

УДК 532.59

НАВЕДЕНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ, ОБУМОВЛЕНЕ ХВИЛЬОВИМИ ПОЛЯМИ ЗА РУХОМИМ ОБ'ЄКТОМ У СТРАТИФІКОВАНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

О. В. ГОРОДЕЦЬКИЙ, В. І. НІКІШОВ, О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 16.09.2010

Розв'язана лінійна задача про збурення магнітного поля Землі, обумовлене полем швидкості морського середовища від поверхневих і внутрішніх хвиль, які утворюються при стаціонарному русі підводного об'єкта нижче тонкого термокліну глибокого моря. Розв'язок задачі одержано у вигляді квадратур. Виявлені особливості формування збуреного магнітного поля в залежності від характеру руху та характеристик об'єкту і стратифікованого середовища.

Решена линейная задача о возмущении магнитного поля Земли, обусловленного полем скорости морской среды от поверхностных и внутренних волн, образующихся при стационарном движении подводного объекта ниже тонкого термоклина глубокого моря. Решение задачи получено в виде квадратур. Выявлены особенности формирования возмущенного магнитного поля в зависимости от характера движения и характеристик объекта и стратификации.

A linear problem of perturbation of the magnetic field of the Earth, caused by the velocity field of the sea environment, produced by surface waves and internal waves resulting from the stationary movement of an undersea object under the thin thermal wedge of the deep sea is solved. The problem is solved in quadratures. Peculiarities of forming a disturbed magnetic field depending on the behavior of the movement and characteristics of an object and stratified medium are found.

ВСТУП

Збурення магнітного поля Землі спричиняються механізмами різної природи як космічного, так і, власне, земного походження. В ряду останніх значне місце займають механізми, які визначені процесами гідродинамічного характеру, що обумовлене високою електропровідністю водних мас морів і океанів. Природа та характер джерел збурення магнітного поля Землі цими процесами досліджувались у ряді робіт [1–4]. В океані мають місце рухи різних масштабів, від мікроструктурних до планетарних. Різномасштабними є, відповідно, і збурення магнітного поля Землі. Збільшення чутливості вимірювальної апаратури дозволяє виявляти збурення все менших масштабів та інтенсивності [1]. В цьому плані представляє інтерес дослідження наведеного магнітного поля, викликаного рухом підводного об'єкта, особливо зважаючи на детермінований характер генерованих ним гідродинамічних збурень морського середовища. Це важливий фактор при проведенні моніторингу в районі поверхні морів та океанів для ідентифікації природи вимірюваних збурень магнітного поля. В роботах [5, 6] виконано дослідження наведеного магнітного поля від підводного об'єкта, який стаціонарно рухається в однорідному (за густиною) середовищі. В роботі [6] в якості такого об'єкта розглянуто тіло-овід, яке рухається достатньо далеко від вільної поверхні моря, так що можна не враховувати по-

верхневі хвилі. В цих роботах показано, що інтенсивність наведеного магнітного поля від рухомих підводних тіл може бути зафіксована сучасною вимірювальною апаратурою.

Наявність стратифікації в реальних морях і океанах спричиняє утворення за рухомими підводними об'єктами, крім поверхневих хвиль, також поля внутрішніх хвиль. Це поле, яке утворюється в області термокліна, має тривалий період життя і займає достатньо значну площу, яка в рухомій системі координат, пов'язаній з об'єктом, знаходиться всередині клина з кутом розкриття 2α , де $\alpha = \arctg(c_{qm}/U)$, c_{qm} – швидкість поширення переднього фронту внутрішніх хвиль, U – швидкість руху об'єкта, а середня лінія кута співпадає з лінією його руху. Тому представляє інтерес визначення наведеного магнітного поля і від вказаного механізму, зважаючи, в тому числі, як вже відмічено, і на його детермінований характер.

Лінійні задачі як стаціонарні, так і нестаціонарні, по знаходженню полів внутрішніх хвиль за рухомим об'єктом були предметом дослідження значної кількості робіт у різних країнах світу, виконаних, головним чином, в 60–90-х роках минулого століття. Детальний аналіз робіт цього напрямку наведено в оглядовій роботі [7]. Спільним у підходах до розв'язання задач цього класу є заміна рухомого тіла системою джерел і стоків маси або силових джерел, обтікання яких еквівалентно обтіканню розглядуваного тіла.

В даній роботі в якості підводного об'єкта, як і у [6], розглядається осесиметричне тіло-овоїд. Відомо [8], що безвідривне обтікання такого тіла потоком однорідної рідини в напрямку його поздовжньої вісі симетрії ідентично обтіканню системи джерела і стоку маси однакової інтенсивності, розташованих на його поздовжній вісі симетрії на деякій віддалі одне від одного. При цьому потужність джерела маси Q при заданій швидкості руху U , радіусі поперечного міделевого перерізу R і віддалі між джерелами $2a$ визначається однозначно. Враховуючи, що характерний лінійний масштаб стратифікації значно більший від R , відповідні співвідношення з достатньою ступінню точності можуть бути використані і для випадку реальних стратифікованих морів і океанів.

Схема стратифікації середовища, розглянена в даній роботі, відповідає моделі глибокого океану з наявністю відносно тонкого термокліну, який імітується стрибком густини, що розділяє верхній шар товщиною L від нижнього напівнескінченного. В першій частині роботи розв'язується лінійна стаціонарна задача визначення збудованої швидкості середовища в полі поверхневих і внутрішніх хвиль, генерованих рухом овоїда нижче стрибка густини. В другій частині роботи визначається наведене магнітне поле Землі, обумовлене цими полями швидкості. При цьому використовується підхід, запропонований в роботах [5, 9]. На підставі виконаних чисельних експериментів проаналізовано особливості формування наведеного магнітного поля в залежності від параметрів задачі.

1. ПОВЕРХНЕВІ І ВНУТРІШНІ ХВИЛІ ЗА РУХОМИМ ОБ'ЄКТОМ

Розглядається рівномірний рух овоїда на глибині h зі швидкістю U в двохшаровій рідині з верхнім шаром товщиною $L < h$ і густиною ρ_1 та нижнім напівнескінченим шаром з густиною $\rho_2 > \rho_1$. Рідина вважається нев'язкою і нестисливою. Система координат пов'язана з рухомим об'єктом, її початок знаходиться на вільній поверхні, вісь Ox направлена в протилежному до вектора швидкості руху напрямку, а вісь Oz – вгору і проходить через поздовжню вісь симетрії тіла через середину відрізка між джерелом і стоком.

Задача, що розглядається задача стаціонарна, однак, з метою коректного виконання умов випромінювання, зручно використати нестационарну її постановку з наступним виходом на стаціонарний режим при великому часі $t \rightarrow \infty$ [10]. Характер нестационарності при цьому вибирається таким самим, як і у [10]. У початковий момент часу $t = 0$

миттєво включаються джерело і сток маси протужністю Q , які починають рухатися зі сталою швидкістю U в напрямку, протилежному напрямку вісі Ox . Початкові умови задачі приймаються нульовими.

1.1. Математичне формулювання задачі

В прийнятій моделі рідкого середовища вводиться потенціал течії ϕ такий, що

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Тоді аналогічно [10] лінеаризована система рівнянь руху з початковими і граничними умовами в безрозмірній формі, де в якості масштабу довжини взято L , масштабу для потенціалу – UL , масштабу потужності джерела – UL^2 і масштабу часу – L/U , набирає вигляду

$$\Delta \phi_n = Q \gamma_n H(t) [\delta(x+a) - \delta(x-a)] \delta(y) \times \delta(z+h), \quad (1)$$

$$D^2 \phi_1 + \lambda \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

при $z = -1$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad (3)$$

$$D^2 \phi_1 + \lambda \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \kappa \left(D^2 \phi_2 + \lambda \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x}, \frac{\partial \phi_n}{\partial y}, \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$\phi_n = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (6)$$

Тут $\kappa = \rho_2/\rho_1 > 1$; $\lambda = gl/U^2$ – динамічне число Фруда; $r^2 = x^2 + y^2 + (z+h)^2$; $H(t)$ – одинична функція Хевісайда; $n = 1$ відповідає області верхнього шару; $n = 2$ відповідає області нижнього шару; $\gamma_1 = 0$ і $\gamma_2 = 1$;

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x},$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

1.2. Метод інтегральних перетворень

Застосовуючи до потенціалів ϕ_n перетворення Фур'є по x і y і перетворення Лапласа по t , маємо

$$\phi_n = \frac{Q}{8\pi^3} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu_* x} d\mu_* \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu_* y} d\nu_* \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{st} \bar{\phi}_n ds, \quad (7)$$

де $\text{Re } \epsilon > 0$ – як заведено мала додатня величина, що зводить задачу знаходження функцій-образів $\bar{\phi}_n(\mu_*, \nu_*, s, t)$ до граничної задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\bar{\phi}_n'' - k^2 \bar{\phi}_n = -\frac{\gamma n}{s} (e^{i\mu_* a} - e^{-i\mu_* a}) \delta(z+h), \quad (8)$$

$$\lambda \bar{\phi}_1' + (s + i\mu_*^2) \bar{\phi}_1 = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (9)$$

при $z = -1$:

$$\bar{\phi}_1' = \bar{\phi}_2', \quad (10)$$

$$\lambda \bar{\phi}_1' + (s + i\mu_*)^2 \bar{\phi}_1 = \kappa [\lambda \bar{\phi}_2' + (s + i\mu_*)^2 \bar{\phi}_2], \quad (11)$$

$$i \bar{\phi}_2' \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (12)$$

Тут (') означає похідну по z .

