

УДК 532.592

ПРОБЛЕМИ І ПАРАДОКСИ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ

О. А. РЯБЕНКО

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

Одержано 23.08.2011

Розглядаються білякритичні течії рідини, які недостатньо вивчені в теоретичному і експериментальному відношеннях. Наведено короткий огляд робіт, відзначена актуальність проблеми. Детально проаналізовані існуючі залежності, які використані для описання профілю вільної поверхні потоку. Висвітлені проблеми сучасного стану теорії і практики білякритичних течій. Сформульовані парадокси, що виникають при спробі описання всіх явищ розгляданого класу з єдиних позицій. Суть виявлених парадоксів розкрито на основі експериментальних досліджень. Показано, що для коректного описання білякритичних течій рідини в додаток до числа Фруда в початковому перерізі цих течій необхідно враховувати ще й можливі нахил і кривизну елементарних струминок у цьому ж перерізі.

Рассматриваются околоскритические течения жидкости, которые недостаточно изучены в теоретическом и экспериментальном отношении. Дан краткий обзор работ, отмечена актуальность проблемы. Детально проанализированы существующие зависимости, используемые для описания профиля свободной поверхности потока. Освещены проблемы современного состояния теории и практики околоскритических течений. Сформулированы парадоксы, возникающие при попытке описания всех явлений рассматриваемого класса с единых позиций. Сущность выявленных парадоксов раскрыта на основе экспериментальных исследований. Показано, что для корректного описания околоскритических течений жидкости в дополнение к числу Фруда в начальном сечении этих течений необходимо учитывать еще и возможные наклон и кривизну экспериментальных струек в этом же сечении.

Near-critical fluid flows are considered which had been studied insufficiently in theoretical and experimental aspects. A concise review of works is given, the actuality of the problem is pointed out. Are analyzed in detail existing relationships used to describe the profile of flow free surface. Problems are elucidated of the present-day state of the theory practice of near-critical flows. Paradoxes are formulated emerging at the attempt to describe all phenomena of the discussed class from common positions. The essence of revealed paradoxes is displayed on the basis of experimental research. It is shown that for the proper description of fluid near-critical flows in addition to Froude number in the initial section of these flows it is necessary to take into account also the streamline inclination and curvature in the same section.

ВСТУП

Класична гідравліка потоків рідини з вільною поверхнею ґрунтується на їхньому поділі на два якісно відмінні стани – спокійний і бурхливий [1, 2]. Межею, що розділяє ці типи потоків між собою, є критичний стан, існуючий в надзвичайно вузьких границях (на шкалі глибин чи чисел Фруда цьому стану відповідає одна-єдина точка). Проте численні теоретичні і експериментальні дослідження переконливо свідчать про те, що в природі існує не тільки критичний стан, а ще й досить обширна особлива область так званих *білякритичних течій*. Ці течії істотно відрізняються від звичайних спокійних та бурхливих потоків, мають ряд відмітних особливостей – хвиле- чи вальцеподібний профіль вільної поверхні, негідростатичний розподіл тиску по глибині в більшості перерізів потоку та ін. [3]. Це робить неможливим використання традиційної теорії плавно змінного руху для описання таких течій.

Дослідженнями різних вчених було виявлено, що в області білякритичних течій можливе існування ряду особливих явищ, які вимагають для свого описання застосування спеціальних мето-

дів. До таких явищ необхідно віднести самотню хвилю [4], кноїдальні хвилі [5], хвилястий стрибок [6, 7], безстрибкове вальцеве спряження б'єфів [8], білякритичні хвилі переміщення [6, 9] та інші. При цьому область існування таких явищ виходить за межі критичної точки з критичним станом, частково охоплюючи і спокійні, і бурхливі потоки.

Питання про визначення характеристик та умов формування критичного стану висвітлено досить детально як для загального випадку потоків рідини з монотонною поверхнею [1, 2, 10], так і для потоків з криволінійною поверхнею [11 – 15]. Проте системний розгляд всього класу білякритичних течій рідини використовується в небагатьох роботах.

Вивчення хвиль на воді, складовою частиною яких є і білякритичні течії, є предметом досліджень таких галузей науки, як гідравліка, механіка рідини, математика, фізика, солітоніка та ін. [1, 2, 16 – 18]. Довгий час кожне із вищезазваних явищ вивчалось окремо, без виділення в якусь особливу групу, безпосередньо не зв'язуючи їх з критичним станом потоку. Вивченню різних типів білякритичних течій рідини та окремих питань, пов'язаних з цими течіями, присвячені сотні робіт. Такі дослід-

ження поставлені для вирішення самих різноманітних теоретичних і практичних задач, проведені вченими різних наукових шкіл, виконані на основі різноманітних вихідних фізичних схем і математичних моделей. Отримані для різних явищ результати досить часто не узгоджені між собою, не систематизовані з позицій, загальних для всього розглядуваного класу явищ. У ряді випадків трактування одержаної інформації є досить суперечливими, а окремі висновки повністю виключають один одного.

Сказане свідчить про те, що назріла гостра необхідність системного аналізу всього накопиченого матеріалу та розробки теорії білякритичних течій рідини з позицій, загальних для всього виділеного класу течій. Створення такої теорії дозволить виявити суть існуючих суперечностей, відсіяти помилкові твердження, дати аргументовані пояснення виявленим парадоксом. Цікаво зазначити, що у свій час для газового середовища були описані особливості білякритичних течій при швидкостях, близьких до місцевої швидкості поширення звуку в газі, і була розроблена теорія білякритичних (білязвукових) течій газу [19, 20].

1. КОРОТКИЙ ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД

Термін „білякритичні течії” вперше був введений у гідравліку рідин В.В. Смісловим [21], хоча основні ідеї такого підходу були викладені у кількох його роботах у 50-і роки минулого століття. При цьому з єдиних позицій розглядаються п’ять типів явищ з глибинами, близькими до критичної. Характерно, що до виділеного класу віднесено лише **нерухомі в просторі явища** з усталеним у часі рухом рідини. В.В.Сміслов [22] вивів диференціальне рівняння кривої вільної поверхні розглядуваних течій, в якому враховується кривизна елементарних струминок потоку.

Ф. Серр [23, 24] відмітив паралель між усталеними потоками і стаціонарними хвилями переміщення при глибинах, близьких до критичної. Він вивів своє більш повне (і більш зручне для математичних перетворень) диференціальне рівняння кривої вільної поверхні, яке враховувало не тільки кривизну, а й нахил елементарних струминок. Подальший розвиток теорії білякритичних течій рідини здійснив А. А. Турсунов [25], який істотно розширив межі застосування теорії розглядуваних течій, віднісши до них не тільки нерухомі явища з глибинами, близькими до критичної, а й хвилі переміщення із швидкостями, близькими до критичного значення. Проте досить великий набір типів білякритичних явищ при їх теоретичному роз-

гляді А. А. Турсунов звів лише до двох типів – самотньої і кноїдальних хвиль. Необхідно підкреслити, що залежності, отримані для самотньої і кноїдальних хвиль, використовуються при розгляді хвилястого стрибка і групових хвиль переміщення [25 – 27]. Певні узагальнення інформації про умови існування та характеристики різних типів білякритичних течій зробили Р. Р. Чугаєв [1] та Х. Шансон [28]. Загальним недоліком робіт цього періоду є невизначеність положення початкового перерізу з позицій, загальних для всього класу білякритичних течій, неповне розкриття всього комплексу граничних умов, а особливо в початковому перерізі розглядуваних явищ.

2. АКТУАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМИ

Відсутність загальної теорії білякритичних течій, невизначеність умов їхнього існування є причиною того, що можливість виникнення таких течій іноді не береться до уваги в процесі проектування різноманітних споруд. Існуючі методики розрахунків білякритичних течій ще недосконалі, не враховують усіх визначальних факторів, через що проектні рішення, пов’язані з такими течіями, досить часто виявляються далекими від оптимальних. Внаслідок цього трапляються випадки руйнувань та аварій споруд, що працюють в умовах утворення білякритичних течій. Так, тяжкі руйнування водобою спостерігалися на водозливній греблі Вако, був підмитий флютбет гребель Крішна і Сарда, через що остання була зруйнована повністю [29]. Істотні руйнування кріплення нижнього б’єфу та розмиви відвідного русла спостерігалися за регулюючими спорудами осушувальних систем річок Ірпінь, Здвиж, Остер, Іква.

Зафіксовані значні пошкодження таких безнапірних тунелів, як Арпа-Севан, Ялтинський, Спандарянський, Інfernільо. Описано виникнення білякритичних течій з хвилястою поверхнею в безнапірній залізобетонній галереї Колимської ГЕС та тунелях Інгузької і Токтогульської ГЕС. Характерно, що аналіз умов роботи безнапірних тунелів показав, що у вихідному перерізі таких тунелів число Фруда $Fr = 0.3-4.0$, тобто потік знаходиться саме в зоні існування білякритичних течій [30].

