ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2013 – 2014. Том 16, N 2. С. 18 – 30

УДК 534.23, 519.6

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ АЭРОАКУСТИКИ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА. ЧАСТЬ I. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ, ВЫВОД РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

П. В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина
**E-mail: luk_ptr@yahoo.com*

Получено 25.04.2014

Представлен анализ существующих моделей, описывающих генерацию звука потоком с классификацией по двум направлениям: 1) акустическая аналогия Лайтхилла и ее развитие; 2) подход Блохинцева и его использование для моделирования звука аэродинамической природы. Охарактеризовано современное положение дел в этой области акустики, выделены нерешенные проблемы. В качестве одного из возможных примеров их решения предложена модель выделения звука аэродинамической природы, основанная на применении теоремы Коши – Гельмгольца. Ее использование позволило получить замкнутую систему из трех уравнений, описывающую генерацию звука вязким нестационарным теплопроводящим течением.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: генерация звука потоком, тонкое крыло, потенциальное приближение, численно-аналитические методы

Представлено аналіз існуючих моделей, які описують генерацію звуку потоком з класифікацією за двома напрямками: 1) акустична аналогія Лайтхілла та її розвиток; 2) підхід Блохінцева та його використання для моделювання звука аеродинамічної природи. Охарактеризовано сучасний стан справ у даній галузі акустики, виділені нерозв'язані проблеми. Як один з можливих прикладів їх розв'язання запропоновано модель виділення звуку аеродинамічної природи, яка грунтується на застосуванні теореми Коші – Гельмгольца. ЇЇ використання дозволило отримати замкнену систему з трьох рівнянь, яка описує генерацію звуку нестаціонарною теплопровідною течією.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: генерація звуку потоком, тонке крило, потенціальне наближення, чисельно-аналітичні методи

The paper deals with analyzing of existing models for sound generated by a flow classified within two directions: 1) Lighthill's acoustical analogy and its development; 2) Blokhintsev's approach and its use for aerodynamic sound simulation. The contemporary state of affairs in this branch of acoustics is characterized and unsolved problems are outlined. A model for separation of aerodynamically generated sound based on applying of the Cauchy],– Helmholtz theorem is offered as one of the possible ways to solve these problems. Its implementation allows the obtaining of closed system of three equations for sound generation by a viscous non-stationary heat-conducting flow.

KEY WORDS: sound generation by flow, thin wing, a potential approximation, the numerical-analytical methods

ВВЕДЕНИЕ

В современном авиастроении особое внимание уделяется вопросу изучения звука аэродинамического происхождения. Это обусловлено тем, что шум винтов, турбин, сопел реактивных и турбореактивных двигателей, наряду с выбросами продуктов сгорания, является одним из существенных негативных факторов воздействия на окружающую среду и человека. Уменьшение этого воздействия представляет серьезную проблему, поскольку далеко не всегда удается снизить уровень шума, не повлияв на аэродинамические свойства летательного аппарата в целом. Кроме того, по очевидным причинам в открытой печати практически отсутствуют публикации о результатах исследований для конкретных моделей современных летательных аппаратов. Заметим, что до начала 1990-ых гг. большинство научных исследований в области аэроакустики выполнялись на основе упрощенных моделей течений. Однако бурный рост возможностей вычислительной техники в течение последних 10 – 15 лет наряду с ужесточением требований ИКАО стимулировало переход к более сложным моделям аэродинамического звукообразования летательными аппаратами и вычислительным схемам, разработанным для них.

Полный анализ теоретических подходов, применяемых в аэроакустике, выходит за рамки данного исследования. Поэтому остановимся лишь непосредственно на моделях, описывающих генерацию и распространение звука во вязких теплопроводящих течениях. Их появление и развитие обусловлено созданием и совершенствованием реактивной и турбореактивной авиатехники. К числу теоретических исследований генерации звука вязкими течениями можно отнести работы, в которых развиваются идея акустической аналогии Лайтхилла [1] или общий подход Блохинцева для идеальной сжимаемой среды [2].

Ниже будет предложена альтернативная модель выделения звуковой составляющей, порождаемой общим нестационарным течением. На ее основе получена система из трех уравнений, описывающих генерацию и распространение звука во вязкой теплопроводящей среде, и рассмотрены случаи, в которых возможно упрощение модели.

