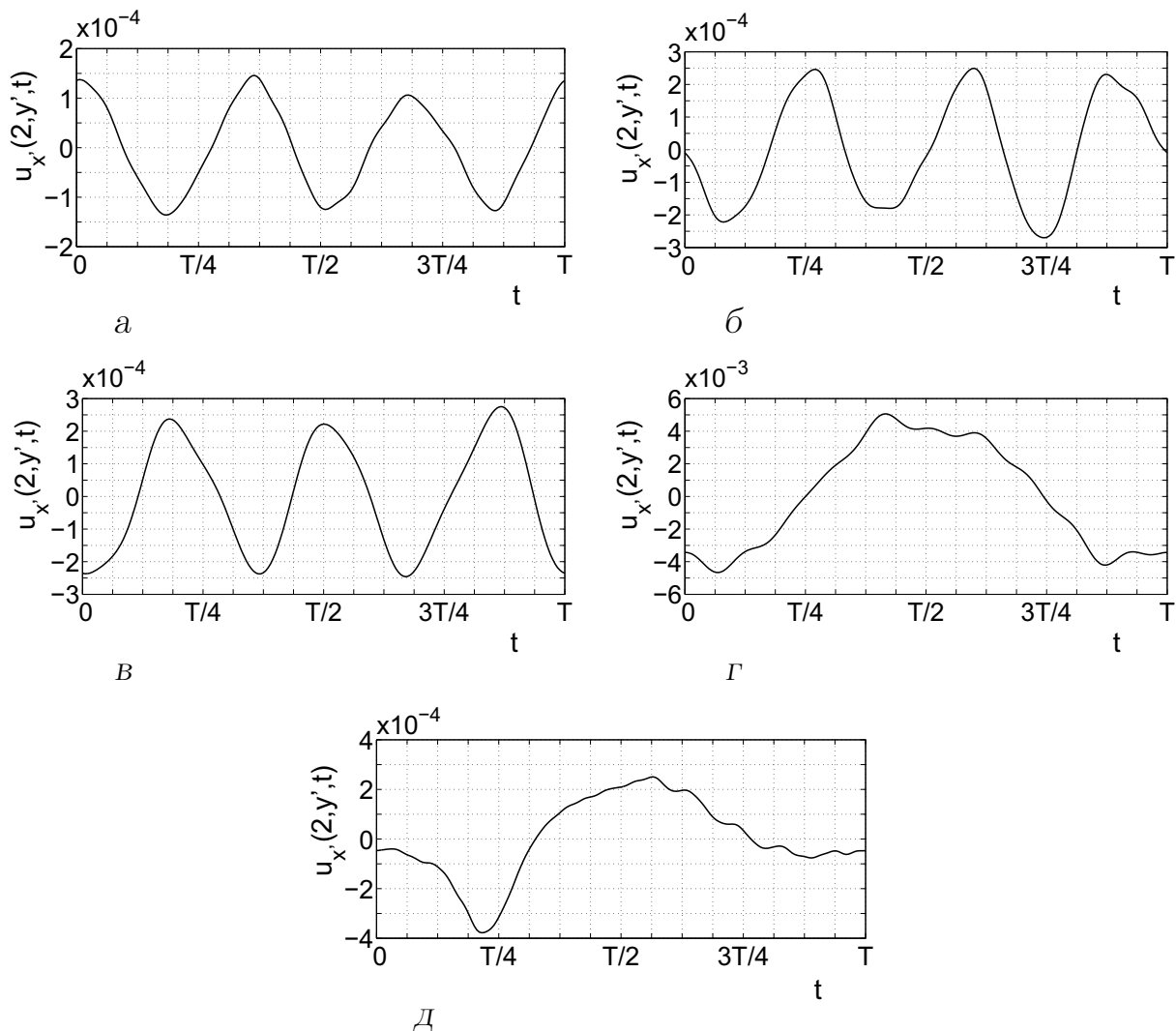


Рис. 13. Временные зависимости колебательной скорости в выбранной точке наблюдения (в случае глубоких ниш ( $D_4 = D_1$ ) выбрана точка наблюдения с координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 17$  мм; в случае мелких ниш ( $D_4 = D_1/3$ ) – точка с координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 9$  мм):  
 а –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ , б –  $Re = 4176$ ,  $D_4 = D_1$ , в –  $Re = 6264$ ,  $D_4 = D_1$ , г –  $Re = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ ,  
 д –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$

$u_2^{(o)}(y', t)$  строго симметричным относительно оси канала.

Чтобы определить, какая из волн дает наибольший вклад в звуковое поле волновода, необходимо рассчитать их амплитуды. Очевидно, что амплитуда моды  $m$  частоты  $n$  в выражении для потенциала скорости (12), а также амплитуды соответствующих мод в выражении для давления  $p$  и скорости  $u_{x'}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} |\phi_{nm}| &= |A_{nm}|, \\ |p_{nm}| &= \omega \rho n |A_{nm}|, \\ |u_{x' nm}| &= \gamma_{nm} |A_{nm}|. \end{aligned} \quad (32)$$

В представленных расчетах за  $\rho$  принималась плотность воздуха при температуре  $0^\circ\text{C}$ :  $\rho = 1.2920 \text{ кг/м}^3$ .

Амплитуды  $\phi$ ,  $p$  и  $u_{x'}$  для различных номеров частоты  $n$  и номеров бегущих мод волновода  $m$  представлены в табл. 3. Видно, что в случае глубоких межстенных ниш, когда вихри, генерируемые в сдвиговых слоях, выстраиваются в шахматном порядке, наибольшей амплитудой обладает та частота, на которой первая мода становится бегущей волной ( $M = 1$ ). Так, для первых трех случаев наибольшей амплитудой обладает не плоская волна с наименьшим номером частоты  $n = 2$ , а