Руйнування залізобетонного кріплення та розмиви ложа відбулися на Каршинському і Аму-Бухарському каналах внаслідок дії хвиль переміщення, що утворювалися при зупинці та пуску агрегатів насосних станцій, причому на Каршинському каналі спостерігалося затоплення берм такими хвилями на довжині 3.6 – 3.9 км. [31]. Висо-

та хвиль переміщення зазначеного типу може бути досить великою. Так, у дериваційному каналі ГЕС Орезон при відключеній витраті $200 \text{ м}^3/\text{с}$ висота хвиль досягала 1.4 м [32].

Для згаданих у цьому параграфі випадків руйнувань спільним є те, що зазначені гідротехнічні споруди на певних етапах експлуатуються в області існування білякритичних режимів. Звичайно, будь-які випадки руйнувань і аварій споруд відбуваються внаслідок несприятливої дії великої кількості самих різноманітних факторів, але до таких факторів необхідно віднести також і негативні прояви білякритичних течій.

Недостатньо дослідженим є питання про формування білякритичних течій в нижньому б'єфі низьконапірних ГЕС. У літературі є відомості про можливе утворення таких течій за відсмоктувальними трубами агрегатів Воткінської, Ризької і Кегумської ГЕС. На рис. 1, запозиченому з роботи [33], показано результати дослідів, отримані на моделі, побудованій в масштабі $1:37.2$, при таких характеристиках натурального потоку: витрата турбіни – $500 \text{ м}^3/\text{с}$, ширина турбінного блоку – 25 м , питома витрата $q = 20.4 \text{ м}^2/\text{с}$, глибина нижнього б'єфу – 4.26 м , число Фруда у стисненому перерізі потоку $Fr_1 = 1.13$. Утворювані хвилі, які можуть змінювати своє положення в просторі, негативно впливають на кріплення нижнього б'єфу, стабільність режиму експлуатації агрегатів станції, створюють труднощі для судноплавства.

Спроби уникнути утворення білякритичних режимів при роботі гідротехнічних і гідроенергетичних споруд далеко не завжди виявляються вдалими, вимагають суттєвих додаткових коштів, а іноді уникнути формування цих режимів взагалі неможливо. В таких випадках для забезпечення надійного розв'язку комплексу технічних проблем доводиться використовувати гідравлічне та математичне моделювання режимів роботи споруд, застосування якого для розглядуваного класу явищ має свої особливості [34, 35]. Таким чином, проблема розробки теорії і методів розрахунків білякритичних течій рідини є досить актуальною.

3. БАЗОВІ РІВНЯННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ ДЛЯ ОПИСАННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ

Виведення розрахункових залежностей, що описують профіль вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій рідини, ґрунтується на базових рівняннях класичної гідравліки – збереження енергії та моменту (кількості руху), нерозривності, рівняннях Ейлера, Бернуллі, Сен-Венана та

ін. При цьому для білякритичних течій стосовно умов плоскої задачі використовують відповідні залежності, отримані для різко змінного руху. Серед різних типів таких залежностей виділимо рівняння Буссінеска [36], Кортвега-де Фріса [5] та Селезова [37]. Ці нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних мають фундаментальний характер і описують процес розвитку та переміщення хвиль на поверхні незбуреної рідини.

Рівняння Кортвега-де Фріса вирізняється своєю універсальністю, описує багато різноманітних явищ та процесів різної фізичної природи, відноситься до числа основних рівнянь солітоніки і в загальному випадку для змінної у часі t величини u має такий вигляд:

$$u_t - k_1 u u_x - k_2 u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

де k_1, k_2 – деякі коефіцієнти; індекс біля u означає похідну по цьому параметру.

Для усталеного та неусталеного перманентного (стаціонарного) рухів профіль вільної поверхні відповідно в нерухомій та рухомій системах координат є незмінним, параметр часу t випадає з аналізу, внаслідок чого згадане рівняння істотно спрощується. Наведемо деякі з основних рівнянь, що використовуються як вихідні при розгляді білякритичних течій в умовах плоскої задачі:

1) рівняння енергії E Серра [23] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{q^2}{3gh} h'' - \frac{q^2}{6gh^2} h'^2, \quad (2)$$

2) рівняння моменту (функції імпульсу) M Серра [23] для прямолінійного дна:

$$M = \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh} + \frac{q^2}{3g} h'' - \frac{q^2}{3gh} h'^2, \quad (3)$$

3) розширене рівняння Бернуллі (енергії) типу Буссінеска у формі Хагера і Хутгера [27] для криволінійного дна

$$E = h + z + \frac{q^2}{2gh^2} \times \left(1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} + hz'' - h'z' - z'^2 \right), \quad (4)$$

4) розширене рівняння Бернуллі (енергії) типу Буссінеска у формі Хагера [38] для криволінійного дна

$$E = h + z + \frac{q^2}{2gh^2} \times \exp \left(\frac{2hh'' - h'^2}{3} + hz'' - h'z' - z'^2 \right), \quad (5)$$

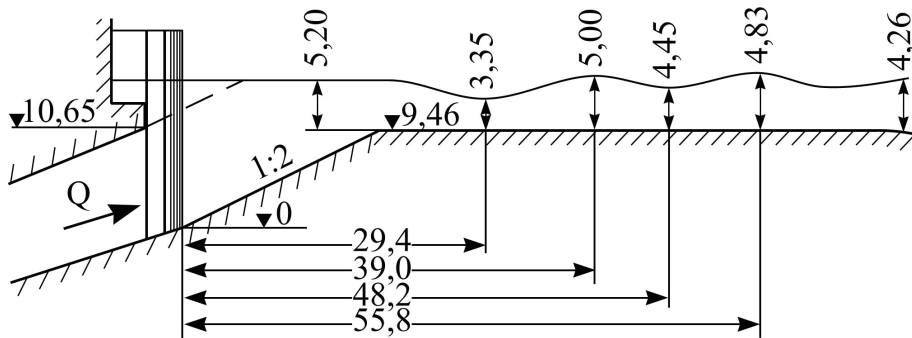


Рис. 1. Профіль вільної поверхні потоку за відсмоктувальною трубою Ризької ГЕС (розміри та відмітки дані в метрах)

5) розширене рівняння Бернуллі у формі Хагера і Хуттера [27] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \left(1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} \right), \quad (6)$$

6) розширене рівняння Бернуллі у формі Хагера [38] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \exp \left(\frac{2hh'' - h'^2}{3} \right), \quad (7)$$

7) рівняння енергії Буссінеска у формі Андерсена [39] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \left(1 + \frac{2}{3} hh'' \right), \quad (8)$$

8) рівняння енергії Хагера і Хуттера [27] для характерного перерізу потоку з відсутністю кривизни вільної поверхні для прямолінійного дна

$$E_0 = h_0 + \frac{q^2}{2gh_0^2} \left(1 - \frac{h_0'^2}{3} \right), \quad (9)$$

9) рівняння енергії Хагера [38] для характерного перерізу потоку з відсутністю кривизни вільної поверхні для прямолінійного дна

$$E_0 = h_0 + \frac{q^2}{2gh_0^2} \exp \left(-\frac{h_0'^2}{3} \right). \quad (10)$$

У наведених рівняннях h – довільна глибина; h_0 – характерна глибина, при якій $h_0' \neq 0$, а $h_0'' = 0$; z – положення довільної точки дна над віссю абсцис; x – поздовжня координата; q – питома витрата; g – прискорення вільного падіння. Необхідно підкреслити, що деякі із залежностей, наведених у цій статті, дещо перетворені і дані у прийнятих позначеннях.

Коментуючи наведені формули, необхідно зазначити наступне. Формули (6), (8), (9) є частинними випадками більш загальної формули Серра (2). Для випадку плавно змінного руху з гідростатичним розподілом тиску перша h' і друга h'' похідні функції $h(x)$ дорівнюють нулю, внаслідок чого залежності (2), (3), (6) – (10) зводяться відповідно до класичного вигляду [1, 2]:

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2}, \quad (11)$$

$$M = \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh}. \quad (12)$$

Функції енергії E та моменту M зв'язані між собою таким співвідношенням:

$$\frac{dM}{dx} = h \frac{dE}{dx}, \quad (13)$$

яке є справедливим як для плавно, так і різко змінного рухів [23].

У випадку прямолінійного горизонтального дна з віссю абсцис $0x$, що проходить по дну, значення z , z' та z'' дорівнюють нулю, внаслідок чого рівняння (4) і (5) перетворюються відповідно у залежності (6) і (7).