Задача (8)–(12) має розв'язок

$$\bar{\phi}_1 = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz},$$

$$\bar{\phi}_2 = C_3 e^{kz} - \frac{(e^{i\mu_* a} - e^{-i\mu_* a})}{2ks} \times \\ \times H(z+h) [e^{k(z+h)} - e^{-k(z+h)}],$$

$$C_1 = -\frac{\kappa}{ksD_p} [e^{i\mu_* a} - e^{-i\mu_* a}] [\lambda k - (s + i\mu_*)^2] \times \\ \times e^{-k(h-1)} \frac{(s + i\mu_*)^2}{\lambda k + (s + i\mu_*)^2},$$

$$C_2 = -\frac{\kappa}{ksD_p} [e^{i\mu_* a} - e^{-i\mu_* a}] (s + i\mu_*)^2 e^{-k(h-1)},$$

$$C_3 = C_1 \left\{ 1 - \frac{e^{2k} [\lambda k + (s + i\mu_*)^2]}{\lambda k - (s + i\mu_*)^2} \right\} - \\ - \frac{1}{2ks} (e^{i\mu_* a} - e^{-i\mu_* a}) (e^{kh} + e^{-k(h-2)}),$$

де

$$k = \sqrt{\mu_*^2 + \nu_*^2},$$

$$D_p = (\kappa - 1) e^{-k} [\lambda k - (s + i\mu_*)^2] - \\ - e^k [(\kappa - 1) \lambda k + (\kappa + 1) (s + i\mu_*)^2].$$

З виразу k через μ_* і ν_* та розв'язків для $\bar{\phi}_n$ впливає їхня парність по ν_* і комплексно-спряженість по μ_* . На підставі цього та після заміни змінних інтегрування

$$\mu_* = k \sin \theta, \quad \nu_* = k \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

і введення в площині xOy полярної системи координат

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta, \quad -\pi \leq \beta \leq \pi,$$

представлення (7) набирає вигляду

$$\phi_n = \frac{Q}{4\pi^3} \text{Im} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} dk \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} ke^{st} \bar{\Phi}_n ds, \quad (13)$$

де

$$\bar{\Phi}_n = \bar{\phi}_n [e^{ikr \sin(\theta+\beta)} + e^{ikr \sin(\theta-\beta)}].$$

Стационарний розв'язок задачі можна одержати, використовуючи відому граничну теорему Тауберіана для перетворення Лапласа [11], на підставі якої

$$\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{st} \bar{\phi}(k, \theta, s, z) = 2\pi i \lim_{s \rightarrow 0} [s \bar{\phi}_n(k, \theta, s, z)].$$

Тоді з виразу (13) одержується відповідне представлення для $\phi_n(x, y, z)$:

$$\phi_n(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi^2} \text{Re} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_n dk, \quad (14)$$

де $\tilde{\Phi}_n(k, \theta, z) = \lim_{s \rightarrow 0} [ks \bar{\Phi}_n(k, \theta, s, z)]$.

Виконання у виразах для C_j ($j = 1, 2, 3$) граничного переходу $s \rightarrow 0$ дає для $\tilde{\phi}_n$ наступне представлення:

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{C}_1 e^{kz} + \tilde{C}_2 e^{-kz},$$

$$\tilde{\phi}_2 = \tilde{C}_3 e^{kz} - i \sin(ka \sin \theta) H(z+h) \times \\ \times [e^{k(z+h)} - e^{-k(z+h)}],$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{2i\kappa k \sin^2 \theta (\lambda + k \sin^2 \theta)}{\tilde{D}_p (\lambda - k \sin^2 \theta)} \sin(ka \sin \theta) e^{-k(h-1)},$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{2i\kappa k}{\tilde{D}_p} \sin^2 \theta \sin(ka \sin \theta) e^{-k(h-1)},$$

$$\tilde{C}_3 = \tilde{C}_1 \left[1 - \frac{\lambda - k \sin^2 \theta}{\lambda + k \sin^2 \theta} e^{2k} \right] + \\ + i \sin(ka \sin \theta) [e^{kh} + e^{-k(h-2)}],$$

$$\tilde{D}_p = (\kappa - 1) e^{-k} (\lambda + k \sin^2 \theta) - \\ - e^k [(\kappa - 1) \lambda - (\kappa + 1) k \sin^2 \theta].$$

В подальшому розглядаються лише хвильові складові розв'язку, оскільки лише вони мають тривалий час існування і можливість переносити енергію збуреного руху на значні відстані від вісі руху овоїда. Інші складові розв'язку з віддаленням від об'єкта швидко затухають [12, 13].

Поскільки $\tilde{\phi}_n(k, \theta, z)$ задовольняють умовам леми Жордана, для визначення хвильової складової використовується теорема про лишки. В комплексній k -площині $\tilde{\phi}_n$ має прості полюси в точках, де виконуються умови

$$\lambda = k \sin^2 \theta, \quad (15)$$

$$\tilde{D}_p = (\kappa - 1) e^{-k} (\lambda + k \sin^2 \theta) - \\ - e^k [(\kappa - 1) \lambda - (\kappa + 1) k \sin^2 \theta] = 0. \quad (16)$$

Рівняння (15) має простий розв'язок

$$\zeta_1 = \frac{\lambda}{\sin^2 \theta},$$

який визначає поверхневі хвилі. Розв'язок ζ_2 рівняння (16) знаходиться чисельно. Він визначає внутрішні хвилі, які утворюються за тілом на стрибку густини. Це рівняння може бути представлено у вигляді

$$k \sin^2 \theta (\kappa \operatorname{ch} k + \operatorname{sh} k) - \lambda (\kappa - 1) \operatorname{sh} k = 0.$$

При $\lambda = 1$ воно вперше було одержане в роботі [14].

Нестационарний аналог рівнянь (15), (16) відповідає полюсам функції $\tilde{\phi}_n$, які знаходяться з рівнянь

$$\lambda + (s - i\mu_*)^2 = 0, \\ D_p = 0.$$

Дослідження цих полюсів при $s \rightarrow 0$ показує, що всі вони при малих $s \neq 0$ зміщені з дійсної вісі k -площини догори на величину, пропорційну s , що відразу дозволяє коректно виконати умову випромінювання при $x \rightarrow -\infty$, а саме відсутність там хвильових рухів.

На підставі використання теореми про лишки хвильова складова розв'язку для ϕ_n має вигляд :

$$\phi_n(x, y, z) = \frac{Q}{\pi} [(\phi_{n1}(x, y, z) + \phi_{n2}(x, y, z))], \quad (17)$$

де а) в області $y > 0$

$$\phi_{n1} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Res} \tilde{\phi}_n(\zeta_m) e^{i\zeta_m r \sin(\theta+\beta)} d\theta, \\ \phi_{n2} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \int_{\arctan \frac{y}{x}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Res} \tilde{\phi}_n(\zeta_m) e^{i\zeta_m r \sin(\theta-\beta)} d\theta.$$

б) в області $y < 0$

$$\phi_{n1} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Res} \tilde{\phi}_n(\zeta_m) e^{i\zeta_m r \sin(\theta-\beta)} d\theta, \\ \phi_{n2} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \int_{\arctan \frac{y}{x}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Res} \tilde{\phi}_n(\zeta_m) e^{i\zeta_m r \sin(\theta+\beta)} d\theta.$$

Тут ζ_m – корені рівнянь (15), (16), причому $m = 1$ відповідає рівнянню (15), а $m = 2$ – рівнянню (16).

Лишки в одержаних розв'язках (17) представляються виразами:

$$\operatorname{Res} \phi_1(\zeta_1) = iA_1 e^{\zeta_1 z}, \\ \operatorname{Res} \phi_2(\zeta_1) = iA_2 e^{\zeta_1 z}, \\ \operatorname{Res} \phi_1(\zeta_2) = iB_1 e^{\zeta_2 z} + iC_1 e^{-\zeta_2 z}, \\ \operatorname{Res} \phi_2(\zeta_2) = iB_2 e^{\zeta_2 z},$$

де

$$A_1 = A_2 = -\frac{2\kappa\zeta_1 \sin(\zeta_1 a \sin \theta) e^{\zeta_1(1-h)}}{e^{\zeta_1} + (\kappa - 1)e^{-\zeta_1}}, \\ B_1 = \frac{2\kappa\zeta_2 \sin^2 \theta (\lambda + \zeta_2 \sin^2 \theta) e^{-\zeta_2(h-1)}}{D_{p*} (\lambda - \zeta_2 \sin^2 \theta)} \sin(\zeta_2 a \sin \theta), \\ C_1 = \frac{B_1 (\lambda - \zeta_2 \sin^2 \theta)}{\lambda + \zeta_2 \sin^2 \theta}, \\ B_2 = B_1 \left[1 - \frac{(\lambda - \zeta_2 \sin^2 \theta) e^{2\zeta_2}}{\lambda + \zeta_2 \sin^2 \theta} \right], \\ D_{p*} = \sin^2 \theta [(\kappa + \zeta_2) \operatorname{ch} \zeta_2 + (1 + \kappa\zeta_2) \operatorname{sh} \zeta_2] - \lambda(\kappa - 1) \operatorname{ch} \zeta_2.$$

1.3. Поле швидкості хвильового руху середовища

Згідно визначенню,

$$\vec{V}_n(x, y, z) = \nabla \phi_n(x, y, z).$$

Відповідні складові швидкості визначаються з (17) із застосуванням правила Лейбниція диференціювання інтегралів по параметру для випадку, коли границі інтегрування містять цей параметр [15]. Для даного розв'язку це приводить до появи додаткової складової поля швидкості, яка, однак, через те, що всі $\operatorname{Res} \tilde{\phi}_n(\zeta_m)$ є чисто уявними, також чисто уявна. Таким чином, компоненти швидкості хвильового руху визначаються з (17), (18) відповідним диференціюванням підінтегральних виразів.