1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ПОДХОДОВ

1.1. Акустическая аналогия Лайтхилла и ее развитие

После выхода в научный свет акустической аналогии Лайтхилла ряд исследований были направлены на проверку основных положений этой теории. Напомним основные идеи, положенные в основу акустической аналогии Лайтхилла:

- звук генерируется течением за счет флуктуации момента количества движения при взаимодействии течения и твердой границы, в чем и состоит принципиальное отличие его от активного излучения в классическом понимании;
- источник звука локализован в виде квадруполей;
- среда, в которой распространяется звук, считается однородной за исключением области локализации источника звука;
- обратное влияние звука на поток пренебрежимо мало.

Первое и четвертое положения данной теории и сегодня остаются в силе. Что же касается второго и третьего положений, то они далеко не всегда выполняются. Это и послужило поводом для дальнейших исследований, развития акустической аналогии.

Уравнение, описывающее генерацию звука при таких предположениях, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\,. \qquad (1)$$

Здесь через

$$\begin{gathered} T_{ij} = \rho v_i v_j + \\ +\delta_{ij}[(p - p_0 - c_0^2(\rho - \rho_0)] - e_{ij}, \\ e_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial y_k}\right) \end{gathered} \qquad (2)$$

обозначены тензоры турбулентных и вязких напряжений соответственно.

Заметим, что слагаемые в правой части уравнения (1) не только участвуют в генерации звука, но и способствуют переносу его течением (конвективные слагаемые) и частичному затуханию (вязкие члены) [3]. Кроме того, в ряде случаев длины порождаемых волн сопоставимы с размерами акустического источника [4]. Следовательно, после зарождения в нестационарном потоке звук в области ближнего поля подвержен влиянию неоднородностей течения, что не позволяет рассматривать соответствующий источник как точечный в невозмущенной среде. В дополнение к этому, при истечении струй из сопел реактивных двигателей наблюдается резкое изменение температуры перед выходом из сопла, что, в свою очередь, влечет изменение энтропии и других характеристик течения, могущих оказать влияние на генерацию звука.

Как уже было сказано, в рамках модели Лайтхилла звук считают распространяющимся в неподвижной среде, а появление направленности излучения объясняют конвективным усилением течения. Однако эти рассуждения справедливы лишь для дальнего поля. Очевидно, что на самом деле процесс излучения должен зависеть от влияния на источник звука неоднородного течения вблизи него. Если характерный масштаб неоднородности (например, диаметр струи) существенно больше длины звуковой волны, то последняя будет фактически неподвижной в рассматриваемой среде и ни о каком усилении звука за счет конвекции нет смысла говорить. Это один из вопросов, на которые невозможно ответить в рамках модели акустической аналогии Лайтхилла [1].

Среди позднейших теоретических работ, описывающих генерацию звука в течениях с учетом неоднородных свойств среды, следует указать публикации [3, 5, 6]. Филлипс и Лилли попробовали учесть неоднородность течения. Так, в [5] на основе уравнения неразрывности, уравнения движения и второго закона термодинамики получено единое уравнение:

$$\frac{D^2\Pi}{D\tau^2}-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(c^2\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}\right)=$$
$$=\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\frac{\partial v_i}{\partial y_j}-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial e_{ij}}{\partial y_j}\right)+\frac{D}{D\tau}\left(\frac{1}{c_p}\frac{DS}{D\tau}\right). \qquad (3)$$

Здесь

$$\Pi=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right), \qquad k=\frac{c_p}{c_v}.$$

В формуле (3) через S обозначена энтропия течения. Она отличается от известного основного уравнения аэроакустики тем, что здесь уже учтено взаимодействие звука со средним потоком. Заметим, однако, что это утверждение, приведенное в [7], вызывает обоснованные сомнения, поскольку нигде при выводе (3) не говорилось о выделении из общего течения звуковых возмущений. Лилли [6] также говорит о том, что уравнение Филлипса можно трактовать как неоднородное волновое уравнение с учетом подвижности среды не для всех ситуаций. Например, течение со средним сдвигом описывается не таким оператором. Чтобы решить данный вопрос, Лилли продифференцировал уравнение Филлипса (3) и несколько преобразовал полученное соотношение:

$$\frac{D}{D\tau}\left[\frac{D^2\Pi}{D\tau^2}-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(c^2\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}\right)\right]+$$
$$+2\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(c^2\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}\right)=$$
$$=-2\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial v_i}{\partial y_k}+\psi,$$
$$\psi=2\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial e_{ik}}{\partial y_k}\right)-$$
$$-\frac{D}{D\tau}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial e_{ij}}{\partial y_j}\right)+$$
$$+\frac{D^2}{D\tau^2}\left(\frac{1}{c_p}\frac{DS}{D\tau}\right). \qquad (4)$$

Величина ψ здесь описывает эффекты, обусловленные пульсациями энтропии и вязкостью жидкости.