Порівнюючи формули (4) і (5), необхідно зауважити наступне. Обидві залежності дають близькі результати [38], проте із них перевагу необхідно віддати формулі (4). Ця формула є точним математичним розв'язком поставленої задачі і при z , z' та z'' , рівних нулю, вона зводиться до залежності Серра (2). Остання обставина має винятково важливе значення для розвитку теорії білякритичних течій рідини. Завдяки зазначеній можливості перетворення формули (4) у формулу (2) застосування залежності (4) при теоретичному вивченні білякритичних течій (так само як і відповідних рівнянь Серра та Кортвега-де Фріса) до-

зволяє отримати у відповідних розв'язках гіперболічний секанс $\operatorname{sch}(x)$ та еліптичну функцію Якобі амплітуди косінуса $\operatorname{sn}(z, k)$, що є неможливим на основі формули (5).

Причина такого положення полягає в наступному. Як відомо [40], експоненціальну функцію можна розкласти в ряд Тейлора

$$\exp x = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad (14)$$

Аналіз залежностей (4), (5) та (14) показує, що формули (4) і (5) є тотожними при використанні в розрахунках лише перших двох членів ряду Тейлора, тобто за умови

$$\exp x = 1 + x. \quad (15)$$

Використання у формулі (5) усіх наступних членів ряду Тейлора у кількісному відношенні мало впливає на остаточні результати. Проте з якісної точки зору таке використання істотно обмежує можливість знаходження аналітичного розв'язку поставленої задачі, зводячи їх лише до застосування чисельних і експериментальних методів.

На завершення цього параграфу відзначимо, що все сказане відносно порівнюваної пари формул (4) і (5) відноситься в рівній мірі також і до пар формул (6), (7) та (9), (10), які так само відрізняються між собою наявністю та відсутністю члена з $\exp(x)$. При цьому залежності (5), (7) і (10) з експоненціальною функцією можна вважати точними, якщо в них використовувати не всі, а лише перші два члени ряду Тейлора, тобто при виконанні умови (15).

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ

Безпосереднє використання залежностей (2)–(10) для розрахунку профілю вільної поверхні ускладнюється наявністю в них перших та других похідних функцій $h(x)$ та $z(x)$. Задачу розрахунку різко змінного усталеного та неусталеного перманентного (стаціонарного) руху вдається істотно спростити, позбавившись другої похідної h'' . Наведемо кілька таких рівнянь для випадку прямолінійного дна із z , z' та z'' , рівними нулю:

1) Кортевега-де Фріса у формі Бхатнагара [41] у вигляді кубічного полінома

$$h'^2 = \frac{1}{3\delta} (-h^3 + 3Ch^2 + 6Ah + 6B), \quad (16)$$

2) Серра [23], виражене через питому енергію E ,

$$h'^2 = \frac{6g}{q^2} \left(-\frac{h^3}{2} + Eh^2 + C_1h + \frac{q^2}{2g} \right), \quad (17)$$

3) Серра [23], виражене через момент M ,

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left(-\frac{h^3}{2} + C_2h^2 - Mh + \frac{q^2}{2g} \right), \quad (18)$$

4) Смилова [22],

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left(-\frac{2}{3}h^3 + Eh^2 - \frac{q^2}{g} \ln h + C_3 \right), \quad (19)$$

5) Андерсена [39], записане для випадку $h_k = \sqrt[3]{q^2/g} = 1$,

$$h'^2 = -2h^3 + 3Eh^2 - 3 \ln h + C_4, \quad (20)$$

6) Хагера і Хутера [27], основане на залежностях (6), (9) і записане для характерного перерізу з другою похідною $h''_0 = 0$,

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left[-h^3 + \left(2h_0 + \frac{q^2}{gh_0^2} - \frac{q^2 h_0'^2}{3g h_0^2} \right) h^2 - \left(h_0^2 + \frac{2q^2}{gh_0} - \frac{2q^2 h_0'}{3g h_0} \right) h + \frac{q^2}{g} \right], \quad (21)$$

7) Хагера [38], основане на залежностях (7), (10) і записане для характерного перерізу з другою похідною $h''_0 = 0$,

$$h'^2 = \frac{h_0'^2}{h_0\Phi} + 3 \left(1 - \frac{h}{h_0\Phi} \right) \ln \frac{q^2}{2gh_0^3} + 6 \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right) - 6 \left(2 + \frac{h}{h_0\Phi} \right) \ln \frac{h}{h_0} - 3 \left(1 - \frac{h}{h_0\Phi} \right) \ln \left(\Phi - \frac{h}{h_0} \right), \quad (22)$$

де $\Phi = \frac{E_0}{h_0}$ при енергії E_0 , підрахований за формулою (10).

У наведених залежностях δ , A , B , C , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 – деякі коефіцієнти та константи інтегрування.

На основі аналізу зазначених диференціальних рівнянь та їх використання у розрахунках можна висловити наступне.

Використання залежностей (15)–(19) вимагає встановлення значень питомої енергії E , функції імпульсу M , коефіцієнтів δ , A , B , C та констант інтегрування C_1 , C_2 , C_3 , C_4 . Звичайно, для різних явищ це робиться різними способами. Найчастіше згадані значення визначають для ділянки потоку з плавно змінним рухом і гідростатичним розподілом тиску по глибині.

Диференціальні рівняння (15)–(21) та подібні до них застосовують при розгляді комплексу задач, пов'язаних з такими явищами:

- водозлив з широким порогом [12],

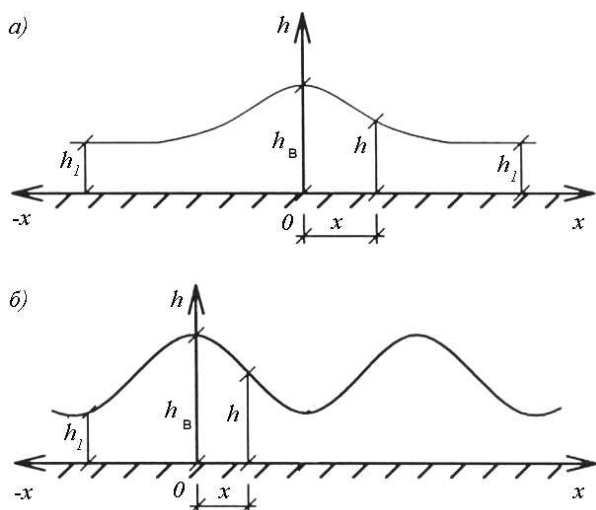


Рис. 2. Характерні профілі білякритичних течій:
а – самотньої хвилі, б – кноїдальних хвиль

- водозлив практичного профілю [15, 38, 42, 43],
- хвилястий стрибок [12, 13, 25, 27, 35, 39, 44 – 46],
- самотня хвиля [12, 17, 25, 36, 38],
- кноїдальні хвилі [5, 12, 17, 38],
- хвиля переміщення [24, 25].

При розгляді різних типів білякритичних течій рідини найчастіше використовують взаємозв'язані диференціальні рівняння Кортвега-де Фріса (15), Серра (16), (17) та їхні модифікації. Отримані при цьому розв'язки профілю вільної поверхні потоку зводяться до відомих формул самотньої хвилі (рис. 2, а)

$$h = h_1 + (h_B - h_1) \operatorname{sch}^2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{\frac{3g}{q^2}} (h_B - h_1) \right] \quad (23)$$

та кноїдальних хвиль (рис. 2, б)

$$h = h_1 + (h_B - h_1) \operatorname{cn}^2 \left(\frac{x}{\Delta}, k \right), \quad (24)$$

де h_B і h_1 – максимальна і мінімальні глибини відповідно; Δ і k – параметри хвилі.

Диференціальні рівняння Сміслова (18) та Андерсена (19), отримані на основі схожих вихідних умов і при критичній глибині $h_k = (q^2/g)^{1/3}$, є тотожними. Недоліком цих рівнянь є неврахування нахилу елементарних струмунок, хоча в кількісному відношенні ця обставина мало впливає на остаточні результати.

Своєрідний спосіб побудови профілю вільної поверхні запропонували В. Хагер і К. Хуттер [27, 38], які при виведенні своїх диференціальних рівнянь (20) і (21) для визначення енергії $E = E_0$ за формулами (9) і (10) та відповідних констант використовують характерний переріз розглядуваних явищ, де друга похідна h'' дорівнює нулю. Основним недоліком цього способу є проблема коректної оцінки значення першої похідної h' у зазначеному перерізі.

До сказаного необхідно додати, що диференціальні рівняння (18)–(21) позбавлені можливості отримати точні аналітичні розв'язки із використанням функцій $\operatorname{sch}(x)$ та $\operatorname{cn}(z, k)$.