Вигляд одержаного в такий спосіб розв'язку для швидкості дозволяє спростити його представлення, вводячи в площині xOy горизонтальні вектори $\vec{\tau}_1 = (\vec{i} \sin \theta, \vec{j} \cos \theta)$ і $\vec{\tau}_2 = (\vec{i} \sin \theta, -\vec{j} \cos \theta)$. В цьому випадку підінтегральні складові розв'язку представляються двохкомпонентними векторами

$$\vec{V}_n(\theta, z) = V_{nh}(\theta, z) \vec{\tau}_1 + V_{nz}(\theta, z) \vec{k}$$

для складової з $e^{i\zeta_m r \sin(\theta+\beta)}$ і

$$\vec{V}_n(\theta, z) = V_{nh}(\theta, z) \vec{\tau}_2 + V_{nz}(\theta, z) \vec{k}$$

для складової з $e^{i\zeta_m r \sin(\theta-\beta)}$.

Тут $V_{nh} = -\zeta_m \operatorname{Res} \tilde{\phi}_m(\zeta_m)$ – нова горизонтальна

компонента швидкості, а $V_{nz}^{(m)} = i \frac{d}{dz} [\text{Res} \tilde{\phi}_n(\zeta_m)]$ – її вертикальна компонента; а

$$\begin{aligned} V_{nh} \vec{\tau}_1 &= V_{nh} \sin \theta \vec{i} + V_{nh} \cos \theta \vec{j}, \\ V_{nh} \vec{\tau}_2 &= V_{nh}^m \sin \theta \vec{i} - V_{nh} \cos \theta \vec{j}. \end{aligned}$$

Рівняння нерозривності (умова бездивергентності) при такому представленні розв'язку набирає вигляду

$$\frac{dV_{nz}}{dz} = -i \vec{\tau}_j \vec{V}_n,$$

де $j = 1$ для складової з $e^{i\zeta_m r \sin(\theta+\beta)}$ і $j = 2$ для складової з $e^{i\zeta_m r \sin(\theta-\beta)}$ в області $y > 0$, і навпаки – $j = 2$ для складової з $e^{i\zeta_m r \sin(\theta+\beta)}$ і $j = 1$ для складової з $e^{i\zeta_m r \sin(\theta-\beta)}$ в області $y < 0$.

Таким чином, трьохкомпонентне представлення швидкості хвильового поля $\vec{V}_n = \vec{i}u_n + \vec{j}v_n + \vec{k}w_n$ можна замінити двокомпонентним $\vec{V}_n = \vec{\tau}_j V_{nh} + \vec{k}w_n$ у вигляді

$$\vec{V}_n(x, y, z) = \frac{Q}{\pi} \text{Re} \sum_{m=1}^2 (\vec{V}_{1n}^{(m)} + \vec{V}_{2n}^{(m)}), \quad (18)$$

де а) в області $y > 0$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1n}^{(m)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_1 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}] e^{i\zeta_m r \sin(\theta+\beta)} d\theta, \\ \vec{V}_{2n}^{(m)} &= \int_{|\beta|}^{\frac{\pi}{2}} [V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_2 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}] e^{i\zeta_m r \sin(\theta-\beta)} d\theta. \end{aligned}$$

б) в області $y < 0$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1n}^{(m)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_2 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}] e^{i\zeta_m r \sin(\theta-\beta)} d\theta, \\ \vec{V}_{2n}^{(m)} &= \int_{|\beta|}^{\frac{\pi}{2}} [V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_1 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}] e^{i\zeta_m r \sin(\theta+\beta)} d\theta. \end{aligned}$$

Тут індекс $m = 1$ відноситься до вкладу у розв'язок від поверхневих хвиль, а індекс $m = 2$ – відповідно від внутрішніх хвиль.

Для розв'язання задачі наведеного магнітного поля необхідно представити отриманий розв'язок у нерухомій системі координат (x_1, y, z) , яка співпадає з рухомою системою в момент $t = 0$, а в подальшому між їх позовжніми координатами має місце співвідношення (в безрозмірній формі) $x = x_1 + t$.

Якщо представити

$$\omega_m = \zeta_m \sin \theta, x_1 = r_1 \cos \beta_1, y = r_1 \sin \beta_1,$$

де β_1 відраховується від вісі x_1 в площині x_1oy , то розв'язок (18) набирає нестационарного вигляду а) в області $y > 0$

$$\vec{V}_n(x_1, y, z, t) = \frac{q}{\pi} \text{Re} \sum_{m=1}^2 (\vec{V}_{1n}^{(m)} + \vec{V}_{2n}^{(m)}), \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1n}^{(m)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_1 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}) e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta+\beta_1)]} d\theta, \\ \vec{V}_{2n}^{(m)} &= \int_{|\beta_1|}^{\frac{\pi}{2}} (V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_2 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}) e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta-\beta_1)]} d\theta; \end{aligned}$$

б) в області $y < 0$

$$\vec{V}_n(x_1, y, z, t) = \frac{q}{\pi} \text{Re} \sum_{m=1}^2 (\vec{V}_{3n}^{(m)} + \vec{V}_{4n}^{(m)}), \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{V}_{3n}^{(m)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_2 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}) e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta-\beta_1)]} d\theta, \\ \vec{V}_{4n}^{(m)} &= \int_{|\beta_1|}^{\frac{\pi}{2}} (V_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_1 + V_{nz}^{(m)} \vec{k}) e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta+\beta_1)]} d\theta. \end{aligned}$$

2. НАВЕДЕНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ, ОБУМОВЛЕНЕ ПОВЕРХНЕВИМИ І ВНУТРІШНІМИ ХВИЛЯМИ ЗА РУХОМИМ ОВОЇДОМ

У попередньому розділі у нерухомій системі координат визначено хвильове поле за тілом-овоїдом, що рухається на глибині h нижче стрибка густини двохшарового глибокого моря. В цій самій системі координат до такої ж схеми моря нижче розглядається лінійна задача знаходження наведеного магнітного поля, обумовленого рухом такого об'єкта.

2.1. Математичне формулювання задачі

Розв'язується лінійна задача знаходження генерованого поверхневими і внутрішніми хвилями

за стаціонарно рухомих овоїдом наведеного магнітного поля $\vec{B} = \mu \vec{H}$ відносно геомагнітної індукції Землі \vec{B}_E , яка приймається сталою величиною.

У вибраній в попередньому розділі нерухомій системі координат величина \vec{B}_E задається як

$$\vec{B}_E = F(\vec{i} \cos I \cos \alpha + \vec{j} \cos I \sin \alpha - \vec{k} \sin I).$$

Тут F – власна магнітуда \vec{B}_E ; α – кут між віссю руху овоїда і напрямком магнітної півночі; I – кут заглиблення.

Для знаходження $H(x, y, z, t)$ використовується рівняння, одержане в [5] за умови $\mu \vec{H} \ll \vec{B}_E$:

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma_0 \left[\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}_E) \right],$$

де σ_0 – електрична провідність води; μ – магнітна проникність води; $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$,

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, знак (\times) означає векторний добуток; \vec{V} – наведене поле швидкості.

В безрозмірній формі, де масштаби довжини, часу і швидкості такі, як у попередньому розділі, в якості масштабу \vec{H} береться $\mu^{-1} F$, а за масштаб $\vec{B}_E = F$, після введення нумерації шарів середовища $n = 0, 1, 2$, де крім вже заданих у розділі 1 номерів n додатково вводиться значення $n = 0$, відповідне області атмосфери над поверхнею моря, це рівняння набирає вигляду

$$\nabla^2 \vec{H}_n = \sigma_{\mu n} \left[\frac{\partial \vec{H}_n}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V}_n \times \vec{B}_E) \right], \quad (21)$$

де $\sigma_{\mu n} = LU \sigma_{0n} \mu$ – магнітне число Рейнольдса, яке має різні значення в різних шарах води, а в повітрі приймається $\sigma_{\mu 0} = 0$.

Функція $\vec{H}_n(x_1, y, z, t)$ задовольняє також умові бездивергентності

$$\nabla \vec{H}_n = 0. \quad (22)$$

Наведене поле швидкості середовища береться із розв'язку попередньої задачі у вигляді (19), (20).

Граничні умови для $\vec{H}(x_1, y, z, t)$ формулюються з умов неперервності на границях шарів та умови затухання на нескінченості:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(x_1, y + 0, t) &= \vec{H}_1(x_1, y - 0, t), \\ \vec{H}_1(x_1, y - 1 + 0, t) &= \vec{H}_2(x_1, y - 1 - 0, t), \\ \vec{H}_n &\rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Приймається також, що при $t \rightarrow \infty$ збурення магнітного поля затухають $\vec{H}_n \rightarrow 0$.