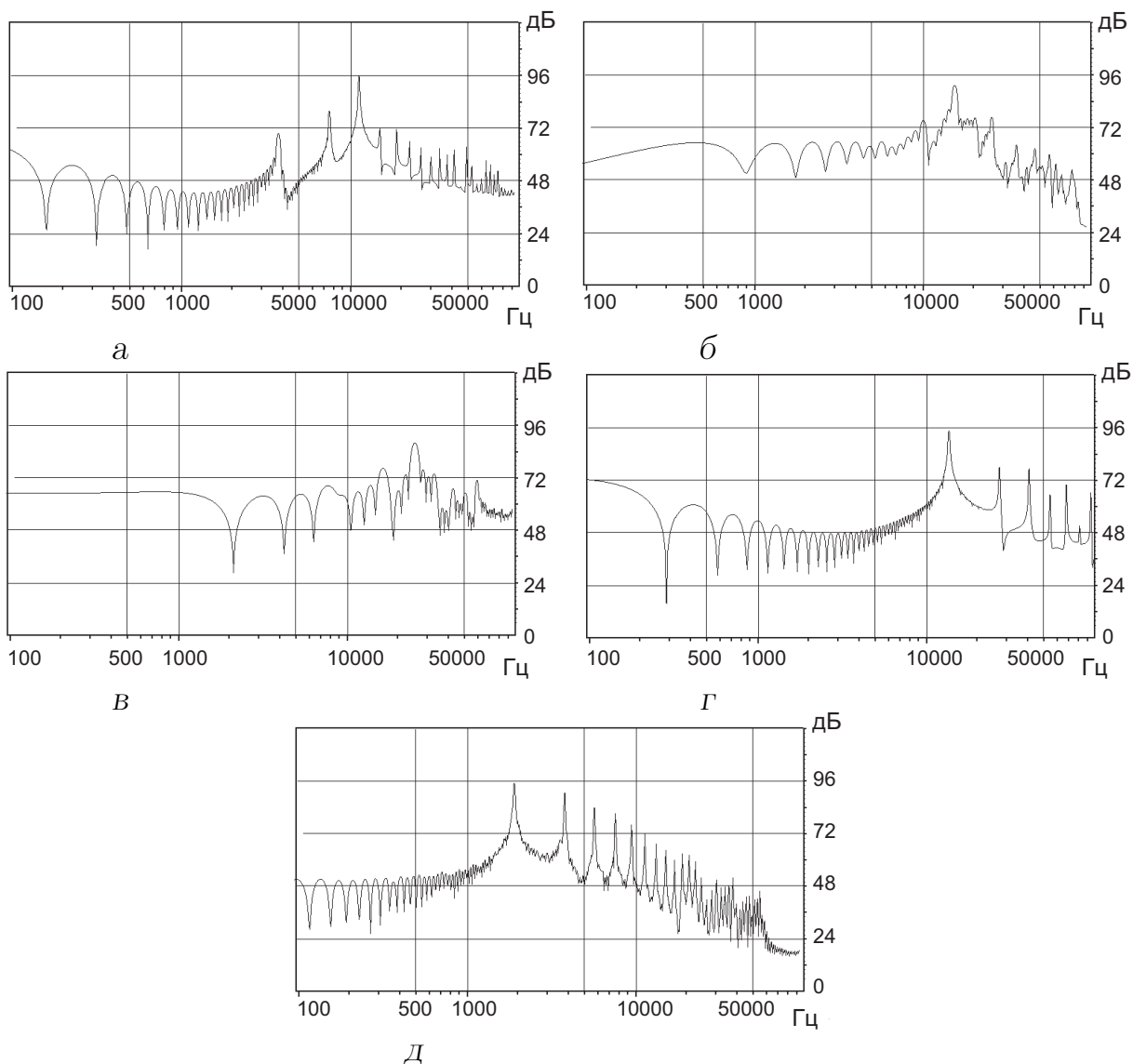


Рис. 14. Амплитудный спектр временной зависимости колебательной скорости в выбранной точке наблюдения (в случае глубоких ниш ( $D_4 = D_1$ ) выбрана точка наблюдения с координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 17$  мм; в случае мелких ниш ( $D_4 = D_1/3$ ) – точка с координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 9$  мм):

$a$  –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ ,  $б$  –  $Re = 4176$ ,  $D_4 = D_1$ ,  $в$  –  $Re = 6264$ ,  $D_4 = D_1$ ,  $г$  –  $Re = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ ,  
 $д$  –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$

волна с третьей частотой  $n = 3$ , начиная с которой первая мода ( $m = 1$ ) становится бегущей волной. Бегущая вторая мода ( $m = 2$ ) появляется только при более высоких номерах частот и обладает амплитудой существенно меньшей, чем амплитуды первой моды при меньших номерах частот  $n$ . При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса (в рассмотренном примере  $Re = 8352$ ) частота генерируемых потоком колебаний возрастает настолько, что  $M = 1$  уже на первой частоте  $n = 1$ . Соответственно, вклад первой частоты в дальнейшее

акустическое поле становится доминирующим. В последней части табл. 3 представлены амплитуды волн для случая мелких межстенных ниш  $D_4 = D_1/3$ . Видно, что наибольшей амплитудой обладает волна с номером частоты  $n = 1$ . Амплитуды остальных волн падают с номером частоты  $n$ .

Из данных, представленных в табл. 3, можно сделать следующий вывод. Если число Рейнольдса меньше некоторого критического значения, то в области с глубокими межстенными нишами

( $D_4 = D_1$ ), где вихри, генерируемые в сдвиговых слоях, располагаются в шахматном порядке, доминирующий вклад в дальнее звуковое поле в канале производит волна с третьей частотой ( $n = 3$ ) и первой модой ( $m = 1$ ). При увеличении скорости потока, когда число Рейнольдса превосходит некоторое критическое значение, главный вклад в дальнее звуковое поле в канале производит волна, соответствующая первой частоте и первой моде ( $n = 1, m = 1$ ). В области с мелкими межстенными нишами ( $D_4 = D_1/3$ ), где возмущения в сдвиговых слоях будут симметричными относительно оси канала, доминирующий вклад в дальнее звуковое поле в канале производит плоская волна ( $m = 0$ ), распространяющаяся на первой частоте ( $n = 1$ ). На первых девяти частотах могут распространяться только нулевые моды, а вклад волн в дальнее звуковое поле уменьшается с номером частоты  $n$ .

Понятно, что из-за наличия дисперсии в ходе распространения сигнала в нем будут накапливаться искажения. Аналогично [24], мы исследовали распространение колебаний в таком волноводе, описывая временные зависимости полей в трех сечениях волновода ( $x' = 1$  м, 2 м, 3 м). На рис. 10–11 показано изменение во времени профиля колебательной скорости  $u_{x'}$  на торце  $x' = 0$  и в среднем из выбранных сечений  $x' = 2$  м при различных значениях числа Рейнольдса для случая глубоких межстенных ниш ( $D_4 = D_1$ ). Вдоль оси абсцисс отложены значения скорости в моменты времени от 0 до  $T$  с шагом  $T/16$ . При этом отброшено время распространения сигнала со скоростью  $c$  от торца  $x' = 0$  до точки наблюдения  $x'$ , то есть время  $x'/c$ .

Анализируя полученные результаты, можно отметить следующие характерные особенности структуры сигнала. Во-первых, в силу дисперсии происходит задержка сигнала в сравнении со временем распространения  $x'/c$ . В результате профиль колебательной скорости в момент  $t = 0$  (что соответствует времени распространения  $x'/c$ ) имеет совершенно различную форму во всех трех выбранных сечениях канала. Во-вторых, профиль скорости в выбранных сечениях является почти антисимметричным относительно оси канала  $y' = D_1/2$ . Это говорит о том, что в поле колебательной скорости отчетливо доминирует первая мода ( $m = 1$ ), что находится в соответствии с данными, приведенными в табл. 3.