5. ПРОБЛЕМИ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

Характеризуючи сучасний стан теорії і практики білякритичних течій рідини, можна означити такі основні проблеми, невирішеність яких істотно стримує розвиток цього наукового напрямку.

1. Відсутність системного підходу до вивчення класу білякритичних течій рідини. У більшості випадків кожне явище досліджується окремо без зв'язку з іншими. Спроби поширити використання залежностей, виведених для окремого явища, на весь клас білякритичних течій ведуть до парадоксальних результатів. Необхідні для розрахунків значення E , M , A , B , C , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 визначаються по-різному для різних явищ. Найчастіше вказані величини знаходять для ділянки потоку з паралельно струминним рухом, де похідні h' та h'' дорівнюють нулю, а розподіл тиску відповідає гідростатичному закону (хвилястий стрибок, самотня хвиля, водозлив з широким порогом та ін.).

В той самий час існують деякі типи явищ розглядуваного класу (кноїдальні хвилі, одиночна хвиля, окремі типи хвилястого стрибка тощо), на всій довжині яких взагалі не існує не тільки ділянки, а навіть і перерізів потоку з паралельно струминним рухом. У таких випадках значення вищезгаданих величин, знайдені як для потоку з паралельно струминним рухом, є нереальними і їх не можна перевірити в умовах фізичного експерименту шляхом безпосередніх вимірювань. Метод Хагера і Хуттера [27, 38] визначення згаданих величин для характерного перерізу розглядуваних явищ, у якому $h'' = 0$ та $h' \neq 0$, виявляється неефективним внаслідок невизначеності величини першої похідної h' у вказаному перерізі.

2. Відсутність єдиної точки зору про положення початкового перерізу окремих типів білякритичних течій з позицій, загальних для всього класу розглядуваних явищ. Так, для хвилястого стрибка

і нерухомої самотньої хвилі за початковий приймається переріз бурхливої течії, після якого починається різкий підйом вільної поверхні. Такий підхід виявляється абсолютно неприйнятним для підвиду кноїдальних хвиль, що утворюється на поверхні потоку у спокійному стані, адже ділянки з бурхливою течією по всій довжині цього явища взагалі не існують.

При розгляді кноїдальних хвиль Хагер [38] за характерний приймає переріз за вершиною першої хвилі, що проходить через точку перегину кривої вільної поверхні, де друга похідна $h'' = 0$. Такий переріз не можна вважати за початковий, адже відтворити в умовах фізичного експерименту кноїдальні хвилі, що починаються у зазначеному характерному перерізі, виявляється неможливим.

3. Невизначеність характеристик потоку у граничних перерізах розглядуваних явищ. В особливій мірі це відноситься до початкового перерізу окремих типів білякритичних течій. Так, для хвилястого стрибка та самотньої хвилі вважається, що у цьому перерізі потік є паралельно струминним з похідними h' і h'' , рівними нулю, та гідростатичним розподілом тиску по глибині. В той самий час проведені об'ємні експериментальні дослідження (див. розділ 8 даної статті) чітко довели, що в початковому перерізі хвилястого стрибка та деяких інших типів білякритичних течій за певних умов може бути не тільки гідростатичний, а й негідростатичний розподіл тиску. Тут доречно підкреслити, що фактор негідростатики має винятковий вплив на формування та основні характеристики білякритичних течій.

4. Існуючі методики визначення основних характеристик та умов існування різних типів явищ розглядуваного класу ґрунтуються на положенні про гідростатичний розподіл тиску у їхньому початковому перерізі і не враховують можливі нахил і кривизну елементарних струминок у цьому перерізі.

5. Теоретичні розв'язки диференціальних рівнянь Кортевега – де Фріса (15) та Серра (16) і (17) зводяться до класичних рівнянь самотньої (22) та кноїдальних хвиль (23), причому ці розв'язки виражені через максимальну h_B та мінімальну h_1 глибини розглядуваних явищ. Суттєвим недоліком такого способу описання профілю вільної поверхні потоку рідини є те, що при заданій мінімальній глибині h_1 та питомій втраті q максимальна глибина h_B під вершинами хвиль залишається невідомою. В той самий час визначення максимальної глибини є одним з головних завдань розрахунків різних типів гідротехнічних споруд, в межах яких можливе виникнення зазначених явищ.

6. Існуючі відомості про існування різних типів білякритичних течій рідини є надзвичайно суперечливими. Досить часто окремі точки зору з цього питання є діаметрально протилежними і повністю виключають одна одну. При цьому потребує необхідного уточнення (щодо принципової можливості та меж застосування) відома математична модель хвилястого стрибка та групових хвиль переміщення у вигляді сукупності самотньої і кноїдальних хвиль.

6. ПАРАДОКСИ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ

Ще Ф. Серр [23] відмітив, що застосування залежностей плавно змінного руху до білякритичних течій веде до фізично абсурдних результатів. Детальний аналіз існуючої інформації, виконаний нами на основі системного розгляду сукупності всіх типів явищ, віднесених до класу білякритичних течій рідини, дозволив виявити і сформулювати п'ять парадоксів, суть яких не можна розкрити на основі традиційної теорії плавно змінного руху. Формулювання парадоксів впливають із комплексного розгляду всіх явищ виділеного класу з єдиних позицій. Характерно, що деякі з описаних парадоксів виникають при спробі поширити існуючі поняття та залежності, отримані для якогось одного явища (і для нього в межах прийнятих передумов абсолютно правильних), на всі інші типи явищ розглядуваного класу.

Для забезпечення загального підходу при розгляді всіх типів білякритичних течій дамо кілька визначень, загальних як для усталених потоків, так і хвиль переміщення.

Початковим називається такий **переріз 1-1 з мінімальною глибиною** розглядуваного явища, за яким починається різке збільшення глибини потоку, і в якому дотичні до кривої вільної поверхні та п'езометричної лінії займають горизонтальне положення (рис. 3). Таке визначення допускає наявність у початковому перерізі як негідростатичного, так і гідростатичного (коли обидві дотичні зливаються в одну лінію) розподілу тиску по глибині. Початкову глибину h_1 білякритичних течій будемо називати також **першою спряженою глибиною**.

Другою спряженою глибиною білякритичних течій називається глибина h_2 в перерізі 2-2, вибраному у напрямку збільшення глибини, в якому розподіл тиску по висоті описується гідростатичним законом. Для явищ з поверхневим вальцем такий переріз приймають на певній віддалі від кінця цього вальця (рис. 3, а), а для явищ з хвиля-

стою поверхнею за такий переріз приймають переріз, що проходить через одну із точок перетину кривої вільної поверхні та п'єзометричної лінії в області першого гребеня (рис. 3, б). Звичайно вважається, що згадані точки співпадають з точками перегину кривої вільної поверхні, де друга похідна $h'' = d^2h/dx^2 = 0$. Якщо на гребені першої хвилі утворюється невеликий поверхневий валець, то переріз із другою спряженою глибиною приймають за цим же принципом в області другого гребеня. Зазначимо, що у цій роботі всі характеристики потоку, віднесені до перерізу 1-1, мають індекс "1", а до перерізу 2-2 – індекс "2". Глибина h_B під вершиною однієї з хвиль (звичайно першої або другої) явищ з хвилястою поверхнею називається **максимальною**.

Фактичний стан безнапірних потоків рідини часто оцінюють за допомогою числа Фруда, яке при розгляді біякритичних течій звичайно відносять до їхнього початкового перерізу 1-1. Для нерухомих біякритичних явищ з усталеним у часі рухом рідини, а також для перманентних (стаціонарних) хвиль переміщення на поверхні нерухомої рідини число Фруда Fr_1 знаходять відповідно за такими залежностями:

$$Fr_1 = \frac{v_1^2}{gh_1}, \quad (25)$$

$$Fr_1 = \frac{c^2}{gh_1}. \quad (26)$$

При цьому за характерну швидкість розглядуваних явищ у першому випадку приймають швидкість потоку v_1 у перерізі 1-1, а в другому – швидкість c переміщення хвиль. Для течій у критичному стані число Фруда Fr_1 дорівнює одиниці. У загальному випадку для біякритичних течій рідини число Фруда $Fr_1 \leq 1$, проте для стаціонарних хвиль переміщення $Fr_1 > 1$.

Згадані парадокси сформулюємо таким чином.