Виходячи з вигляду розв'язку для $\vec{V}_n(x_1, y, z, t)$, розв'язок для $\vec{H}_n(x_1, y, z, t)$ шукається у вигляді а) в області $y > 0$

$$\vec{H}_n = \frac{Q}{\pi} \text{Re} \sum_{m=1}^2 (\vec{H}_{1n}^{(m)} + \vec{H}_{2n}^{(m)} + \vec{H}_{+n}^{(m)}), \quad (24)$$

де

$$\vec{H}_{1n}^{(m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{h}_{1n}^{(m)} e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta + \beta_1)]} d\theta,$$

$$\vec{H}_{2n}^{(m)} = \int_{|\beta|}^{\frac{\pi}{2}} \vec{h}_{2n}^{(m)} e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta - \beta_1)]} d\theta,$$

$$\vec{H}_{+n}^{(m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{h}_{2n}^{(m)} e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta - \beta_1)]} d\theta,$$

тут $\vec{h}_{1n}^{(m)} = h_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_1 + h_{nz}^{(m)} \vec{k}$, $\vec{h}_{2n}^{(m)} = h_{nh}^{(m)} \vec{\tau}_2 + h_{nz}^{(m)} \vec{k}$;

б) в області $y < 0$

$$\vec{H}_n^{(m)} = \frac{q}{\pi} \text{Re} \sum_{m=1}^2 (\vec{H}_{3n}^{(m)} + \vec{H}_{4n}^{(m)} + \vec{H}_{-n}^{(m)}), \quad (25)$$

де

$$\vec{H}_{3n}^{(m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{h}_{2n}^{(m)} e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta - \beta_1)]} d\theta,$$

$$\vec{H}_{4n}^{(m)} = \int_{|\beta|}^{\frac{\pi}{2}} \vec{h}_{1n}^{(m)} e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta + \beta_1)]} d\theta,$$

$$\vec{H}_{-n}^{(m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{h}_{1n}^{(m)} e^{i[\omega_m t + \zeta_m r_1 \sin(\theta + \beta_1)]} d\theta.$$

Як і у випадку складових швидкості, $m = 1$ відповідає поверхневим хвилям, а $m = 2$ – внутрішнім хвилям.

Поява у розв'язку складових $\vec{H}_{+n}^{(m)}$ і $\vec{H}_{-n}^{(m)}$ обумовлена залежністю границь інтеграла $\pm \arctan \frac{y}{t + x_1}$ від координат і часу. Якщо представлення (24), (25) підставити у рівняння (21), то, наприклад, для складової $\vec{H}_{+n}^{(m)}$ має місце рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{Q} \left(\nabla^2 \vec{H}_{+n}^{(m)} - \sigma_{\mu n} \frac{\partial \vec{H}_{+n}^{(m)}}{\partial t} \right) &= \text{Re} \vec{h}_{2n}^{(m)} \times \\ &\times \left\{ \frac{i \zeta_m}{[(t + x_1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{4y(t + x_1)}{[(t + x_1)^2 + y^2]^2} \right\} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(t+x_1)^2+y^2} \mathbf{Re} \left[\frac{\partial \vec{h}_{2n}^{(m)}}{\partial \theta} \right] + \frac{4y(t+x_1)}{[(t+x_1)^2+y^2]^2}.$$

Аналіз цього рівняння показує, що при великих t складова $\vec{H}_{+n}^{(m)} \sim \ln t$. Справді, застосування для великих t методу стаціонарної фази для обчислення інтегралів у (24) дає розв'язок для $\vec{H}_n^{(m)}$ такий, що на шляхах $y/(x_1+t) = \text{const}$ функції $\vec{h}_{2n}^{(m)}$ визначаються через стаціонарні точки θ_s , тобто на цих шляхах $\vec{h}_{2n}^{(m)} = \text{const}$. Тоді з рівняння для $\vec{H}_{+n}^{(m)}$ при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \vec{H}_{+n}^{(m)}}{\partial t} \sim \frac{1}{t},$$

звідки і впливає наведена оцінка. Аналогічний результат має місце для складової $\vec{H}_{-n}^{(m)}$. Таким чином, ці складові розв'язку зростають у часі, що протирічить умові затухання при $t \rightarrow \infty$. Тому у розв'язках (24), (25) вони опускаються.

Отже, для знаходження розв'язку для $\vec{H}_n^{(m)}$ необхідно визначити дві невідомі функції – $\vec{h}_{1n}^{(m)}(x_1, y, z, t)$ і $\vec{h}_{2n}^{(m)}(x_1, y, z, t)$.

2.2. Розв'язок диференціального рівняння відносно $\vec{h}_{jn}^{(m)}$

Підстановка представлень (24), (25) у рівняння (21) та граничні умови (23) приводить до наступної граничної задачі для функцій $\vec{h}_{jn}^{(m)}(\theta, z)$:

$$\frac{d^2 \vec{h}_{jn}^{(m)}}{dz^2} - \delta_{nm}^2 \vec{h}_{nm}^{(m)} = \sigma_{\mu n} \vec{M}_{jn}^{(m)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_{j0}^{(m)} &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \\ \vec{h}_{j0}^{(m)}(+0) &= \vec{h}_{j1}^{(m)}(-0), \\ \vec{h}_{j1}^{(m)}(-1+0) &= \vec{h}_{j2}^{(m)}(-1-0), \\ \vec{h}_{j2}^{(m)} &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (27)$$

З умови бездивергентності (22) впливає також необхідність виконання співвідношень

$$\frac{d}{dz} \left(h_{jn}^{(m)} \vec{k} \right) = -i\zeta_m \vec{h}_{jn}^{(m)} \vec{\tau}_1 \quad \text{для } j = 1, 4, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dz} \left(h_{jn}^{(m)} \vec{k} \right) = i\zeta_m \vec{h}_{jn}^{(m)} \vec{\tau}_2 \quad \text{для } j = 2, 3.$$

Тут

$$\delta_{nm}^2 = \zeta_m^2 + i\sigma_{\mu n}\omega.$$

Враховуючи те, що має місце співвідношення [5]

$$\nabla \times \left(\vec{V}_n \times \vec{B}_E \right) = \left(\vec{B}_E \nabla \right) \vec{V}_n + \vec{B}_E \left(\nabla \vec{V}_n \right),$$

виконується умова нерозривності

$$\nabla \vec{V}_n = 0,$$

і прийнято, що $\sigma_{\mu 0} = 0$, величина $\vec{M}_{jn}^{(m)}$ визначається наступним чином: для всіх j при $n = 0$

$$\vec{M}_{j0}^{(m)} = 0.$$

Для $n = 1$ і $n = 2$ при $j = 1, 4$

$$\vec{M}_{jn}^{(m)} = -i\zeta_m \left(\vec{B}_E \vec{\tau}_1 \right) \vec{V}_{jn}^{(m)} - \left(\vec{B}_E \vec{k} \right) \frac{d\vec{V}_{jn}^{(m)}}{dz}$$

і при $j = 2, 3$

$$\vec{M}_{jn}^{(m)} = -i\zeta_m \left(\vec{B}_E \vec{\tau}_2 \right) \vec{V}_{jn}^{(m)} - \left(\vec{B}_E \vec{k} \right) \frac{d\vec{V}_{jn}^{(m)}}{dz}.$$

Тут $j = 1, 2, 3, 4$ – відповідають номерам шуканих функцій в (24), (25), а $n = 0, 1, 2$ – як і раніше, номери областей середовища: $n = 0$ відповідає атмосфері, $n = 1$ – шару води вище стрибка густини і $n = 2$ – шару води нижче стрибка густини.

Оскільки мають місце рівності

$$\vec{V}_{3n}^{(m)} = \vec{V}_{2n}^{(m)} \quad \vec{V}_{4n}^{(m)} = \vec{V}_{1n}^{(m)},$$

то виконуються також і рівності

$$\vec{M}_{3n}^{(m)} = \vec{M}_{2n}^{(m)}, \quad \vec{M}_{4n}^{(m)} = \vec{M}_{1n}^{(m)},$$

а також

$$\vec{h}_{3n}^{(m)} = \vec{h}_{2n}^{(m)}, \quad \vec{h}_{4n}^{(m)} = \vec{h}_{1n}^{(m)}.$$

Отже, для розв'язання задачі достатньо знайти функції $\vec{h}_{1n}^{(m)}$ і $\vec{h}_{2n}^{(m)}$.

Рівняння (26) має розв'язок, який задовольняє умовам затухання при $z \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \vec{h}_{j0}^{(m)} &= \vec{C}_{j1}^{(m)} e^{-\zeta_m z}, \\ \vec{h}_{j1}^{(m)} &= \sigma_{\mu 1} \left[\vec{C}_{j2}^{(m)} e^{\delta_{1m} z} + \vec{C}_{j3}^{(m)} e^{-\delta_{1m} z} + \vec{h}_{j1*}^{(m)} \right], \\ \vec{h}_{j2}^{(m)} &= \sigma_{\mu 2} \left[\vec{C}_{j4}^{(m)} e^{\delta_{1m} z} + \vec{h}_{j2*}^{(m)} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

де $\vec{h}_{jn*}^{(m)}$ – частинні розв'язки рівняння (26).