Аналогично, на рис. 12 показано изменение во времени профиля колебательной скорости  $u_{x'}$  на торце  $x' = 0$  и в среднем из выбранных сечений  $x' = 2$  м в случае мелких межстенных ниш ( $D_4 = D_1/3$ ). Очевидно, что профили колебатель-

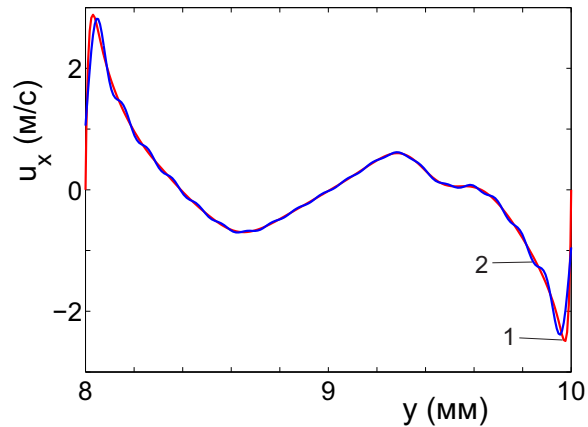


Рис. 15. Скорость  $u_{x''}$  на входе в отверстие второго стеноза  $x'' = 0, y'' \in \Delta$  в момент  $t = 0$ ; красная линия (кривая 1) — заданный профиль скорости  $u_1^{(0)}$ , синяя линия (кривая 2) — скорость, рассчитанная с использованием 360 членов в сумме по  $m$  и 20 членов в сумме по  $n$  ( $Re = 3132$  и  $D_4 = D_1$ )

ной скорости в выбранных сечениях практически являются плоской волной. Причем основной вклад вносит волна с первой частотой ( $n = 1$ ), что также соответствует данным табл. 3.

Для описания изменения сигнала во времени в каждом из выбранных выше сечений волновода ( $x' = 1$  м, 2 м, 3 м) была выбрана конкретная точка с ординатой  $y' = 17$  мм, то есть точка, близкая к границе волновода, где амплитуда колебаний будет максимальна в случае  $D_4 = D_1$ . Временные зависимости колебательной скорости в средней из выбранных точек наблюдения ( $x' = 2$  м) приведены на рис. 13. Эти рисунки также демонстрируют, что в первых трех случаях (рис. 13, а–в), когда число Рейнольдса меньше некоторого критического значения, доминирующий вклад в колебания вносит член с третьей частотой  $n = 3$ . При увеличении числа Рейнольдса до  $Re = 8352$  (рис. 13, г) доминирующим становится член с первой частотой  $n = 1$ . На рис. 13, д показана временная зависимость колебательной скорости в средней из выбранных точек ( $x' = 2$  м) в случае мелких ниш ( $D_4 = D_1/3$ ). Поскольку профиль колебательной скорости в данном случае будет симметричным относительно оси канала  $y' = D_1/2$ , целесообразно точку наблюдения выбрать прямо на оси  $y' = D_1/2$ . Видно, что в данном случае главный вклад в дальнее звуковое поле также вносит член с первой частотой  $n = 1$ . Однако вклад членов с более высокими номерами частот также будет существенным. Представленные результаты

находятся в полном соответствии с данными, приведенными в табл. 3.

На рис. 14 показан амплитудный спектр кривых, представленных на рис. 13. Приведенные графики также подтверждают тот результат, что в случае глубоких ниш при достаточно низких значениях числа Рейнольдса доминирующий вклад в звуковое поле вносит третий член  $n = 3$ . Так, при  $Re = 3132$  эта частота составляет 10.83 кГц. С ростом скорости потока третья частота ( $n = 3$ ) растет и при  $Re = 6264$  достигает 25.86 кГц, то есть выходит за пределы диапазона слышимых человеческим ухом частот. Следовательно, наблюдатель будет слышать уже плоскую волну на второй частоте ( $n = 2$ ), которая в данном случае равна 17.24 кГц. При увеличении скорости потока и, следовательно, значения числа Рейнольдса (в рассмотренном примере  $Re = 8352$ , см. рис. 14, з) главный вклад в звуковое поле уже будет вносить первая частота ( $n = 1$ ), на которой первая мода ( $m=1$ ) становится бегущей. Эта частота равна 13.5 кГц. Таким образом, имеет место следующий эффект: с ростом скорости потока частота слышимого звука растет до тех пор, пока значение числа Рейнольдса не достигнет некоторого критического значения. При переходе числа Рейнольдса через это критическое значение частота звука резко падает.

**Задача 2.** В этом случае нами также были проведены вспомогательные расчеты с целью выбора числа членов двойных рядов, входящих в решение (20) – (22), которые необходимо учитывать для получения решения с приемлемой точностью. Было проверено численное выполнение граничных условий (8), (10), (11) и условий сопряжения полей (18), (19). В результате, так же, как в задаче 1, в рядах по  $n$  суммировалось 20 членов. Для решений в широких подобластях  $\phi^{(1)}$  и  $\phi^{(3)}$  в рядах по  $m$  учитывалось 360 членов, а в узкой области  $\phi^{(2)}$  – 120 членов. Такого числа членов ряда достаточно для того, чтобы адекватно удовлетворить граничные условия и условия сопряжения. Нормированные интегральные оценки  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , описывающие расхождение кривых на границах, не превосходили  $10^{-4}$  для потенциалов и  $10^{-2}$  для скоростей.

Также с целью подтверждения корректности полученных расчетных данных, аналогично тому как это было сделано в задаче 1, нами был рассчитан средний за период поток мощности звукового поля сквозь два сечения канала. Одно сечение располагалось прямо на торце  $x'' = 0$ , а второе – на расстоянии  $x'' = -2$  м. То есть сечения находились по разные стороны первого стеноза. Следует отметить очень хорошее совпадение результатов. Так же, как и в задаче 1, относительное расхождение

при всех рассмотренных значениях числа Рейнольдса не превышало  $10^{-10}$ .

Напомним, что в рассматриваемой задаче 2 за граничное условие на торце принимался профиль скорости потока в входном сечении второго стеноза, а в задаче 1 – в выходном сечении. Вихри, генерируемые в сдвиговых слоях в межстенной области, набегают затем на второй стеноз. При этом часть вихрей срезается передними кромками стеноза и сносится в межстенную полость, а часть уносится потоком дальше через отверстие второго стеноза. При этом основное возмущение полей скорости и давления принимают на себя передние кромки второго стеноза и входное сечение отверстия. Этим объясняется то, что амплитуда колебания профиля скорости в входном сечении отверстия будет примерно в 3 раза больше, чем амплитуда колебания профиля в выходном сечении. А точки наибольшего возмущения профиля скорости будут расположены в непосредственной близости к кромкам стеноза, что видно при сравнении рис. 15 и 8. Этот факт говорит о том, что неизвестные коэффициенты решения, то есть амплитуды волн, будут хуже убывать как с номером частоты  $n$ , так и с номером моды  $m$ , чем в задаче 1, и, следовательно, вклад более высоких мод на более высоких частотах в дальнейшее акустическое поле будет более существенным.