1. Рівняння Беланже спряжених глибин

$$\eta = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1} - 1 \right), \quad (27)$$

виведене для досконалого гідравлічного стрибка, можна використовувати також і для таких біякритичних течій, як хвилястий стрибок, самотня хвиля (рухома чи нерухома) та хвиль переміщення (з гладкою чи вальцеподібною поверхнею). Проте для явищ з числом Фруда в їхньому початковому перерізі $Fr_1 < 1$ (до них можна віднести кноїдальні хвилі, безстрибкове вальцеве спряження б'єфів та ін.) формула (26) дає співвідношення $h_2 < h_1$, хоча в дійсності $h_2 > h_1$.

2. Формулу Рассела–Буссінеска

$$\eta_B = \frac{h_B}{h_1} = Fr_1, \quad (28)$$

що зв'язує максимальну h_B та мінімальну h_1 глибини самотньої хвилі, використовують також і для хвилястого стрибка та групових хвиль переміщення з гладкою хвилястою поверхнею. Проте для одиночної хвилі і кноїдальних хвиль з числом Фруда $Fr_1 < 1$ формула (27) вимагає співвідношення $h_B < h_1$, хоча в дійсності $h_B > h_1$.

3. Проведені експерименти [8, 47] показали, що гідравлічний стрибок з поверхневим вальцем можна отримати при числах Фруда $Fr_1 < 3$, причому як завгодно близьких до одиниці. Проте класична гідравліка вважає, що при зазначених числах Фруда повинен утворюватися не досконалий, а хвилястий стрибок.

4. При вивченні явища витікання води з-під щита в дослідах [8] вдалося добитися положення, коли висота підняття затвора h_w в точності дорівнює критичній глибині h_K , при якій питома енергія перерізу

$$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (29)$$

дорівнює мінімальному значенню E_{\min} . Проте при цьому потік свого руху не припиняв, а продовжував рухатися вздовж лотка, витрачаючи певну енергію на долаття сил опору, тобто в даному випадку питома енергія потоку у вихідному перерізі щита не була мінімальною.

5. В ряді робіт [25, 30] при одному і тому самому значенні числа Фруда Fr_1 (звичайно згадується діапазон $Fr_1 \approx 1.5 - 4.2$) допускається існування не одного якогось явища, а кількох типів біякритичних течій, і зокрема – самотньої хвилі, хвилястого стрибка, стрибка-хвилі, недосконалого стрибка у вигляді зруйнованої хвилі та інших, що суперечить тезі про однозначність описання безнапірних потоків числом Фруда.

7. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА УСТАНОВКА ТА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

З метою досконального вивчення біякритичних течій рідини, розкриття суті описаних парадоксів та виявлення повного переліку всіх факторів, що визначають формування розглядуваних течій, в Національному університеті водного господарства та природокористування були поставлені спеціальні експерименти. Досліди проводились стосовно умов плоскої задачі у великому дзеркальному лотку з прямокутною формою по-

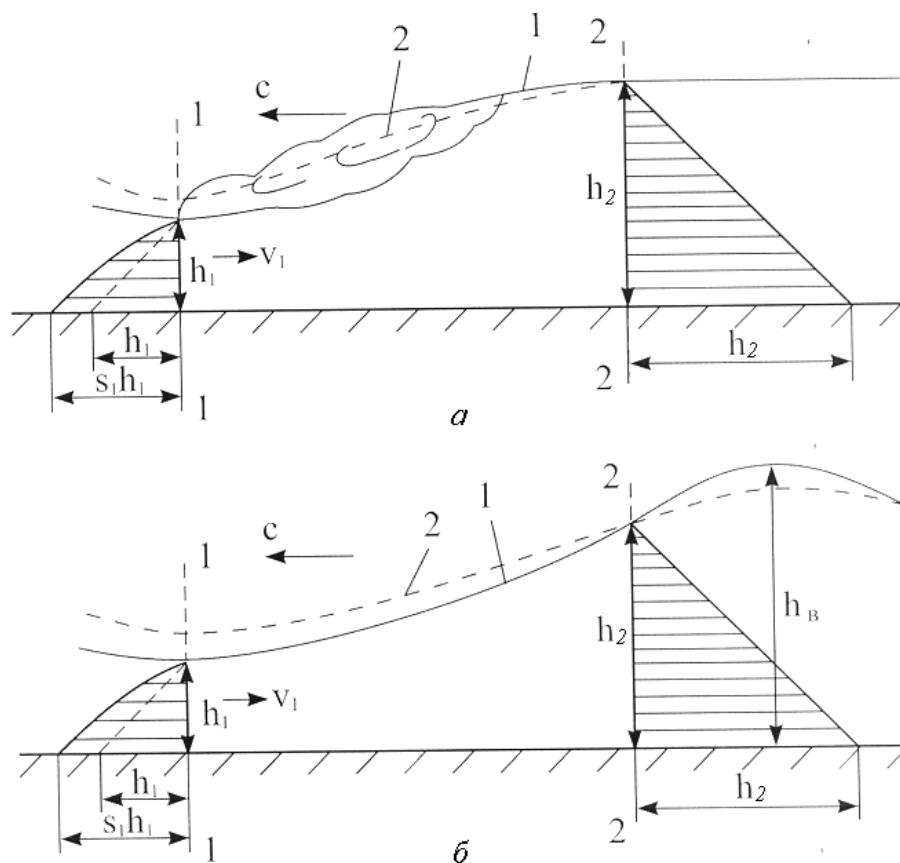


Рис. 3. Схема біякритичних течій рідини:
 а – з вальцеподібною поверхнею, б – з хвилястою поверхнею;
 1 – крива вільної поверхні, 2 – п'єзометрична лінія

перечного перерізу. Довжина лотка – 39.0 м, ширина – 1.0 м, висота – 1.0 м. Поздовжній похил початкової частини лотка на довжині 23.1 м дорівнював 0.000487 і був незмінним, а похил кінцевої частини, довжиною 15.9 м, можна було змінювати. Досліджувані біякритичні течії утворювалися за схемою витікання води з-під затвора з різними формами конфігурації його нижньої частини (рис. 4).

Для вимірювання осередненого тиску на дно по осі лотка було влаштовано дві групи п'єзометрів загальною кількістю 95 штук. Більш детально експериментальна установка описана в роботах [3, 8]. Досліди проводилися з усіма дванадцятьма типами нерухомих біякритичних явищ. Основні характеристики цих дослідів наведені в табл. 1.

Необхідно підкреслити, що вільна поверхня біякритичних течій, положення якої визначається умовами досить нестійкої динамічної рівноваги, в проведених дослідах не була абсолютно нерухомою в часі, а здійснювала певні коливання від-

носно деякого осередненого положення. Внаслідок цього в будь-якому фіксованому перерізі потоку глибина і п'єзометричний тиск на дні змінювалися в часі. На використовуваній експериментальній установці з досить великими геометричними розмірами ці коливання виявилися істотними. Враховуючи цю обставину, була прийнята наступна методика здійснення необхідних вимірювань. На початку дослідів фіксувалось осереднене в часі положення вільної поверхні досліджуваного явища. При цьому на бокові стінки лотка наносилися необхідні мітки, а вимірювання обрисів профілю вільної поверхні та п'єзометричної лінії проводилися лише в моменти, коли досліджуване явище займало вибране осереднене положення.

Звичайно, реалізація такої методики вимагала великих затрат часу. Наприклад, для побудови профілів вільної поверхні і п'єзометричної лінії лише в одному досліді необхідно було здійснити біля 120 вимірювань, які виконувались у процесі постійного чекання потрібної фази розви-

Таблиця 1

Основні характеристики проведених дослідів з білякритичними течіями

№ з/п	Тип явища	Кількість дослідів	Витрата Q , л/с	Характеристики потоку в початковому перерізі		
				глибина h_1 , см	коефіцієнт негідростатичності s_1	число Фруда Fr_1
1	Безстрибкове вальцеве спряження б'єфів ($Fr_1 \leq 1, s_1 > 1$)	50	25.0-281.4	4.3-22.0	1.06-1.17	0.48-1.00
2	Одиночна хвиля у спокійному чи критичному потоці ($Fr_1 \leq 1, s_1 > 1$)	11	92.5-196.4	10.0-16.0	1.02-1.04	0.84-1.00
3	Одиночна хвиля з хвостом у спокійному чи критичному потоці ($Fr_1 \leq 1, s_1 > 1$)	2	170.0-302.6	15.0-22.0	1.02	0.88-0.89
4	Одиночна хвиля у бурхливому потоці ($Fr_1 > 1, s_1 > 1$)	30	95.2-371.0	9.0-22.0	1.01-1.06	1.01-1.64
5	Одиночна хвиля з хвостом у бурхливому потоці ($Fr_1 > 1, s_1 > 1$)	5	168.9-351.0	13.0-22.0	1.03-1.05	1.05-1.34
6	Самотня хвиля ($Fr_1 > 1, s_1 = 1$)	6	79.4-167.7	7.0-12.0	1.00	1.59-1.90
7	Самотня хвиля з хвостом ($Fr_1 > 1, s_1 = 1$)	3	31.6-150.2	7.0-11.0	1.00	1.75-1.95
8	Кноїдальні хвилі у спокійному чи критичному потоці ($Fr_1 \leq 1, s_1 > 1$)	45	27.0-331.5	5.0-26.0	1.02-1.07	0.46-0.96
9	Кноїдальні хвилі у бурхливому потоці ($Fr_1 > 1, s_1 > 1$)	7	71.2-150.6	8.0-13.0	1.05-1.06	1.01-1.18
10	Хвилястий стрибок з гладкою поверхнею ($Fr_1 > 1, s_1 \geq 1$)	19	72.0-382.0	6.1-22.0	1.00-1.04	1.27-2.60
11	Хвилястий стрибок з поверхневим вальцем ($Fr_1 > 1, s_1 \geq 1$)	25	52.5-384.0	4.0-19.9	1.00-1.12	1.20-4.53
12	Гідравлічний стрибок з поверхневим вальцем ($Fr_1 > 1, s_1 \geq 1$)	78	26.2-426.0	3.2-1.8	1.00-1.42	1.02-4.98