Невідомі векторні сталі $\vec{C}_{jl}^{(m)}$ ($l = 1, 2, 3, 4$) визначаються з граничних умов (27) та співвідношень (28). Для цього необхідно знайти частинні розв'язки задачі $h_{jn*}^{(m)}$, представлені у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{h}_{1n*}^{(m)} &= h_{1n*h}^{(m)} \vec{\tau}_1 + h_{1n**}^{(m)} \vec{k}, \\ \vec{h}_{2n*}^{(m)} &= h_{2n*h}^{(m)} \vec{\tau}_2 + h_{1n**}^{(m)} \vec{k}. \end{aligned}$$

З рівняння (26) для складових цього розв'язку, якщо позначити для зручності

$$\begin{aligned}\vec{B}_E \vec{\tau}_1 &= B_{Ex} \sin \theta + B_{Ey} \cos \theta = B_{E1}, \\ \vec{B}_E \vec{\tau}_2 &= B_{Ex} \sin \theta - B_{Ey} \cos \theta = B_{E1}, \\ B_{h11} &= iB_{Ez} - B_{E1}, \\ B_{z11} &= iB_{E1} + B_{Ez}, \\ B_{h12} &= iB_{Ez} + B_{E1}, \\ B_{z12} &= iB_{E1} - B_{Ez}, \\ B_{h21} &= iB_{Ez} - B_{E2}, \\ B_{z21} &= iB_{E2} + B_{Ez}, \\ B_{h22} &= iB_{Ez} + B_{E2}, \\ B_{z22} &= iB_{E2} - B_{Ez},\end{aligned}$$

одержуються такі вирази:

$$\begin{aligned}h_{11*h}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_1}{\zeta_1^2 - \delta_{11}^2} B_{h11} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{11*z}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_1}{\zeta_1^2 - \delta_{11}^2} B_{z11} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{11*h}^{(2)} &= \frac{\zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \delta_{12}^2} (B_1 e^{\zeta_2 z} B_{h11} - C_1 e^{-\zeta_2 z} B_{h12}), \\ h_{11*z}^{(2)} &= \frac{\zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \delta_{12}^2} (B_1 e^{\zeta_2 z} B_{z11} - C_1 e^{-\zeta_2 z} B_{z12}), \\ h_{21*h}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_1}{\zeta_1^2 - \delta_{11}^2} B_{h21} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{21*z}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_1}{\zeta_1^2 - \delta_{11}^2} B_{z21} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{21*h}^{(2)} &= \frac{\zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \delta_{12}^2} (B_1 B_{h21} e^{\zeta_2 z} - C_1 B_{h22} e^{-\zeta_2 z}), \\ h_{21*z}^{(2)} &= \frac{\zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \delta_{12}^2} (B_1 B_{z21} e^{\zeta_2 z} - C_1 B_{z22} e^{-\zeta_2 z}), \\ h_{12*h}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_2}{\zeta_1^2 - \delta_{21}^2} B_{h11} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{12*z}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_2}{\zeta_1^2 - \delta_{21}^2} B_{z11} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{12*h}^{(2)} &= \frac{\zeta_2^2 B_2}{\zeta_2^2 - \delta_{22}^2} B_{h11} e^{\zeta_2 z}, \\ h_{12*z}^{(2)} &= \frac{\zeta_2^2 B_2}{\zeta_2^2 - \delta_{22}^2} B_{z11} e^{\zeta_2 z}, \\ h_{22*h}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_2}{\zeta_1^2 - \delta_{21}^2} B_{h21} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{22*z}^{(1)} &= \frac{\zeta_1^2 A_2}{\zeta_1^2 - \delta_{21}^2} B_{z21} e^{\zeta_1 z}, \\ h_{22*h}^{(2)} &= \frac{\zeta_2^2 B_2}{\zeta_2^2 - \delta_{22}^2} B_{h21} e^{\zeta_2 z},\end{aligned}$$

$$h_{22*z}^{(2)} = \frac{\zeta_2^2 B_2}{\zeta_2^2 - \delta_{22}^2} B_{z21} e^{\zeta_2 z}.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що одержаний частинний розв'язок задовольняє умову бездивігентності (28).

Якщо сталі інтегрування $\vec{C}_{jl}^{(m)}$ представити у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{C}_{jl}^{(m)} &= \vec{C}_{jlh}^{(m)} \vec{\tau}_1 + \vec{C}_{jlz}^{(m)} \quad \text{для } j = 1, 4, \\ \vec{C}_{jl}^{(m)} &= \vec{C}_{jlh}^{(m)} \vec{\tau}_2 + \vec{C}_{jlz}^{(m)} \quad \text{для } j = 2, 3,\end{aligned}$$

то умови (27), (28) дають вісім співвідношень для визначення компонент $C_{j1h}^{(m)}$ і $C_{j1z}^{(m)}$. В результаті мають місце такі значення цих величин:

$$\begin{aligned}C_{j1h}^{(m)} &= \sigma_{\mu 1} (C_{j2h}^{(m)} + C_{j3h}^{(m)} + h_{j1*h}^{(m0)}), \\ C_{j1z}^{(m)} &= \sigma_{\mu 1} (C_{j2z}^{(m)} + C_{j3z}^{(m)} + h_{j1*z}^{(m0)}), \\ C_{j2h}^{(m)} &= \frac{i\delta_{1m} A_{j2}^{(m)}}{B_{j2}^{(m)}}, \\ C_{j2z}^{(m)} &= \frac{1}{\delta_{1m}} C_{j2h}^{(m)}, \\ C_{j3h}^{(m)} &= \frac{iA_{j2}^{(m)} (\zeta_m + \delta_{1m})}{B_{j2}^{(m)} (\zeta_m - \delta_{1m})} + \\ &+ \frac{\delta_{1m}}{\zeta_m - \delta_{1m}} (h_{j1*h}^{(m0)} + i\zeta_m h_{j1*z}^{(m0)}), \\ C_{j3z}^{(m)} &= \frac{i}{\delta_{1m}} C_{j3h}^{(m)}, \\ e^{-\delta_{2m}} C_{j4h}^{(m)} &= \frac{1}{\epsilon} (C_{j2h}^{(m)} e^{-\delta_{1m}} + C_{j3h}^{(m)} e^{\delta_{1m}} + h_{j1*h}^{(m1)}) - \\ &- h_{j2*h}^{(m1)}, \\ e^{-\delta_{2m}} C_{j4z}^{(m)} &= \frac{1}{\epsilon} (C_{j2z}^{(m)} e^{-\delta_{1m}} + C_{j3z}^{(m)} e^{\delta_{1m}} + h_{j1*z}^{(m1)}) - \\ &- h_{j2*z}^{(m1)},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}A_{j2}^{(m)} &= \delta_{1m} [e^{\delta_{1m}} A_{j2}^{(m0)} - (\delta_{1m} - \zeta_m) A_{j2}^{(m1)}], \\ B_{j2}^{(m)} &= e^{\delta_{1m}} (\delta_{1m} + \zeta_m) (\delta_{1m} + \delta_{2m}) - \\ &- e^{-\delta_{1m}} (\delta_{1m} - \zeta_m) (\delta_{1m} - \delta_{2m}), \\ A_{j2}^{(m0)} &= (\delta_{1m} + \delta_{2m}) (i h_{j1*h}^{(m0)} - \zeta_m h_{j1*z}^{(m0)}), \\ A_{j2}^{(m1)} &= i (h_{j2*h}^{(m1)} - \epsilon h_{j2*z}^{(m1)}) + \delta_{2m} (h_{j1*z}^{(m1)} - \epsilon h_{j2*z}^{(m1)}), \\ \epsilon &= \frac{\sigma_{\mu 2}}{\sigma_{\mu 1}}, \quad h_{jl*h}^{(m0)} = h_{jl*h}^{(m)}(\theta, 0), \quad h_{jl*z}^{(m0)} = h_{jl*z}^{(m)}(\theta, 0), \\ &h_{jl*h}^{(m1)} = h_{jl*h}^{(m)}(\theta, -1), \quad h_{jl*z}^{(m1)} = h_{jl*z}^{(m)}(\theta, -1).\end{aligned}$$

На підставі одержаних результатів розв'язок поставленої задачі з явним представленням трьох

компонент наведеного магнітного поля має вигляд:

а) в області $y > 0$

$$\vec{H}_n = \frac{Q}{\pi} \text{Re} \sum_{m=1}^2 (\vec{H}_{1n}^{(m)} + \vec{H}_{2n}^{(m)}), \quad (30)$$

де

$$\vec{H}_{1n}^{(m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(h_{1nh}^{(m)} \sin \theta \vec{i} + h_{1nh}^{(m)} \cos \theta \vec{j} + h_{1nz}^{(m)} \vec{k} \right) \times \\ \times e^{i(\omega_m t + \zeta_m x_1 \sin \theta + \zeta_m y \cos \theta)} d\theta,$$

$$\vec{H}_{2n}^{(m)} = \int_{|\beta_1|}^{\frac{\pi}{2}} \left(h_{2nh}^{(m)} \sin \theta \vec{i} - h_{2nh}^{(m)} \cos \theta \vec{j} + h_{1nz}^{(m)} \vec{k} \right) \times \\ \times e^{i(\omega_m t + \zeta_m x_1 \sin \theta - \zeta_m y \cos \theta)} d\theta,$$

б) в області $y < 0$

$$\vec{H}_n^{(m)} = \frac{q}{\pi} \text{Re} \sum_{m=1}^2 (\vec{H}_{3n}^{(m)} + \vec{H}_{4n}^{(m)}), \quad (31)$$

де

$$\vec{H}_{3n}^{(m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(h_{2nh}^{(m)} \sin \theta \vec{i} - h_{2nh}^{(m)} \cos \theta \vec{j} + h_{1nz}^{(m)} \vec{k} \right) \times \\ \times e^{i(\omega_m t + \zeta_m x_1 \sin \theta - \zeta_m y \cos \theta)} d\theta,$$

$$\vec{H}_{4n}^{(m)} = \int_{|\beta_1|}^{\frac{\pi}{2}} \left(h_{1nh}^{(m)} \sin \theta \vec{i} + h_{1nh}^{(m)} \cos \theta \vec{j} + h_{1nz}^{(m)} \vec{k} \right) \times \\ \times e^{i(\omega_m t + \zeta_m x_1 \sin \theta + \zeta_m y \cos \theta)} d\theta,$$

2.3. Наближений асимптотичний розв'язок для великих t

З точки зору моніторингу наведеного магнітного поля представляє інтерес дальнє поле цього збурення за підводним об'єктом. Картину збурень у цій області можна одержати, використовуючи метод стаціонарної фази для великих t при обчисленні інтегралів у розв'язку (30), (31). В результаті одержується наближений аналітичний розв'язок.