Следует отметить, что в области 1 максимальные номера бегущих мод  $M(n)$  определяются так же, как и в задаче 1, знаком квадрата  $\gamma_{nm}^{(1)2}$ . Поэтому номера  $M$  в области 1 будут такие же, как и те, что приведены в табл. 2, что является абсолютно естественным, поскольку геометрии областей идентичны. Однако, как было указано выше, профиль скорости, заданный на торце  $x'' = 0$ , существенно отличается от того, который задавался в задаче 1, на торце  $x' = 0$ . Это отличие может привести к тому, что вклад в звуковое поле гармоник с более высокими номерами  $m$  на более высоких частотах  $n$  может быть существенно больше в данной задаче.

Чтобы определить вклад волн в звуковое поле волновода, необходимо рассчитать их амплитуды. Амплитуды  $\phi$ ,  $p$  и  $u_{x''}$  для различных номеров частоты  $n$  и номеров бегущих мод волновода  $m$  представлены в табл. 4. Видно, что звуковое поле в области 1 принципиально отличается от того, которое было описано в задаче 1. Даже в случае глубоких межстенных ниш, когда вихри, генерируемые в сдвиговых слоях, выстраиваются в шахматном порядке, наибольшей амплитудой могут обладать нулевая и вторая моды ( $m = 0$  и  $m = 2$ ).

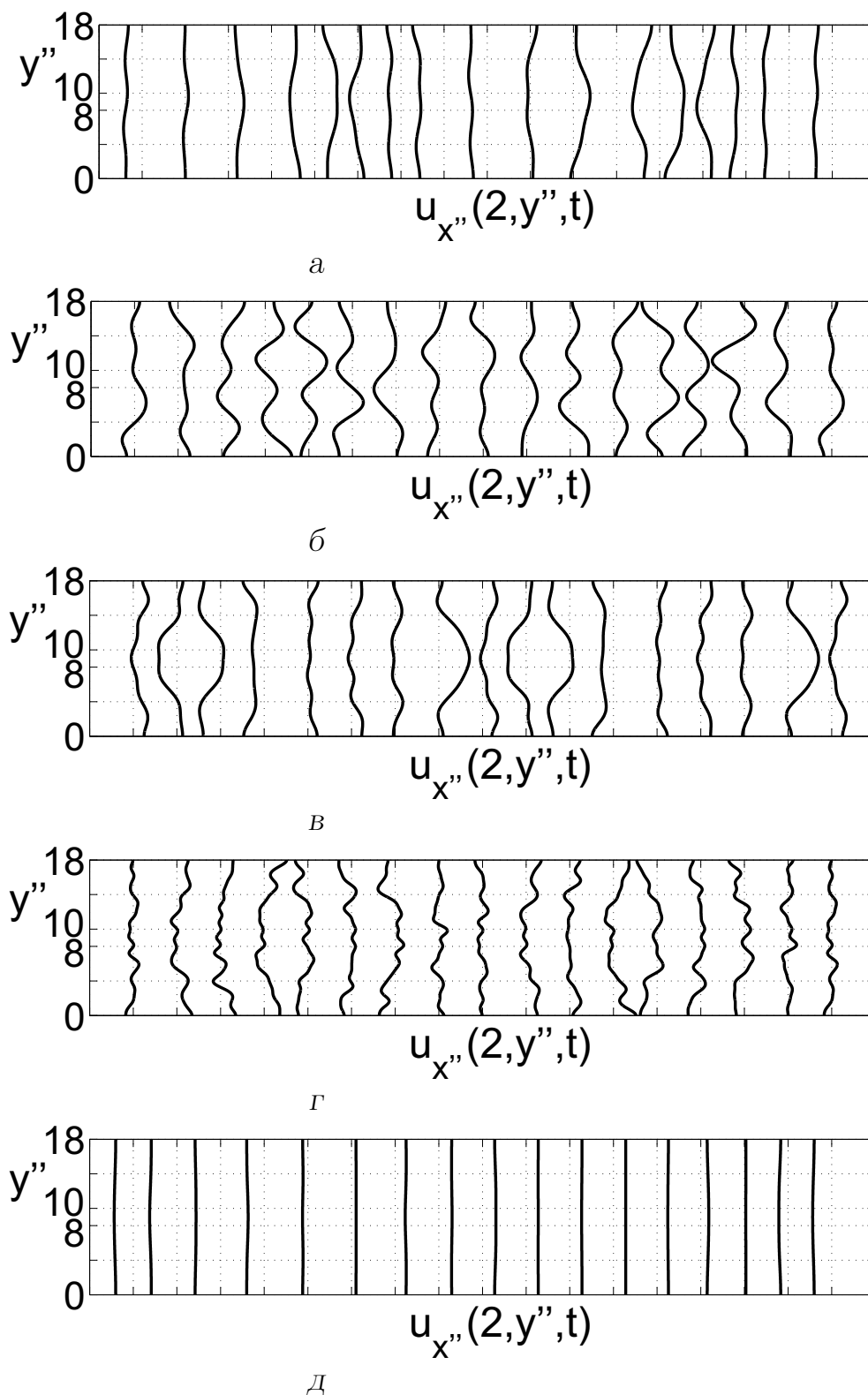


Рис. 16. Изменение профиля скорости  $u_{x''}$  в сечении  $x'' = -2$  м во времени на протяжении одного периода:  
 а -  $Re = 3132, D_4 = D_1$ , б -  $Re = 4176, D_4 = D_1$ , в -  $Re = 6264, D_4 = D_1$ , г -  $Re = 8352, D_4 = D_1$ ,  
 д -  $Re = 3132, D_4 = D_1/3$