тку досліджуваного явища. Проте ці затрати часу компенсуються високою якістю результатів, адже всі отримувані при цьому експериментальні точки відповідають вибраній фазі змінного в часі явища. Описана особливість визначає певні переваги використовуваної методики перед методикою визначення профілю вільної поверхні потоку за допомогою вимірювача, встановленого на рухомому візку з сервомеханізмом, який забезпечує переміщення візка вздовж лотка з певною швидкістю [46]. Причина цього полягає в тому, що рух візка з постійною швидкістю не відповідає характеру коливань вільної поверхні. За отримуваними результатами використана методика є близькою до методики фіксації обрису вільної поверхні з допомогою фотокамери, застосованої в роботах [35, 48], хоча кожна з цих методик має свої позитивні і негативні риси.

8. РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Проведеними експериментами було чітко доведено, що на відміну від звичайних безнапірних бурхливих та спокійних потоків з плавно змінним рухом білякритичні течії рідини не можна однозначно описати лише одним числом Фруда Fr_1 в їхньому початковому перерізі. Для коректного описання розглянутих течій в додаток до числа Фруда Fr_1 необхідно враховувати ще й можливі нахил та кривизну елементарних струминок у вертикальній площині (або іншими словами можливе відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині) в тому ж перерізі.

Ступінь відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині у довільному перерізі потоків з хвилястою поверхнею зручно оцінювати за допомогою пов'язаних між собою коефіцієнтів потенціальної енергії, гідродинамічного тиску та негідростатичності [8, 12, 49, 50]. **Коефіцієнт по-**

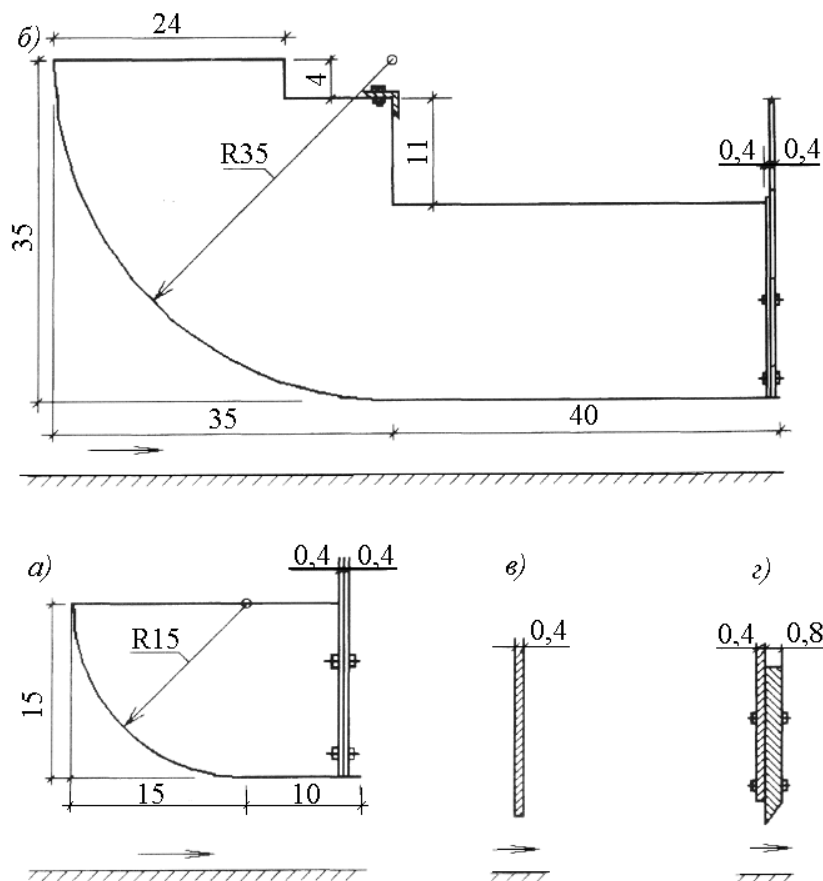


Рис. 4. Конфігурації нижньої частини затвору:

a – обтікач першого типу, *б* – обтікач другого типу, *в* – необроблений металевий лист, *г* – металевий лист з гострим краєм (розміри дані в сантиметрах; стрілками показано напрямок руху води)

тенціальної енергії $\beta = E_{\text{пот}}/h$ являє собою відношення питомої потенціальної енергії E_n , визначеної відносно дна в розглядуваному перерізі, до глибини h в цьому ж перерізі. Використовується в теоретичних схемах при застосуванні рівняння енергії. **Коефіцієнт гідродинамічного тиску** $k = F_{e.g.d.t}/F_{e.g.c.t}$ являє собою відношення площі епюри гідродинамічного тиску $F_{e.g.d.t}$ до площі епюри гідростатичного тиску $F_{e.g.c.t}$ в тому ж перерізі. Використовується у рівнянні кількості руху (рівнянні моменту). **Коефіцієнт негідростатичності** $s = h_{п.д}/h$ являє собою відношення п'єзометричного тиску на дні $h_{п.д}$, виміряного п'єзометром і вираженого у висоті водяного стовпа, до аналогічного тиску при гідростатичному розподілі, тобто до глибини потоку h . Використовується при експериментальних вимірюваннях характеристик потоку.

Проведені дослідження [11, 12, 23] показали, що у перерізах потоку, проведених через вершини і

підшви хвиль, спостерігається близький до параболічного закон розподілу гідродинамічного тиску. Для цього випадку справедливі такі співвідношення, що зв'язують вказані коефіцієнти [8, 12]:

$$\beta = \frac{1 + 2s}{3}, \quad (30)$$

$$k = \frac{4s - 1}{3}, \quad (31)$$

$$\beta = \frac{1 + k}{2}. \quad (32)$$

Тут доречно підкреслити, що для ввігнутих потоків коефіцієнти s , β , k більші одиниці, для випуклих – менші одиниці, а для перерізів з гідростатичним розподілом тиску по глибині – дорівнюють одиниці.

Зроблений висновок прекрасно ілюструють результати двох пар дослідів (*a*, *б*) і (*в*, *г*), відображені на рис. 5 та в табл. 2. Ці досліді підібрані таким чином, що в кожній парі відповідно є однаковими

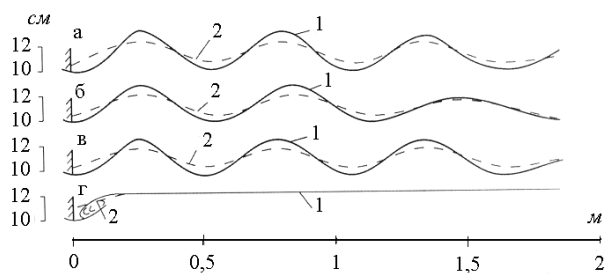


Рис. 5. Криві вільної поверхні (1) та п'єзометричної лінії (2) для двох пар дослідів (а, б) і (в, г) з кноїдальними хвилями і безстрибковим вальцевим спряженням б'єфів

витрати Q , початкові глибини h_1 досліджуваних явищ, числа Фруда Fr_1 , але різними значення другої спряженої глибини h_2 (яка в досліді змінювалася шляхом зміни глибини нижнього б'єфу), а відповідно і ступінь відхилення від гідростатичного розподілу тиску в початковому перерізі.

З наведеної інформації видно, що хоча в порівнюваних парах дослідів числа Фруда Fr_1 є однаковими, проте обриси кривої вільної поверхні та п'єзометричної лінії, а відповідно і висотні характеристики (h_2 та h_B) порівнюваних явищ є різними. Характерно, що в досліді другої пари різними є навіть типи розглядуваних явищ.