Представляючи в розв'язках (30), (31)

$$e^{i(\omega_m t + \zeta_m x_1 \sin \theta \pm \zeta_m y \cos \theta)} = e^{i(t+x_1)\zeta_m (\sin \theta \pm \xi \cos \theta)},$$

де $\xi = y/(t+x_1)$, видно, що для обчислення відповідних інтегралів управляючими функціями є

$$\psi_{1m} = \zeta_m (\sin \theta + \xi \cos \theta), \quad \psi_{2m} = \zeta_m (\sin \theta - \xi \cos \theta).$$

Відповідно стаціонарні точки є розв'язками рівняння

$$\frac{\partial \psi_{jm}}{\partial \theta} = 0 \quad j = 1, 2.$$

Для випадку поверхневих хвиль (для $m = 1$), де $\zeta_1 = \lambda/\sin^2 \theta$, рівняння стаціонарних точок можна представити у вигляді

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta - (-1)^j \xi (1 + \cos^2 \theta) = 0. \quad (32)$$

При $j = 1$ рівняння (15) має розв'язки лише для $\xi < 0$, а при $j = 2$ – лише для $\xi > 0$. Вони мають вигляд

$$\theta_{11} = \arccos \left\{ \left[\frac{1 - 2\xi^2}{2(1 + \xi^2)} + \Theta^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \\ \theta_{21} = \arccos \left\{ \left[\frac{1 - 2\xi^2}{2(1 + \xi^2)} - \Theta^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

де

$$\Theta = \frac{(1 - 2\xi^2)^2}{4(1 + \xi^2)^2} - \frac{\xi^2}{1 + \xi^2}.$$

Вони дійсні, якщо виконуються умови

$$1 - 2\xi^2 > 0, \quad \frac{(1 - 2\xi^2)^2}{4(1 + \xi^2)} - \xi^2 > 0.$$

Це можливе лише в області середовища, де

$$\frac{y}{x_1 + t} = \frac{y}{x} = \xi < \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (33)$$

Одержана умова (33) відповідає класичному результату для області поширення поверхневих корабельних хвиль, які в рухомій системі координат знаходяться всередині клина з напівкутом розкриття

$$\gamma = \arctan \frac{1}{2\sqrt{2}} = 19^\circ 28'.$$

Стаціонарна точка $\theta_{j1}^{(1)}$ відповідає поздовжнім поверхневим хвилям, а $\theta_{j2}^{(2)}$ – поперечним поверхневим хвилям.

Для $m = 2$, що відповідає внутрішнім хвилям, управляючими функціями є

$$\psi_{12} = \zeta_2 [\sin \theta + \xi \cos \theta], \quad \psi_{22} = \zeta_2 [\sin \theta - \xi \cos \theta],$$

де ζ_2 – розв'язок рівняння (16),

Рівняння стаціонарних точок у цьому випадку також можна представити в спільній формі

$$\psi'_{2j} = \frac{d\zeta_2}{d\theta} (\sin \theta - (-1)^j \xi \cos \theta) + \\ + \zeta_2 (\cos \theta + (-1)^j \xi \sin \theta) = 0. \quad (34)$$

Продиференціювавши рівняння (16) по θ , величину $d\zeta_2/d\theta$ можна виразити через ζ_2 :

$$\frac{d\zeta_2}{d\theta} = \frac{2\lambda(\kappa - 1)\text{ctg}\theta\text{th}\zeta_2}{\lambda(\kappa - 1) - \sin^2\theta[\kappa + \zeta_2 + (1 + \kappa\zeta_2)\text{th}\zeta_2]}.$$

Рівняння (34) розв'язується чисельно, в результаті чого знаходяться стаціонарні точки $\theta_i^{(2)}$. Як і для поверхневих хвиль, у даному випадку при $j = 1$ стаціонарна точка існує лише в області $\xi < 0$, а при $j = 2$ – навпаки, лише в області $\xi > 0$. Тому в асимптотичному розв'язку задачі вклад від внутрішніх хвиль дають лише складові \vec{h}_{2n}^2 для $y > 0$ і \vec{h}_{1n}^2 для $y < 0$, що також аналогічно випадку поверхневих хвиль.

Використання формули методу стаціонарної фази [17] приводить до наступного асимптотичного розв'язку для $\vec{H}_n(x_1, y, z, t)$:

а) в області $y > 0$

$$\begin{aligned} \vec{H}_n = & \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \text{Re} \sum_s \left[\frac{2}{(t+x_1)|\psi''_{21}(\theta_{s2})|} \right]^{\frac{1}{2}} \vec{h}_{2ns}^{(1)} \times \\ & \times e^{i[(t+x_1)\psi_{21}(\theta_{s2}, \xi) + \frac{1}{4}\pi \text{Sign}\psi''_{21}(\theta_{s2}, \xi)]} + \\ & + \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \text{Re} \sum_l \left[\frac{2}{(t+x_1)|\psi''_{22}(\theta_{l2})|} \right]^{\frac{1}{2}} \vec{h}_{2nl}^{(2)} \times \\ & \times e^{i[(t+x_1)\psi_{22}(\theta_{l2}, \xi) + \frac{1}{4}\pi \text{Sign}\psi''_{22}(\theta_{l2}, \xi)]}; \end{aligned} \quad (35)$$

б) в області $y < 0$

$$\begin{aligned} \vec{H}_n = & \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \text{Re} \sum_s \left[\frac{2}{(t+x_1)|\psi''_{11}(\theta_{s1})|} \right]^{\frac{1}{2}} \vec{h}_{1ns}^{(1)} \times \\ & \times e^{i[(t+x_1)\psi_{11}(\theta_{s1}, \xi) + \frac{1}{4}\pi \text{Sign}\psi''_{11}(\theta_{s1}, \xi)]} + \\ & + \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \text{Re} \sum_l \left[\frac{2}{(t+x_1)|\psi''_{12}(\theta_{l1})|} \right]^{\frac{1}{2}} \vec{h}_{1nl}^{(2)} \times \\ & \times e^{i[(t+x_1)\psi_{12}(\theta_{l1}, \xi) + \frac{1}{4}\pi \text{Sign}\psi''_{12}(\theta_{l1}, \xi)]}. \end{aligned} \quad (36)$$

Тут

$$\begin{aligned} \vec{h}_{2ns}^{(1)} = & h_{2nh}^{(1)}(\theta_{s2}, \xi, z) \sin\theta_{s2} \cdot \vec{i} - \\ & - h_{2nh}^{(1)}(\theta_{s2}, \xi, z) \cos\theta_{s2} \cdot \vec{j} + h_{2nz}^{(1)}(\theta_{s2}, \xi, z) \cdot \vec{k}, \\ \vec{h}_{2nl}^{(2)} = & h_{2nh}^{(2)}(\theta_{l2}, \xi, z) \sin\theta_{l2} \cdot \vec{i} - \\ & - h_{2nh}^{(2)}(\theta_{l2}, \xi, z) \cos\theta_{l2} \cdot \vec{j} + h_{2nz}^{(2)}(\theta_{l2}, \xi, z) \cdot \vec{k}, \\ \vec{h}_{1ns}^{(1)} = & h_{1nh}^{(1)}(\theta_{s1}, \xi, z) \sin\theta_{s1} \cdot \vec{i} + \\ & + h_{1nh}^{(1)}(\theta_{s1}, \xi, z) \cos\theta_{s1} \cdot \vec{j} + h_{1nz}^{(1)}(\theta_{s1}, \xi, z) \cdot \vec{k}, \\ \vec{h}_{1nl}^{(2)} = & h_{1nh}^{(2)}(\theta_{l1}, \xi, z) \sin\theta_{l1} \cdot \vec{i} + \\ & + h_{1nh}^{(2)}(\theta_{l1}, \xi, z) \cos\theta_{l1} \cdot \vec{j} + h_{1nz}^{(2)}(\theta_{l1}, \xi, z) \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Вирази для $|\psi''_{mj}|$ і знаки цих функцій визначаються безпосередньо із їхнього представлення в стаціонарних точках.