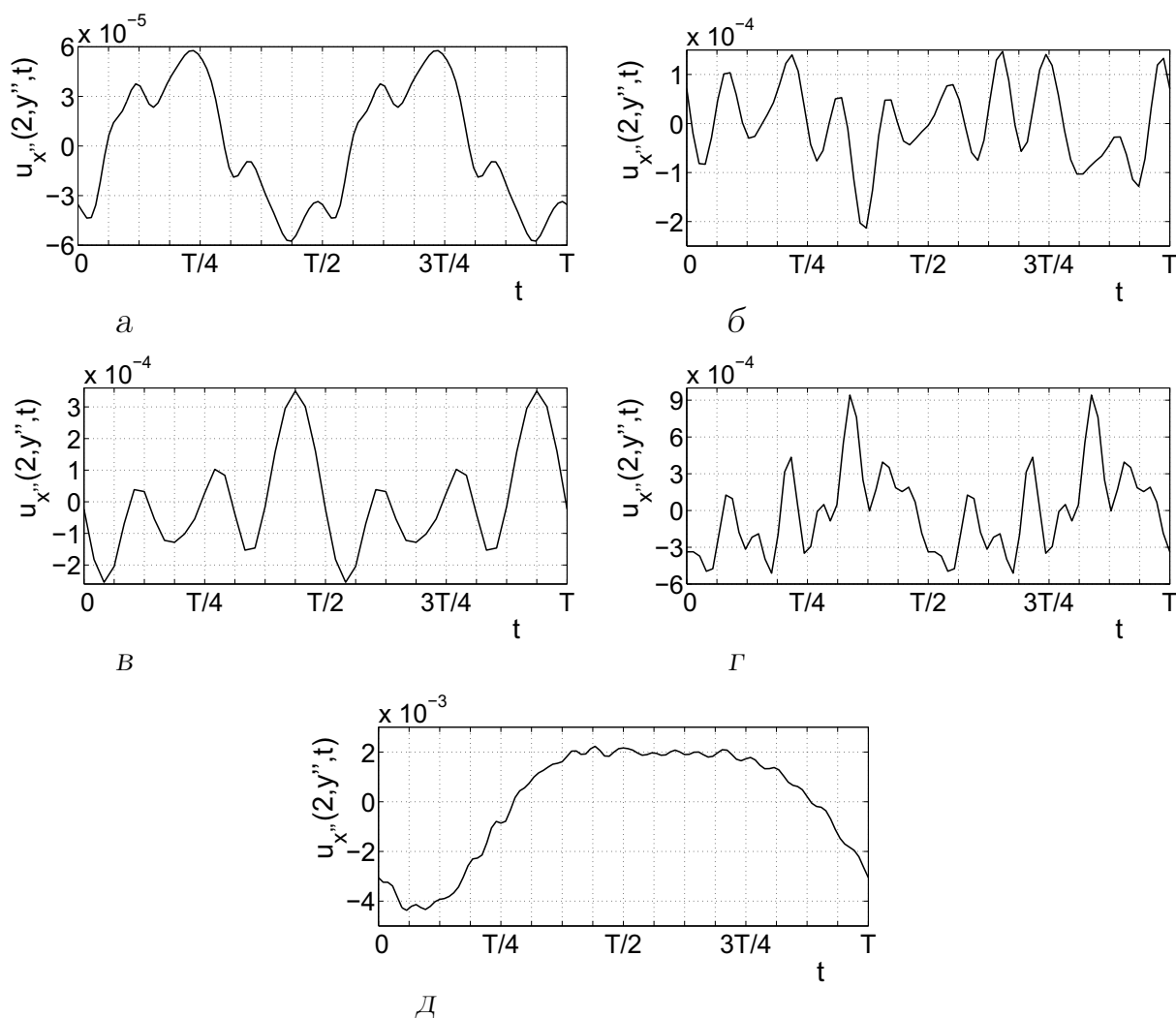


Рис. 17. Временные зависимости колебательной скорости в выбранной точке наблюдения (во всех случаях, кроме б, выбрана точка на оси канала  $x'' = -2$  м,  $y'' = 9$  мм; в случае б точка наблюдения смещена на  $1/10$  ширины канала  $x'' = 2$  м,  $y'' = 7.2$  мм):

$$\begin{aligned}
 a - \text{Re} = 3132, D_4 = D_1, \quad б - \text{Re} = 4176, D_4 = D_1, \quad в - \text{Re} = 6264, D_4 = D_1, \quad г - \text{Re} = 8352, D_4 = D_1, \\
 д - \text{Re} = 3132, D_4 = D_1/3
 \end{aligned}$$

Так, при  $\text{Re} = 3132$  отчетливо доминирует плоская волна ( $m = 0$ ) на второй частоте ( $n = 2$ ). При увеличении скорости потока ( $\text{Re} = 4176$  или  $\text{Re} = 6264$ ) существенным также оказывается вклад второй моды ( $m = 2$ ), которая становится бегущей волной на четвертой частоте ( $n = 4$ ). Кроме того, следует отметить, что в случае  $\text{Re} = 4176$  доминирующий вклад в дальнейшее звуковое поле вносит нечетная мода  $m = 5$ , которая становится бегущей на девятой частоте  $n = 9$ . При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса (в рассмотренном примере  $\text{Re} = 8352$ ) наибольшей амплитудой уже обладает не плоская волна ( $m = 0$ ), а вторая мода ( $m = 2$ ), которая уже появляется на второй ча-

стоте ( $n = 2$ ). Соответственно, вклад составляющих второй частоты в дальнейшее акустическое поле по-прежнему остается доминирующим так же, как и при более низких значениях числа Рейнольдса. В последней части табл. 4 представлены амплитуды волн для случая мелких межстенных ниш  $D_4 = D_1/3$ . Видно, что наибольшей амплитудой обладает плоская волна с номером частоты  $n = 1$ . А амплитуды остальных волн падают с увеличением номера частоты  $n$ .

Сравним данные табл. 3 и 4 для случая глубоких межстенных ниш, когда вихри, генерируемые в межстенной области, выстраиваются в шахматном порядке. Можно видеть, что хо-

тя амплитуда колебания профиля скорости в входном сечении отверстия второго стеноза  $u_1^{(o)}$  будет примерно в 3 раза больше, чем амплитуда колебания профиля в выходном сечении  $u_2^{(o)}$ , амплитуда волны, дающей наибольший вклад в дальнейшее звуковое поле, будет существенно выше в задаче 1, чем в задаче 2. Фактически, в задаче 2 межстенной объем и первый стеноз играют роль фильтра, сильно уменьшая амплитуды нечетных мод, которые в задаче 1 давали наибольший вклад, а также увеличивая амплитуды четных мод. В случае же мелких ниш, когда возмущения, генерируемые в межстенной области, имеют симметричный характер, нечетные моды, вообще, отсутствуют и мы можем наблюдать обратный эффект. Амплитуды соответствующих волн в задаче 2 оказываются существенно выше, чем в задаче 1.