Важливо зазначити, що зроблений висновок про необхідність описання білякритичних течій рідини двома параметрами – числом Фруда Fr_1 і одним з коефіцієнтів s_1 , k_1 , β_1 у їх початковому перерізі абсолютно не суперечить, а навпаки, повністю відповідає існуючим поглядам на потоки з криволінійною у вертикальній площині поверхнею. У загальному випадку довільного перерізу такого потоку відомі вирази питомої енергії, функції імпульсу (моменту), розширеного рівняння Бернуллі, диференціальних рівнянь кривої лінії поверхні (див. розділи 3 і 4 даної статті) нахил і кривизну цієї кривої в умовах плоскої задачі враховують відповідно за допомогою першої h' та другої h'' похідних функції $h = h(x)$ [12 – 15].

Відповідно до вищенаведеного визначення першої спряженої глибини все сказане про довільний переріз у певній мірі можна поширити і на початковий переріз білякритичних течій. Але тут дуже важливо пам'ятати, що у початковому перерізі розглядуваних явищ далеко не завжди похідні h' та h'' є відмінними від нуля.

9. ПРО РОЗПОДІЛ ТИСКУ ПО ГЛИБИНІ У ПОЧАТКОВОМУ ПЕРЕРІЗІ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

Основною причиною непорозуміння в трактуванні вищеприказаних парадоксів є теза, що білякритичні течії як складова частина безнапірних потоків однозначно описуються лише одним параметром – числом Фруда в їхньому характерному перерізі, за який звичайно приймається початковий переріз розглядуваних явищ з числом Фруда Fr_1 . При цьому залежності (26)–(28), які використовуються для опису білякритичних течій, передбачають наявність гідростатичного закону розподілу тиску в початковому перерізі цих течій. Проте результати проведених автором експериментів (див. табл. 1) свідчать, що в зазначеному перерізі потік може бути не тільки паралельно струминним з гідростатичним розподілом тиску ($s_1 = 1$), а досить часто може мати нахил і кривизну та відповідно негідростатичний розподіл тиску ($s_1 > 1$). Тобто в загальному випадку для всього класу білякритичних течій рідини можна записати

$$s_1 \geq 1. \quad (33)$$

Як видно із табл. 1, в початковому перерізі самотньої хвилі завжди спостерігається гідростатика ($s_1 = 1$), кноїдальних хвиль, безстрибкового вальцевого спряження б'єфів і одиночної хвилі – завжди негідростатика ($s_1 > 1$), а хвилястого і досконалого гідравлічного стрибка може бути як гідростатика, так і негідростатика ($s_1 \geq 1$). В доповнення до цього можна сказати, що для всіх типів перманентних хвиль переміщення із $Fr_1 > 1$ коефіцієнт негідростатичності $s_1 = 1$.

Необхідно особливо відзначити, що питання про граничні умови в початковому перерізі білякритичних течій рідини виявляється недостатньо вивченим. Досить часто апіорі вважається, що в зазначеному перерізі багатьох типів розглядуваних явищ потік є паралельно струминним з гідростатичним розподілом тиску. При цьому можливість існування нахилу і кривизни елементарних струминок в цьому перерізі взагалі не розглядається.

В ряді робіт [12, 15, 49, 50] робиться спроба описати потоки з криволінійною поверхнею (в тому числі і білякритичні) за допомогою числа Фруда, в яке вводиться додатковий коефіцієнт, що враховує нахил і кривизну елементарних струминок:

$$Fr = \frac{v^2}{\beta gh}. \quad (34)$$

Такий прийом є цілком прийнятним для якісного описання розглядуваних течій. Проте для

Основні характеристики дослідів, зображених на рис. 5

Шифр дослідів	Q , л/с	h_1 , см	Fr_1	s_1	h_2 , см	h_B , см	Тип явища
а	96.6	10.0	0.96	1.06	11.6	13.2	кноїдальні хвилі
б	96.6	10.0	0.96	1.04	11.4	12.7	кноїдальні хвилі
в	92.5	10.0	0.88	1.05	11.3	12.6	кноїдальні хвилі
г	92.5	10.0	0.88	1.11	12.35	–	безстрибкове вальце веспряження б'єфів

точної кількісної оцінки він виявляється не ефективним. Причина цього полягає в тому, що вплив складових β та v^2/gb у формулі (32) на формування білякритичних течій є різним, про що свідчить структура теоретичних залежностей, які описують розглядуваний клас явищ [51].

Експериментальне вивчення нахилу і кривизни не тільки елементарних струминок, а й навіть кривої вільної поверхні шляхом безпосередніх вимірювань цих параметрів при нинішньому рівні розвитку вимірювальної техніки є мало перспективним внаслідок відсутності надійної методики вимірювань та необхідної апаратури. За таких умов у проведених експериментах було вирішено оцінювати сумарний ефект нахилу і кривизни елементарних струминок у розглядуваних перерізах потоку за допомогою донних п'езометрів. Знаючи п'езометричний тиск у двох точках розглядуваного вертикального перерізу потоку з глибиною h (на поверхні $h_{п.п} = 0$ а на дні $h_{п.д} = sh$), за формулами (30)–(32) легко підрахувати значення коефіцієнтів s , k , β , які враховують сумарний вплив нахилу і кривизни елементарних струминок на відповідні характеристики в розглядуваному перерізі потоку.

10. РОЗКРИТТЯ СУТІ ПАРАДОКСІВ

Встановлений факт, що для коректного описання білякритичних течій рідини в додаток до числа Фруда Fr_1 необхідно враховувати ще й один з коефіцієнтів s_1 , k_1 , β_1 , які характеризують нахил і кривизну елементарних струминок у початковому перерізі розглядуваних явищ, дозволяє легко розкрити суть наведених парадоксів білякритичних течій.

Формули (27) і (28) виведені для випадку гідро-

статичного закону розподілу тиску в початковому перерізі розглядуваних явищ, коли коефіцієнти s_1 , k_1 , β_1 дорівнюють одиниці. Проте в дійсності для явищ, згаданих в першому та другому парадоксах, ці коефіцієнти є більшими одиниці. Через це формули (27) і (28), які не враховують цього фактора, виявляються неприйнятними для явищ з числом Фруда $Fr_1 < 1$.

В роботі [8] виведені такі залежності для визначення другої спряженої h_2 всього класу білякритичних течій та максимальної глибини h_B білякритичних течій з хвилястою поверхнею:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4s_1 - 1}{3} + 2Fr_1} \times \quad (35)$$

$$\times \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}\alpha_{02}Fr_1}{\sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + 2Fr_1\right)^3}} \right] \right\},$$

$$\frac{h_B}{h_1} = \frac{1}{2} \left[\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1} \right], \quad (36)$$

де α_{02} – коефіцієнт кількості руху (Буссінеска) в перерізі із другою спряженою глибиною.

Формули (35) і (36) є теоретичними і в частинному випадку гідростатичного розподілу тиску по глибині в початковому перерізі розглядуваних явищ вони приводяться до відомих залежностей (27) і (28) відповідно.

В згаданих у третьому парадоксі дослідженнях гідравлічного стрибка з поверхневим вальцем при числах Фруда $Fr_1 = 1 - 3$ коефіцієнт негідростатичності s_1 не дорівнював одиниці, а був більшим

граничного значення $s_1^{lim} = 1.07$, при якому утворюється хвилястий стрибок [8]. Внаслідок цього на установці при вказаних числах Фруда утворювався гідравлічний стрибок з поверхневим вальцем.

У вихідному перерізі затвора в дослідях з $h_{ш} = h_k$, описаних у четвертому парадоксі, потік був не паралельноструминним, а ввігнутий, через що коефіцієнти s_1 , k_1 , β_1 були більшими одиниці. Як показано у роботі [49] для потоків, викривлених у вертикальній площині, питому енергію перерізу E необхідно знаходити не за формулою (29), а за такою залежністю

$$E = \beta h + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (37)$$

Таким чином, в даному випадку питома енергія перерізу E на виході із затвора була більшою мінімального значення.

Згадуване в п'ятому парадоксі існування різних типів біякритичних течій рідини при одному і тому ж числі Фруда Fr_1 можна пояснити різними значеннями коефіцієнта негідростатичності s_1 (для прикладу див. параметри дослідів другої пари, показаних на рис. 3). Зауважимо, що в роботах [3, 51] умови існування різних типів біякритичних течій рідини даються в залежності від параметрів Fr_1 та s_1 .

ВИСНОВКИ

1. Сучасний стан теорії і практики біякритичних течій рідини іще далекий від досконалості, що створює істотні проблеми для визначення основних характеристик та умов існування різних типів течій.