Тенденцию к сведению системы в единое уравнение перенял и Хоу, который вывел уравнение в отсутствие вязкой диссипации для энтальпии торможения $B=w+v^2/2$ [3]:

$$\left\{\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{D}{Dt}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot\nabla-\nabla^2\right\}B=$$
$$=\mathrm{div}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}-T\nabla S)-$$
$$-\frac{1}{c^2}\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}-T\nabla S)+$$
$$+\frac{1}{c_p}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{DS}{Dt}+\frac{1}{\nu-1}\frac{D^2S}{Dt^2}\right). \qquad (5)$$

Здесь w – энтальпия; $\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ – завихренность. Полный анализ уравнения (5) представлен в работе [3] и выходит за рамки нашего исследования. Отметим толькп, что если среда однородна и баротропна, то соотношение (5) преобразуется в уравнение Блохинцева [2].

Позже Моринг [8] получил альтернативную форму записи уравнения Хоу (5):

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{DB}{Dt}\right)-\nabla\cdot(\rho\nabla B)=$$
$$=\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c_p}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{T}{c^2}\frac{DS}{DT}\right)-\nabla\rho(v\times w+T\nabla S). \qquad (6)$$

1.2. Модель Блохинцева и ее развитие

Отметим, что каждое из уравнений (1) – (6) выведено в терминах параметров полного гидродинамического течения, а генерируемый звук представляет собой малые флуктуации давления и скорости во времени. Правые части в этих соотношениях фактически декларируют возможность генерации звука за счет ряда факторов, не выделяя собственно акустическую составляющую. Поэтому результатом решения в данном случае будут значения "глобальных" параметров потока, но не звуковой волны. Так, в работах [10 – 15, 17] справедливо указывалось, что ошибочно было бы рассматривать уравнения Лайтхилла, Филлипса, Лилли, Хоу как звуковые.

По-видимому, первая попытка выделить звук из нестационарного завихренного потока была предпринята в модели Блохинцева [2]. В ней предполагалось, что среда находится в некотором спокойном состоянии ($\boldsymbol{v}$, p, ρ, S), а звук является его малым аддитивным возмущением: $\boldsymbol{v}'\ll\boldsymbol{v}$, $p'\ll p$, $\rho'\ll\rho$, $S'\ll S$. Тогда результирующая система для звуковых переменных будет

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}'+(\nabla\times\boldsymbol{v}')\times\boldsymbol{v}+ \\ +\nabla(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')=\frac{\nabla p}{\rho^2}\,\rho'-\frac{\nabla p'}{\rho}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+(\boldsymbol{v},\nabla\rho')+(\boldsymbol{v}',\nabla\rho)+\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}'+\rho'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t}+(\boldsymbol{v},\nabla S')+(\boldsymbol{v}',\nabla S)=0. \tag{9}$$

К ним следует добавить уравнения состояния:

$$h=\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho,\quad c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S,\quad p'=c^2\rho'+h\rho'. \tag{10}$$

Блохинцев назвал шесть уравнений (7) – (10) основными уравнениями для неоднородной движущейся среды. Однако полученная система незамкнута, поскольку количество переменных превышает количество связывающих их соотношений. Полученные соотношения можно считать точными для тех случаев, когда возможна декомпозиция течения на “основное” и “возмущенное”, например, в приближении аэроакустики. Так, для безвихревого изоэнтропического течения справедливо:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}=c^2\nabla^2\phi+(\nabla\Pi_0,\nabla\phi)+\frac{d\phi}{dt}(\boldsymbol{v},\nabla\ln c^2). \tag{11}$$

Здесь ϕ, Π_0 – акустический потенциал и потенциал давления соответственно.

Последующим развитием исследований в этом направлении стала модель Федорченко [10], разработанная на основании результатов ряда предварительных публикаций [11 – 13], в которых систематизирован подход к решению сложных задач генерации звука нестационарным течением.

В работах [11, 12] рассмотрен случай порождения звука вязким нестационарным течением с переменной энтропией и массовым источником. В них содержится вывод соответствующей системы уравнений при определенных ограничениях. Главным предположением, разумеется, была возможность разделения потока на “основное” течение и акустическую часть. Однако переменные “основного” течения полагались не зависящими от производных

$$\left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial p_\gamma}\right)_{S_\gamma},\qquad\left(\frac{\partial p_\gamma}{\partial t}\right)_{S_\gamma}$$

(индекс γ обозначает “основное” течение).