Из данных, представленных в табл. 4, можно сделать следующий вывод. В отличие от задачи 1, в задаче 2 определяющий вклад в дальнейшее звуковое поле в области 1 вносят четные моды. При этом межстенная область и первый стеноз, сквозь отверстие которого волны проникают в область 1, играют роль фильтра, сильно уменьшая амплитуды нечетных мод и увеличивая амплитуды четных. Если число Рейнольдса меньше некоторого критического значения, то в области с глубокими межстенными нишами ( $D_4 = D_1$ ), где вихри, генерируемые в сдвиговых слоях, располагаются в шахматном порядке, доминирующий вклад в дальнейшее звуковое поле в области 1 производит плоская волна ( $m = 0$ ) с второй частотой ( $n = 2$ ). При увеличении скорости потока, когда число Рейнольдса превосходит некоторое критическое значение, главный вклад в дальнейшее звуковое поле в области 1 производит волна, соответствующая второй частоте и второй моде ( $n = 2, m = 2$ ). Кроме того, в задаче 2 в определенном диапазоне чисел Рейнольдса может оказаться, что существенный или даже доминирующий вклад в звуковое поле будут вносить более высокие моды (в рассмотренном примере  $m = 5$ ), которые появляются в качестве бегущих волн на более высоких частотах (в рассмотренном примере  $n = 9$ ). В области с мелкими межстенными нишами ( $D_4 = D_1/3$ ), где возмущения в сдвиговых слоях будут симметричными относительно оси канала, доминирующий вклад в дальнейшее звуковое поле в канале производит плоская волна ( $m = 0$ ), распространяющаяся на первой частоте ( $n = 1$ ). На первых девяти частотах могут распространяться только нулевые моды, а вклад волн в дальнейшее звуковое поле умень-

Табл. 4. Амплитуды колебаний величин  $\phi^{(1)}$ ,  $p^{(1)}$  и  $u_{x''}^{(1)}$  для первых номеров частот  $n$  и номеров мод волновода  $m$ , представляющих бегущие волны

Re = 3132,  $D_4 = D_1$

$n$	$m$	$ \phi^{(1)} $	$ p^{(1)} $	$ u_{x''}^{(1)} $
2	0	$3.58 \cdot 10^{-7}$	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$4.95 \cdot 10^{-5}$
3	1	$1.05 \cdot 10^{-8}$	$9.34 \cdot 10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$
4	0	$7.41 \cdot 10^{-9}$	$8.75 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-6}$
5	1	$3.52 \cdot 10^{-11}$	$5.19 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-8}$
6	0	$1.15 \cdot 10^{-8}$	$2.04 \cdot 10^{-3}$	$4.78 \cdot 10^{-6}$
6	2	$4.18 \cdot 10^{-8}$	$7.40 \cdot 10^{-3}$	$9.32 \cdot 10^{-6}$
7	1	$9.70 \cdot 10^{-11}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$4.37 \cdot 10^{-8}$
8	0	$1.77 \cdot 10^{-8}$	$4.18 \cdot 10^{-3}$	$9.77 \cdot 10^{-6}$
8	2	$4.45 \cdot 10^{-8}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \cdot 10^{-5}$

Re = 4176,  $D_4 = D_1$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
2	0	$2.74 \cdot 10^{-7}$	$2.28 \cdot 10^{-2}$	$5.33 \cdot 10^{-5}$
3	1	$5.44 \cdot 10^{-10}$	$6.79 \cdot 10^{-5}$	$1.27 \cdot 10^{-7}$
4	0	$4.81 \cdot 10^{-8}$	$8.01 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^{-5}$
4	2	$2.12 \cdot 10^{-7}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$	$3.65 \cdot 10^{-5}$
5	1	$2.12 \cdot 10^{-9}$	$4.40 \cdot 10^{-4}$	$9.61 \cdot 10^{-7}$
...	...	...	...	...
9	5	$8.59 \cdot 10^{-7}$	$3.22 \cdot 10^{-1}$	$6.67 \cdot 10^{-5}$

Re = 6264,  $D_4 = D_1$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
2	0	$3.49 \cdot 10^{-7}$	$4.73 \cdot 10^{-2}$	$1.11 \cdot 10^{-4}$
3	1	$4.57 \cdot 10^{-9}$	$9.28 \cdot 10^{-4}$	$2.02 \cdot 10^{-6}$
4	0	$9.44 \cdot 10^{-8}$	$2.56 \cdot 10^{-2}$	$5.98 \cdot 10^{-5}$
4	2	$2.21 \cdot 10^{-7}$	$5.97 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$
5	1	$1.96 \cdot 10^{-9}$	$6.65 \cdot 10^{-4}$	$1.52 \cdot 10^{-6}$
5	3	$7.48 \cdot 10^{-9}$	$2.53 \cdot 10^{-3}$	$4.43 \cdot 10^{-6}$

Re = 8352,  $D_4 = D_1$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
1	1	$1.64 \cdot 10^{-7}$	$1.80 \cdot 10^{-2}$	$3.08 \cdot 10^{-5}$
2	0	$6.23 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-1}$	$3.19 \cdot 10^{-4}$
2	2	$1.66 \cdot 10^{-6}$	$3.64 \cdot 10^{-1}$	$6.23 \cdot 10^{-4}$
3	1	$2.58 \cdot 10^{-8}$	$8.50 \cdot 10^{-3}$	$1.94 \cdot 10^{-5}$
3	3	$1.00 \cdot 10^{-7}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$

Re = 3132,  $D_4 = D_1/3$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
1	0	$8.01 \cdot 10^{-5}$	1.25	$2.92 \cdot 10^{-3}$
2	0	$1.55 \cdot 10^{-5}$	$4.83 \cdot 10^{-1}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$
3	0	$1.90 \cdot 10^{-6}$	$8.89 \cdot 10^{-2}$	$2.08 \cdot 10^{-4}$
4	0	$3.73 \cdot 10^{-7}$	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$5.45 \cdot 10^{-5}$

шается с номером частоты  $n$ .

Естественно, что из-за наличия дисперсии в ходе распространения сигнала в нем накапливаются искажения. Аналогично тому, как это было сделано в задаче 1, мы исследовали распространение колебаний в области 1, описывая временные зависимости полей в трех сечениях волновода ( $x'' = -1$  м,  $-2$  м,  $-3$  м). На рис. 16, *a* – *г* показано изменение во времени профиля колебательной скорости  $u_{x''}$  в среднем из выбранных сечений  $x'' = -2$  м для случая глубоких межстенных ниш ( $D_4 = D_1$ ). Вдоль оси абсцисс отложены значения скорости в моменты времени от 0 до  $T$  с шагом  $T/16$ . При этом отброшено время распространения сигнала со скоростью  $c$  от торца  $x'' = 0$  до точки наблюдения  $x'' = -2$  м, то есть время  $|x''|/c$ .