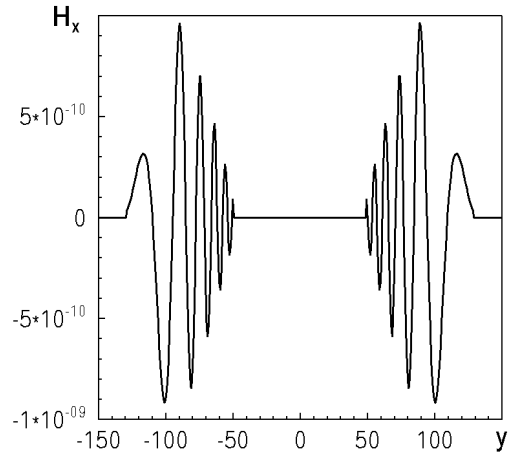


Рис. 1. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової H_y при $z = 2$, $h = 2$, $t = 300$ і $\alpha = 0$

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

На підставі одержаних теоретичних результатів були проведені чисельні розрахунки наведеного магнітного поля, обумовленого стаціонарним рухом овоїда в нижньому шарі під стрибком густини. Через важливість моніторингу приповерхневої області над морською поверхнею розрахунки виконані для області атмосфери $n = 0$. Задавалися наступні параметри задачі: довжина овоїда 100 м, діаметр його міделевого перерізу 10 м, швидкість руху $U = 5.47$ м/с, товщина верхнього шару $L = 50$ м, $\kappa = 1.01$, $h = 100$ м і $h = 250$ м., $I = 60^\circ$, $\alpha = 0$ і $\alpha = 90^\circ$. Розрахунки виконувались у нерухомій системі координат з $x_1 = 0$ для двох значень часу $t = 100$; $t = 300$, використовуючи розв'язки (35), (36), одержані методом стаціонарної фази. Величини магнітних чисел Рейнольдса задавалися для областей вище і нижче стрибка густини відповідно $\sigma_{mu1} = 5 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_{mu2} = 1 \cdot 10^{-3}$. Результати розрахунків представлені на рис. 1 – 9. На рис. 1 – 3 показані складові наведеного магнітного поля H_{0x} , H_{0y} , H_{0z} для вказаних параметрів у площині, перпендикулярній вісі руху тіла. Як видно, в цьому випадку для складової H_{0y} в розподілі амплітудної картини вздовж вісі y має місце антисиметрія відносно вісі z і, навпаки, симетрія у розподілі для складових H_{0x} і H_{0z} , що характерно для розподілу відповідних компонент швидкості збуреного середовища. Сама картина розподілу всіх компонент \vec{H}_0 має хвильовий характер, подібний полю збурених тілом–овоїдом внутрішніх хвиль на

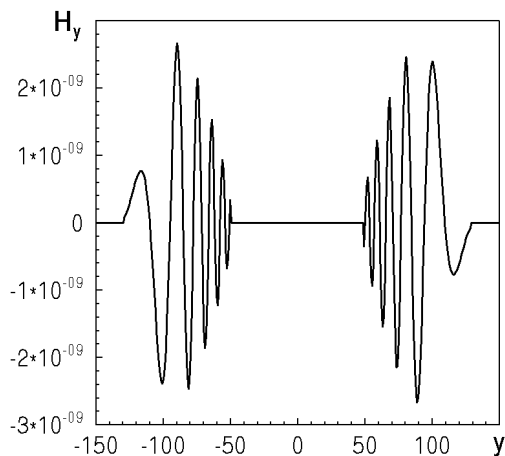


Рис. 2. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової H_y при $z = 2, h = 2, t = 300$ і $\alpha = 0$

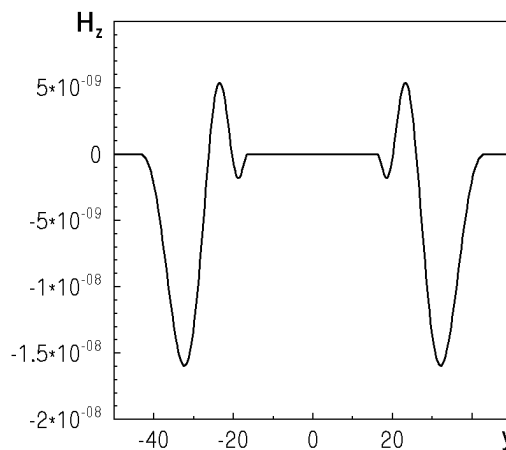


Рис. 4. Картина наведеного магнітного поля для вертикальної складової H_z при $z = 2, h = 5, t = 100$ і $\alpha = 0$

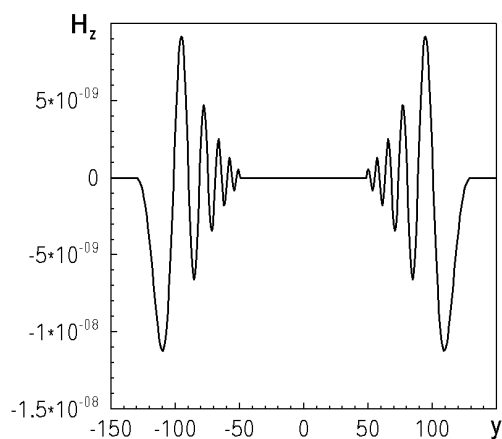


Рис. 3. Картина наведеного магнітного поля для вертикальної складової H_z при $z = 2, h = 2, t = 300$ і $\alpha = 0$

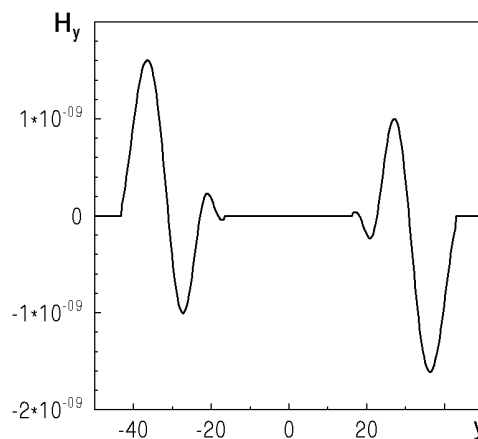


Рис. 5. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової H_y при $z = 2, h = 5, t = 100$ і $\alpha = 0$

стрижку густини. Область, зайнята збуреним магнітним полем, складається з двох зон скінченої ширини по обидві сторони від вісі руху овоїда, які мають чіткі передній і задній фронти. Між задніми фронтами цих зон знаходиться зона “спокійної води”, де збурення практично відсутні. Це також є характерною ознакою поля внутрішніх хвиль на стрибку густини. В нерухомій системі координат ці області рухаються убік від вісі руху, з одночасним збільшенням їхньої ширини, оскільки швидкість руху передніх фронтів більша від швидкості руху задніх фронтів. При цьому виконується співвідношення $H_z > H_y > H_x$. На рис. 4 наведена

картина розподілу H_z при $t = 100$. Порівняння її з відповідною картиною на рис. 3 показує, що амплітуди збурень зі збільшенням t зменшуються, а сама картина розподілу складових \vec{H}_0 стає більш пересічною, з більшою кількістю гармонік. У відповідності з розв’язком у наближенні стаціонарної фази закон затухання наведеного магнітного поля відповідає $t^{-\frac{1}{2}}$. Для більш віддалених від вільної поверхні рідини горизонтів z амплітуди наведеного поля H_0 швидко зменшуються зі збільшенням z по експоненційному закону згідно результату (29). При цьому більш короткохвильові гармоніки затухають швидше. Про це можна судити з порівняння

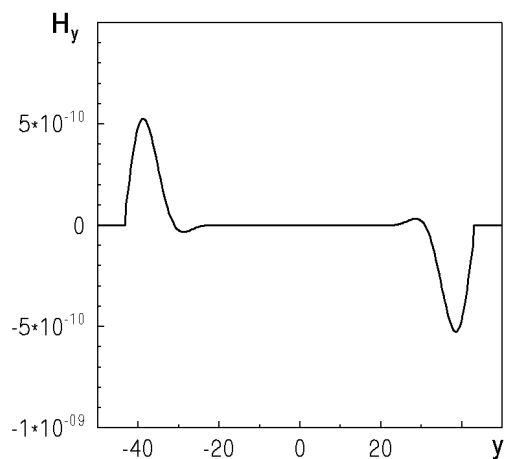


Рис. 6. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової H_y при $z = 10$, $h = 5$, $t = 100$ і $\alpha = 0$

хвильових картин для складової H_y на рис. 5 для $z = 2$ і на рис. 6 для $z = 10$ при інших рівнозначних параметрах.

Відомо [12], що інтенсивність внутрішніх хвиль зменшується при зростанні віддалі погруженого тіла від стрибка густини. В рамках даної задачі очевидним є аналогічний висновок відносно інтенсивності наведеного магнітного поля в області над вільною поверхнею.

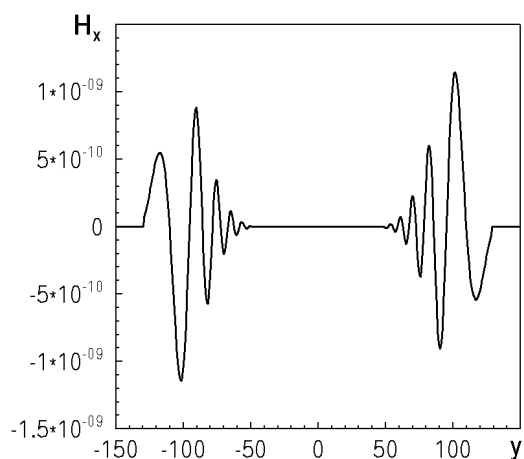


Рис. 7. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової H_x при $z = 2$, $h = 5$, $t = 300$ і $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Як структурний характер наведеного магнітного поля, так і відносні співвідношення між макси-

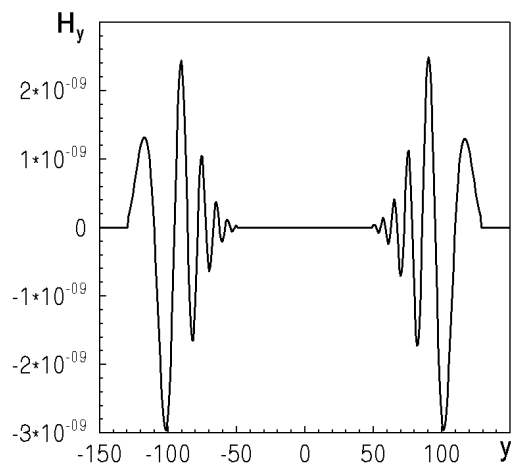


Рис. 8. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової H_y при $z = 2$, $h = 5$, $t = 300$ і $\alpha = \frac{\pi}{2}$