2. Застосування до біякритичних течій традиційної теорії плавно змінного руху з гідростатичним розподілом тиску у вертикальних перерізах потоку приводить до парадоксальних результатів.

3. На відміну від звичайних потоків з вільною поверхнею, які однозначно описуються (а відповідно і моделюються) характерним числом Фруда, біякритичні течії рідини, необхідно характеризувати не одним, а двома параметрами – числом Фруда в їх початковому перерізі та коефіцієнтом, що враховує нахил і кривизну елементарних струминок у тому ж перерізі.

4. На основі цього положення розкрита суть виявлених парадоксів.

5. Розкриття сутті виявлених парадоксів є ключем до правильного розуміння природи біякритичних течій рідини і відкриває надзвичайно перспективний напрям подальших теоретичних і експериментальних досліджень розглянутих течій

та розробки ефективних методів практичних розрахунків характеристик різних типів цих течій.

1. Чугаев Р.Р. Гидравлика.– Л.: Энергоиздат, 1982.– 672 с.
2. Chow V.T. Open channel hydraulics, Mc Graw-Hill, New York.– 1959
3. Рябенко А.А. Типы, особенности и условия существования околокритических течений // Гидротехническое строительство.– 1992.– №5.– С. 9–13.
4. Russell J.C. Report on waves, Report British Association for the Advancement of Science, London.– 1844.– P. 311–390
5. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // Philosophical Magazine and Journal of Science.– 1895.– V.39, N5.– P. 422–443.
6. Darcy H., Bazin H. Recherches hydrauliques // Imprimerie Impériale. Parties 1 et 2. Paris.– 1865
7. Бахметев Б.А. О неравномерном движении жидкости в открытом русле.– Л.: КУБУЧ, 1928.– 275 с.
8. Рябенко А.А. Исследование околокритических течений в открытых руслах.– Дис. канд. техн. наук: 05.14.09: Ровно, 1975.– 184 с.
9. Favre H. Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts // Dunod: Paris.– 1935
10. Zipparro V. J., Hasen H. Davis handbook of applied hydraulics // Fourth Edition Mc Graw-Hill.– 1993
11. Khafagi A., Hammad S.Z. The critical depth, the critical velocity and the Froude number as functions of the non-uniform flow // Water and Water Engineering 1954.– P. 436–445
12. Смыслов В.В. Теория водослива с широким порогом.– Киев: Изд - во АН УССР, 1956.– 184 с.
13. Вереземский В.Г. Косой прыжок и критическая глубина открытого потока // Труды конгресса по гидротехнике.– 1969.– Т.52 .– С. 46–57.
14. Hager W.H. Critical flow condition in open channel hydraulics // Acta Mechanica.– 1985.– V.54.– P. 157–179.
15. Castro-Orgaz O., Giraldez J.V., Ayuso J.L. Critical flow over spillway profiles. Proceedings of the Institution of Civil Engineers // Water Management.– 2008.– V.161.– P. 89–95.
16. Stoker J. J. Water waves // Interscience publishers. New York- London.– 1967
17. Lamb H. Hydrodynamics Dover publication. New York.– 1932
18. Newell A. C. Solitons in mathematics and physics // Soc. for Ind, and Appl. Math. Arizona 1985
19. Жуковский Н.Е. Теоретические основы воздухоплавания.– М.: Государственное техническое издательство, 1925.– 306 с.
20. Guderley K. G. Theorie schallnaher strömungen Berlin.– 1957
21. Смыслов В.В. Исследование околокритических течений жидкости в открытых руслах // Изв. вузов. Энергетика.– 1967.– №1 .– С. 97–103.

22. Сислов В.В. Дослідження руху води через споруди з урахуванням кривизни та похилу вільної поверхні // Вісті інституту гідрології і гідротехніки АН УРСР.– 1950.– Т.6 (XIII).– С. 37–54.
23. Serre F. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche.– 1953.– N3, 6.– P. 374 - 388, 830 - 872.
24. Serre F. Contribution a l'étude des ondes longues irrotationnelles // La Houille Blanche.– 1956.– N3.– P. 375–390.
25. Турсунов А.А. Околокритическое состояние безнапорных потоков воды // Изв. ВНИИГ.– 1969.– Т.90 .– С. 201–224.
26. Рябенко А.А. О представлении волнистого прыжка и группы волн перемещения как совокупности уединенной и кноидальных волн // Гидротехническое строительство.– 1998.– №5 .– С. 9–14.
27. Hager W.H., Hutter K. On pseudo- uniform flow in open channel hydraulics // Acta Mechanica.– 1984.– V.53, N3-4.– P. 183–200.
28. Chanson H. Free surface flow with near-critical flow condition // Canadian Journal of Civil Engineering.– 1996.– V.23, N6.– P. 1272–1284.
29. Дерюгин Г.К., Наумов О.С. Разрушение плотин в связи с пропуском сбросных расходов // Гиротехническое строительство.– 1995.– №7 .– С. 30–33.
30. Швайнштейн А.М. Строительные туннели. Гидравлические условия работы.– М.: Энергоатомиздат, 1986.– 128 с.
31. Заиров Х.И., Листровой П.П. Волны перемещения в Каршинском магистральном канале и способ их гашения // Доклады ВАСХНИЛ. - М.: Колос.– 1979.– №2 .– С. 39–41.
32. Riquois R., Ract-Madoux X. Intumescences observées sur le canal d'amenée de la chute d'Oraison lors des rapides de charge.– XI Congress IAHR, V.III, Leningrad: №3.53, 1965.– 15 с.
33. Слиский С. М. Гидравлика зданий гидроэлектростанций.– М.: Энергия, 1970.– 424 с.
34. Ryabenko A., Kravets S., Kojouchko L, Hassane M.. Modélisation hydraulique des écoulements liquides au voisinage de la profondeur critique // Actes du Colloque International sur l'Eau et l'Environnement.– 2004.– Alger.– P. 180–188.
35. Wols B. A. Undular hidraulic jumps. Master Sc.– Thesis: Delft Univerrsty of Tehnology, 2005.– 125 с.
36. Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond // Journ. Math. Pures Appl.– 1872.– S.2-17.– P. 55–108.
37. Селезов И.Т. Распространение нелинейных неустановившихся поверхностных гравитационных волн над неровным дном // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– Т.1(73), №1 .– С. 102–109.
38. Hager W.H. Equations for plane, moderately curved open channel flows // Journal of Hydraulic Engineering, ASCE.– 1985.– V.111, N4.– P. 541–546.
39. Andersen V.M. Undular Hydraulic Jump // Journal of the Hydraulics Division. ASCE.– 1978.– V.104, N HX8.– P. 1185–1188.
40. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– М.: Наука, 1973.– 832 с.
41. Bhatnagar P.I. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems// Clarendon Press Oxford.– 1979
42. Faver C. Étude de quelques écoulements à filets courbes. Thèse Université de Lausanne.– 1937
43. Matthew G.D. On the influence of curvature, surface tension and viscosity on flow over round-crested weirs. ICE // Proceedings of the Institution of civil Engineers.– 1963.– V.25, N4.– P. 511–524.
44. Iwasa Y. Undular jump and its limiting Condition for existence// Proc. 5 th Japan National Congress for Applied Mechanics, Tokyo.– 1955.– P. 315–319
45. Montes J. C., Chanson H. Characteristics of undular hydraulic jumps // Experiments and analisis, Journal of Hydraulic Engineering. ASCE.– 1998.– V.2, N2.– P. 192–205.
46. Ohtsu I., Yasuda Y., Gotoh H. Hydraulic condition for undular jump formation // Journal of Hydraulic Rescarch, IAHR.– 2001.– V.39, N2.– P. 203–209.
47. Мельников А.Н. О критерии перехода совершенного прыжка воды в несовершенный в прямоугольном призматическом русле с горизонтальным дном // Гидротехническое строительство.– 1959.– №3.– С. 49–51.
48. Koch C., Chanson H. Unsteady turbulence characteristics in an undular bore// International conference on fluvial hydraulics river flow, Lisbon.– 2006.–P. 79–88
49. Сухомел Г.Й., Розовський І.Л., Смилов В.В. Про плоский рух потоку з вільною поверхнею з струминками, викривленими у вертикальних площинах // Доповіді АН УРСР, ВТН.– 1947.– №3.– С. 75–80.
50. Jaeger C . Technische Hydraulik// Verlad Birkhauser, Basel.– 1949
51. Рябенко О.А. Форми вільної поверхні та умови існування гідродинамічного солітону, одиночної і кноїдальної хвиль // Прикладна гідромеханіка.– 2007.– Т.9(81), №1 .– С. 66–88.