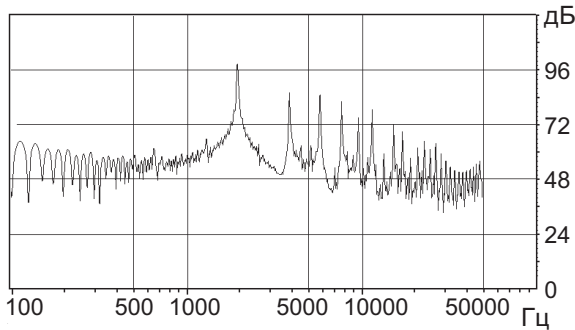


Рис. 18. Амплитудный спектр временной зависимости колебательной скорости в выбранной точке наблюдения  $x'' = -2$  м,  $y'' = 9$  мм ( $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$ )

Анализируя полученные результаты, можно отметить следующие характерные особенности структуры сигнала. Во всех рассмотренных случаях, за исключением случая  $Re = 4176$ , профиль скорости в выбранных сечениях является почти симметричным относительно оси канала  $y'' = D_1/2$ . Это говорит о том, что в поле колебательной скорости отчетливо доминируют четные моды, что находится в соответствии с данными, приведенными в табл. 4. На рис. 16, *a* видно, что при достаточно малых значениях числа Рейнольдса ( $Re = 3132$ ) профиль колебательной скорости достаточно точно определяется первыми двумя модами ( $m = 0$  и  $m = 2$ ). С ростом числа Рейнольдса существенным оказывается вклад и более высоких мод, в том числе и нечетных, которые становятся бегущими на более высоких частотах. В частности, в рассмотренном примере  $Re = 4176$  отчетливо видно пятую моду  $m = 5$  при девятой частоте  $n = 9$ . Аналогично, на рис. 16, *d* показано изменение во

времени профиля колебательной скорости  $u_{x''}$  в среднем из выбранных сечений  $x'' = -2$  м в случае мелких межстенных ниш ( $D_4 = D_1/3$ ). Очевидно, что профили колебательной скорости в выбранных сечениях практически являются плоской волной, а основной вклад вносит волна с первой частотой ( $n = 1$ ), что также соответствует данным табл. 4.

Для описания изменения сигнала во времени в каждом из указанных выше сечений волновода ( $x'' = -1$  м,  $-2$  м,  $-3$  м) была выбрана конкретная точка наблюдения. Во всех рассмотренных случаях, кроме  $Re = 4176$ , точка выбиралась на оси канала, то есть с ординатой  $y'' = 9$  мм. В случае  $Re = 4176$ , где доминирующим будет вклад нечетной моды  $m = 5$ , точка выбиралась со смещением от оси канала на  $D_1/10$ , то есть с ординатой  $y'' = 7.2$  мм. Временные зависимости колебательной скорости в средней из выбранных точек наблюдения ( $x'' = -2$  м) приведены на рис. 17.

Эти рисунки также демонстрируют, что в трех рассмотренных случаях (рис. 17, *a*, *в*, *г*), когда число Рейнольдса меньше некоторого критического значения, доминирующий вклад в колебания вносит член с второй частотой ( $n = 2$ ). Причем, если в первом из этих трех случаев вклад волн с более высокими частотами можно считать несущественным, то при более высоких значениях числа Рейнольдса вклад членов с высокими номерами частот становится значительным. В случае  $Re = 4176$  (рис. 17, *б*) наибольший вклад вносит волна с девятой частотой ( $n = 9$ ). На рис. 17, *д* показана временная зависимость колебательной скорости в средней из выбранных точек ( $x'' = -2$  м) в случае мелких ниш ( $D_4 = D_1/3$ ). Видно, что в данном случае главный вклад в дальнейшее звуковое поле вносит член с первой частотой  $n = 1$ . При этом вклад членов с более высокими номерами частот будет намного ниже по сравнению с рассмотренными выше случаями глубоких межстенных ниш, где вклад высокочастотных членов был существенным. Представленные результаты также находятся в полном соответствии с данными, приведенными в табл. 4.

Аналогично тому, как это было сделано в задаче 1, нами были рассчитаны амплитудные спектры кривых, представленных на рис. 17. Они полностью подтверждают результаты, представленные выше. В качестве примера на рис. 18 показан спектр кривой рис. 17, *д*. Видно, что в случае мелких межстенных ниш спектр во многом напоминает тот, который был представлен для задачи 1 на рис. 14. Амплитуда волны с первой частотой будет наибольшей. С возрастанием номера частоты

Табл 5. Акустическая мощность в задачах 1 и 2, кинетическая мощность струи

Re	$W_c^{(1)}$ (Вт)	$W_c^{(2)}$ (Вт)	$W_k$ (Вт)	$\eta$
3132	$1.14 \cdot 10^{-7}$	$2.25 \cdot 10^{-8}$	0.687	$1.99 \cdot 10^{-7}$
4176	$3.04 \cdot 10^{-7}$	$2.59 \cdot 10^{-7}$	1.63	$3.45 \cdot 10^{-7}$
6264	$2.96 \cdot 10^{-7}$	$2.57 \cdot 10^{-7}$	5.49	$1.01 \cdot 10^{-7}$
8352	$4.29 \cdot 10^{-5}$	$5.31 \cdot 10^{-6}$	13.02	$3.70 \cdot 10^{-6}$
3132	$4.03 \cdot 10^{-7}$	$7.61 \cdot 10^{-5}$	0.687	$1.11 \cdot 10^{-4}$

амплитуды убывают.

**Акустическая эффективность.** Теперь определим какова эффективность преобразования кинетической энергии струи в акустическую энергию. Иными словами, какая часть кинетической энергии струи превращается в акустическую энергию. Коэффициент преобразования энергии определяется как отношение акустической мощности к кинетической мощности струи [22], [28]:

$$\eta = \frac{W_c}{W_k}, \quad (33)$$

где акустическая мощность состоит из двух частей (задачи 1 и 2):  $W_c = W_c^{(1)} + W_c^{(2)}$ . Здесь оба слагаемых определяются по формуле (28). А кинетическую мощность струи естественно определить через скоростной напор в отверстии стеноза  $\rho V_2^2$ , поскольку именно эта величина принималась нами за масштаб давления при обезразмеривании уравнений Навье-Стокса. Окончательно имеем

$$W_k = \frac{\rho V_2^3 s}{2}, \quad (34)$$

где  $s = D_2 \cdot 1$  м – площадь сечения в отверстии стеноза.

Расчетные значения  $W_k$ ,  $W_c^{(1)}$ ,  $W_c^{(2)}$  приведены в табл. 5. Видно, что в случае глубоких межстенных ниш акустическая эффективность существенно повышается только в последнем из рассмотренных случаев, когда появляется бегущая волна с первой частотой ( $n = 1$ ). Также можно видеть, что акустическая эффективность области с мелкими межстенными нишами будет примерно на три порядка выше, чем области с глубокими межстенными нишами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе подхода, представленного в [1], в данной работе предложен аналогичный алгоритм оценки характеристик звукового поля, порождаемого течением в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Суть предложенного

алгоритма состоит в том, что на начальном этапе в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости описывается течение в канале со стенозами. В частности, в [4, 5] были описаны периодические возмущения течения, возникающие в сдвиговых слоях в межстенной области. Было показано, что в случае глубоких межстенных ниш вихри, генерируемые в сдвиговых слоях межстенной области и сносимые течением, выстраиваются в шахматном порядке. А в случае мелких межстенных ниш эти возмущения в сдвиговых слоях в межстенной области будут располагаться симметрично относительно оси канала.