мальними амплітудами H_{0x} , H_{0y} , H_{0z} помітно змінюються при зростанні значення кута α . З рис. 7 – 9 видно, що при $\alpha = \pi/2$ для того ж горизонту z і часу, що і на рис. 1 – 3, амплітудні картини для \vec{H}_0 повністю міняють свою симетрію – картина H_y стає симетричною, а картини H_{0x} і H_z – антисиметричними. І навіть при тому, що об'єкт рухався на більшій глибині ($h = 5$), має місце зростання максимальних амплітуд для всіх складових \vec{H}_0 , причому відносно зростання складової

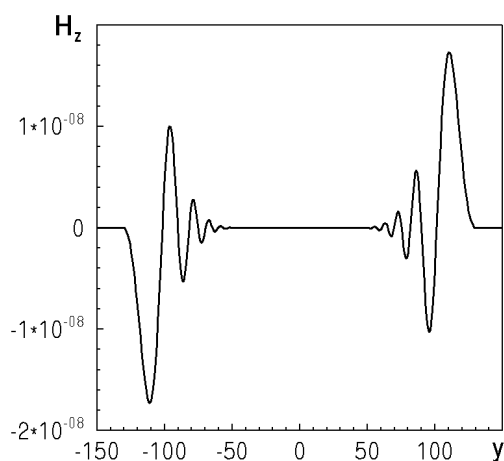


Рис. 9. Картина наведеного магнітного поля для вертикальної складової при $z = 2$, $h = 5$, $t = 300$ і $\alpha = \frac{\pi}{2}$

H_z більше порівняно з горизонтальними складовими. Це свідчить, що при зростанні кута α в діапазонах $0 < \alpha < \pi/2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$ інтенсивність наведеного магнітного поля зростає. Відповідно при зростанні α в діапазонах $\pi/2 < \alpha < \pi$ і $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ інтенсивність цього поля буде зменшуватись. Максимальну інтенсивність наведене магнітне поле має при $\alpha = \pi/2$ і $\alpha = 3\pi/2$, а мінімальну – при $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi$. В областях, де α не кратне значенню $\pi/2$, всі складові хвильового поля в площині, перпендикулярній до вісі руху тіла, мають несиметричний характер.

Порівняння вкладу у розв'язок для \vec{H}_0 складових, відповідних поверхневим хвилям, і складових, обумовлених внутрішніми хвилями, показує, що вклад від поверхневих хвиль в області атмосфери практично непомітний, оскільки він на порядки менший від вкладу від внутрішніх хвиль. У водній товщі це співвідношення, звичайно, може бути іншим.

Важливою характеристикою наведеного магнітного поля є його інтенсивність, оскільки це пов'язано з характеристиками чутливості вимірювальної апаратури. Сучасна вимірювальна апаратура має чутливість порядку 10^{-5} нанатесла (нТл) [16]. Якщо врахувати, що інтенсивність магнітного поля Землі складає величину $0,5 \cdot 10^4$ нТл, то в безрозмірних величинах інтенсивність збуреного магнітного поля, яка може бути зафіксована над морською поверхнею, складає величину порядку 10^{-9} . Як видно з картин наведеного магнітного поля при стаціонарному русі розглянутого тіла-овоїда на горизонті $z = 2$ всі компоненти \vec{H}_0 попадають в інтервал можливого вимірювання для обох розглянутих значень величини часу t . Такі і більші значення часу в нерухомій системі координат відповідають достатньо великій відстані від самого тіла в рухомій системі координат (в розрахунковому прикладі до 15 км).

ЗАКЛЮЧЕННЯ

В роботі розв'язана задача генерації наведеного магнітного поля Землі поверхневими та внутрішніми хвилями, що утворюються корпусом підводного тіла-овоїда при його стаціонарному русі нижче тонкого термокліну глибокого океану. Одержані результати дозволяють оцінити характер структури та енергетику такого роду збурень магнітного поля Землі. Головні особливості цього поля наступні.

1. Структура наведеного магнітного поля \vec{H} в атмосфері над стратифікованим морем має хвильовий характер і займає область, відповідну обла-

сті внутрішніх хвиль за даним тілом. Ця область складається з двох хвильових зон, які поширюються по обидва боки від вісі руху тіла і кожна має чіткі передній і задній фронти. Між ними в області, прилеглій до вісі руху тіла, має місце зона “спокійної води”, в якій збурення практично відсутні. З часом ширина всіх відмічених зон зростає (в дальній області за тілом у відповідності до лінійного закону), а амплітуди збурень зменшуються (в дальній області як $t^{-0.5}$). Зі збільшенням заглиблення рухомого тіла інтенсивність наведеного магнітного поля у повітрі зменшується.

2. Серед компонент наведеного магнітного поля \vec{H} в області атмосфери найбільш інтенсивною є її вертикальна складова \vec{H}_z , найменш – поздовжня складова \vec{H}_x .

3. Характер картини поля \vec{H} і його інтенсивності в атмосфері істотно залежить від кута α між вісю руху тіла і напрямком магнітної півночі. При $\alpha = 0; \pi$ картина збурень така, що в площині xOz , перпендикулярній вісі руху тіла, зміна складових H_x і H_z вздовж вісі Oy симетрична відносно вісі Oz , в той час як складова H_y змінюється тут антисиметрично. Цим значенням α відповідає мінімальна інтенсивність наведеного магнітного поля. Для $\alpha = \pi/2; 3\pi/2$ симетрія складових \vec{H} змінюється навпаки і вже \vec{H}_y стає симетричною, а H_x і H_z – антисиметричними, при цьому інтенсивність наведеного магнітного поля стає максимальною. Для інших значень α всі складові мають несиметричний характер. Такий самий характер \vec{H} слід чекати і у водній товщі.

4. Порівняння величин вкладу у розв'язок для \vec{H} від поверхневих і внутрішніх хвиль показує, що в області атмосфери над водною поверхнею вклад від поверхневих хвиль нехтовно малий порівняно з вкладом від внутрішніх хвиль.

5. Інтенсивність наведеного хвильовими полями за рухомим підводним об'єктом магнітного поля Землі така, що воно може бути зареєстроване сучасною вимірювальною апаратурою на достатньо далеких віддальх (ця величина може складати десятки кілометрів) за рухомим підводним об'єктом.

Виконані дослідження показують, що рухоме в морському середовищі підводне тіло може бути джерелом утворення наведеного магнітного поля Землі не лише від збурень у ближній області, обумовлених обтіканням власне корпуса тіла, але і від полів поверхневих та (що важливо) внутрішніх хвиль, які цим тілом породжені в умовах стратифікованого за густиною середовища. Така складова наведеного поля може існувати на далеких відстанях позаду тіла.

Отже, поля поверхневих і внутрішніх хвиль за підводним об'єктом, що рухається у стратифікованому середовищі, може бути одним із гідродинамічних механізмів утворення наведеного магнітного поля Землі, яке має детермінований характер і може бути використане при моніторингу збурень магнітного поля Землі над морською поверхнею.

1. Бондаренко Н.Ф. Электромагнитные явления в природных водах.– Л.: Гидрометеоздат, 1984.– 152 с.
2. Tyler R.H., Mysak L.A., Oberhuber J.M. Electromagnetic field generated by a three-dimensional global ocean circulation // J.Geophys. Res. – 1997.– 102.– P. 5531-5551.
3. Ладиков Ю.П. Стабилизация процессов в сплошных средах.– М.: Наука, 1978.– 170 с.
4. Горбань В.О., Горбань І.М., Ладиков-Роєв Ю.П. Генерація збурень магнітного поля рухом води в океані // Доповіді НАН України.– 2004.– №3.– С. 49-56.
5. Mandurasingh D., Tuck E.O. The induced Electromagnetic Field Associated with Submerged Moving Bodies in a Unstratified Conducting Fluid // Jour.of Ocea.Eng.– 1994.– 19, №2.– P. 193-199.
6. Горбань І.М. Аналіз збурень магнітного поля, викликаного рухом тіла в електропровідній рідині // ПГМ.– 2010.– 12(84),№2.– С. 21-39.
7. Степаняц Ю.В., Стурова І.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки техники. Серия “Механика жидкости и газа”.– М.– 1987.– т.21.– С. 93-179.
8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1.– М.: ГРФМЛ, 1963.– 534 с.
9. Стеценко О.Г. Наведене магнітне поле, обумовлене вертикальним рухом вихрової пари у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2010.– 12(84),№2.– С. 70-84.
10. Mei C.C., Wu T., Yao Tsu Two-dimensional gravity waves in a stratified ocean // Phys.Fluids.– 1967.– 10, №3.– P. 483-486.
11. Mei C.C. Surface Wave Pattern Due tu a Submerged Source Travelling in a Stratified Ocean // Rept. Hydrodynamics Lab. Mass. Inst. Technolog.– 1966.– №92.– P. 26.
12. Стурова И.В. Волновые движения, возникающие в жидкости со ступенчатой стратификацией при обтекании погруженного тела // В сб. “Численные методы механики сплошной среды”.– Новосибирск.– 1975.– 6, № 3.– С. 148-160.
13. Стурова И.В. Волновые движения, возникающие в стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела // ПМТФ.– 1974.– №6.– С. 80-91.
14. Crapper G.D. Ship waves in stratified ocean // J. Fl. Mech.– 1967.– 29, №4.– P. 667-672.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1973.– 331 с.
16. Cleim T.A. Advances in sensor development and demonstration of superconducting gradiometer for mobil operation// IEEE Trans.Appl.Superconduct.– 1997.– С. 3287-3293
17. Джефрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, вып. 3.– М.: Мир, 1970.– 343 с.