В данной статье, в рамках второго этапа предложенного алгоритма, на основе результатов решения гидродинамической задачи, представленных в [4, 5], моделируется источник возникающих акустических колебаний. За такой источник колебаний принимается периодическое возмущение жидкого объема, заключенного в отверстии второго стеноза, вихрями, генерируемыми в межстенной области. Акустическая задача решается для двух областей: для однородного плоского канала, находящегося вниз по течению от второго стеноза (задача 1), а также для области с геометрическими неоднородностями, находящейся вверх по потоку от второго стеноза (задача 2). Для решения данной задачи применяется метод частичных областей [2].

Для задачи 1 были установлены следующие результаты. Если число Рейнольдса меньше некоторого критического значения, то в области с глубокими межстенными нишами ( $D_4 = D_1$ ), где вихри, генерируемые в сдвиговых слоях, располагаются в шахматном порядке, доминирующий вклад в дальнейшее звуковое поле в канале производит волна с третьей частотой ( $n = 3$ ) и первой модой ( $m = 1$ ). При увеличении скорости потока, когда число Рейнольдса превосходит некоторое критическое значение, главный вклад в дальнейшее звуковое поле в канале производит волна, соответствующая первой частоте и первой моде ( $n = 1, m = 1$ ).

В задаче 2 определяющий вклад в дальнейшее зву-

ковое поле вносят четные моды. При этом межстенный объем и первый стеноз, сквозь отверстие которого волны проникают в область 1, играют роль фильтра, уменьшая амплитуды нечетных мод и увеличивая амплитуды четных. При малых значениях числа Рейнольдса доминирующий вклад в дальнейшее звуковое поле производит плоская волна ( $m = 0$ ) на второй частоте ( $n = 2$ ). При увеличении скорости потока, то есть с ростом числа Рейнольдса, растет вклад второй моды ( $m = 2$ ), которая становится бегущей на четвертой частоте ( $n = 4$ ). При дальнейшем увеличении скорости потока, когда число Рейнольдса превосходит некоторое критическое значение, главный вклад в дальнейшее звуковое поле производит вторая мода, которая становится бегущей уже на второй частоте ( $m = 2, n = 2$ ). Кроме того, следует отметить, что в определенном диапазоне чисел Рейнольдса может оказаться, что существенный или даже доминирующий вклад в звуковое поле будут вносить более высокие моды, которые появляются в качестве бегущих волн на более высоких частотах (в рассмотренном примере  $n = 9, m = 5$ ).

В области с мелкими межстенными нишами ( $D_4 = D_1/3$ ), где возмущения в сдвиговых слоях будут симметричными относительно оси канала, доминирующий вклад в дальнейшее звуковое поле в канале производит плоская волна ( $m = 0$ ), распространяющаяся на первой частоте ( $n = 1$ ). Вклад волн в дальнейшее звуковое поле уменьшается с номером частоты  $n$ .

Акустическая эффективность области с мелкими межстенными нишами (где периодические возмущения потока, появляющиеся в межстенной области, будут симметричными относительно оси канала) будет примерно на три порядка выше, чем области с глубокими межстенными нишами (где вихри, появляющиеся в межстенной области, выстраиваются в шахматном порядке).

1. Вовк И. В., Малюга В. С. Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов // Акустичний вісник.– 2010.– 12, N 2.– С. 3–19.
2. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацигура В. Т. Основы акустики.– К.: Наукова думка, 2007.– 640 с.
3. Ferziger J. H., Perić M. Computational methods for fluid dynamics, 3rd rev. ed.– Berlin: Springer, 2002.– 424 p.
4. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромеханіка.– 2009.– 11, N 4.– С. 17–30.
5. Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения // принято к печати в Прикл. гідромех.– 2010.– 12, N 4.– С. 45–62.
6. Басовский В. Г., Вовк И. В., Вовк О. И. О возможности генерирования тональных звуковых колебаний потоком воздуха в бронхах со стенозом // Акуст. вісник.– 2003.– 6, N 1.– С. 3–21.
7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 152 с.
8. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows.– Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.– 656 p.
9. Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method.– New York: Longman, 1995.– 258 p.
10. Weller H. G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // Comp. in Phys.– 1998.– 12.– P. 620–631.
11. <http://www.opencfd.co.uk/openfoam/>
12. Chakravarthy S. R., Osher S. High resolution application of the OSHER upwind scheme for the Euler equation // AIAA Paper 83-1943, 1983 также доступно в Chakravarthy S.R., Osher S. High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation // Proc. AIAA Comp. Fluid Dynamics conference.– Danvers, MA, 1983.– P. 363–372.
13. Waterson N.P., Deconinck H. Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach // J. Comp. Physics.– 2007.– 224.– P. 182–207.
14. Jasak, H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. PhD Thesis.– London: Imperial College, 1996.– 394 p.
15. Issa R. I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comput. Phys.– 1986.– 62.– P. 40–65.
16. Barrett R., Berry M., Chan T. F. et al. Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Edition.– Philadelphia: SIAM, 1994.– 107 p.
17. Денисихина, Д.М. Численное моделирование автоколебательных вентиляционных течений. Диссертации на соискание ученой степени к. ф.-м. н. – СПб: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2005.– 104 p.
18. Hardin J. C., Pope D. S. Sound generation by a stenosis in a pipe // AIAA Journal.– 1992.– 30.– P. 312–317.
19. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy. Soc.– 1952.– 211.– P. 564–587.
20. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proc. Roy. Soc.– 1954.– 221.– P. 1–32.
21. Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. Roy. Soc.– 1955.– 231.– P. 318–334.
22. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Звук, рожденный потоком.– К.: Наукова думка, 2010.– 221 с.
23. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наукова думка, 1986.– 240 с.
24. Буланая, М. А., Вовк, И. В., Гринченко, В. Т., Мацигура, В. Т. Особенности распространения звукового импульсного сигнала в плоском регулярном волноводе // Акустичний вісник.– 2008.– 11, N 4.– С. 9–23.

25. Буланая, М. А., Мацьпура, В. Т. Распространение звукового сигнала в волноводе со скачкообразным изменением поперечного сечения // Акустичний вісник.– 2009.– **12**, N 1.– С. 19–31.
26. Буланая, М. А., Вовк, И. В., Гринченко, В. Т., Мацьпура, В. Т. Распространение звукового сигнала в волноводе с неоднородностью в виде камеры // Акустичний вісник.– 2009.– **12**, N 3.– С. 3–19.
27. Вовк И. В., Малюга, В. С. Численное моделирование течения в канале с двумя последовательными сужениями (стенозами) // Доповіді НАНУ.– 2010.– N 4.– С. 53–58.
28. Муни́н А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А. Аэродинамические источники шума.– М.: Машиностроение, 1981.– 248 с.