В терминах удельного импульса на единицу объема $\rho_\gamma u_\gamma$ это может означать, что скорость звука a постоянна, так как

$$\left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial p_\gamma}\right)_{S_\gamma}=\frac{1}{a^2}\,.$$

Отсутствие же зависимости от величины $\partial p_\gamma/\partial t$ говорит о постоянстве “основного” течения.

В обозначениях, принятых для этой модели, получаем следующее результирующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a_\nu^2}\frac{\partial w_\alpha^*}{\partial t}\right)-\nabla_2^2w_\alpha^*+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a_\nu^2}\nabla p_\alpha-\nabla\rho_\alpha+\frac{1}{a_\nu^2}\nabla\mathcal{M}_\alpha^*\right)=R, \tag{12}$$

$$R=-\nabla m=\left(\nabla\left(\frac{1}{a_\alpha^2}\frac{\partial p_\nu}{\partial t}\right),\nabla_2^2(w_\alpha^*)\right)\equiv \\ \equiv\nabla(\mathrm{div}(w_\alpha^*));$$

$$\mathcal{M}_\alpha^*=(w_\nu;u_\alpha)+(w_\alpha^*;u_\nu)+(w_\alpha^*;u_\alpha);$$

$$w_\nu=\rho_\nu u_\nu,\,w_\eta^*=\rho_\nu u_\alpha+\rho_\alpha u_\nu+\rho_\alpha u_\alpha.$$

Здесь R – источник звука; все параметры течения (компоненты скорости $\bar{u}$, давление p, плотность ρ, энтропия S) представлены в виде суммы компонент “основного” течения (с индексом γ) и акустической части (с индексом α). Смысл входящих сюда дифференциальных операторов см. в [10].

Следует также указать, что уравнение (12) получено несколько искусственно. При его выводе не было использовано уравнение состояния, учитывающее характер течения посредством указания связи между p и ρ, а правую и левую части в процессе вывода просто разделили на квадрат скорости звука a^2 [11]. Такое упрощение может быть чревато потерей существенных черт, отражающих физику явления. Поэтому, следуя [18, 19, 21], переменную скорость звука a необходимо включить в результирующее уравнение, выразив ее через основные гидродинамические переменные из уравнения состояния. Заметим, что автор [11] все-таки пытается учесть уравнение состояния $p_\alpha\approx a_\gamma^2\rho_\alpha$ при линеаризации переменных в конечном соотношении. Обращает на себя внимание то, что квадрат скорости звука присутствует сразу при двух слагаемых:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a_\nu^2}\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}\right)-\nabla_2^2w_\alpha+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a_\nu^2}\nabla\mathcal{M}_\alpha-\rho_\alpha\nabla\ln a_\nu^2\right)=R. \tag{13}$$

Здесь $\mathcal{M}_\alpha=(w_\nu;u_\alpha)+(w_\alpha;u_\nu)$, $w_\alpha=\rho_\nu u_\alpha+\rho_\alpha u_\nu$. Несмотря на высказанные замечания, полученный результат следует признать как еще один шаг в описании сложного процесса звукообразования в вязкой движущейся среде с переменной энтропией.

В более поздней работе [13] сказано об ограниченности обсуждаемой модели, основанной на предположении о выборе абсолютной инерциальной системы координат, в которой локальная зона интенсивного вихревого движения после процедуры осреднения по времени как бы покоится. Это еще раз подтверждает ограниченность введения понятия "фонового" течения. Все свои дальнейшие усилия автор [13] сосредоточил на поиске удобных систем отсчета, в которых было бы возможно разделить течение на такие компоненты, в которых бы отчетливо просматривалось влияние различных источников правой части уравнения (12) на звукообразование.

Еще одной попыткой смоделировать подобного рода процессы стало полученное на основе уравнения Хоу [3] уравнение Доэка [14], записанное в терминах флуктуирующей энтальпии стагнации H':

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial x_i^2}-\left[\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\right.\right.$$
$$+\left(2v_i\frac{\partial}{\partial t}-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})_i+V_i-2\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}+$$
$$\left.\left.+v_iv_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_J}\right\}H'\right]'=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_i}[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})_i'+V_i']-$$
$$-\left[\frac{1}{c^2}\left(-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})_i+V_i-2\frac{\partial h}{\partial x_i}+v_jv_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left([(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})_i'+V_i']+\overline{\left[\frac{\partial v_i'}{\partial t}\right]}\right)\right]'+ \tag{14}$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\right)'\frac{Dh}{Dt}\right]'-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{R}\frac{DS}{Dt}\right)'\right]'-$$
$$-\left[\frac{1}{c^2}v_i\frac{\partial}{\partial t}V_i'\right]'.$$

Здесь

$$V_i\equiv T\frac{\partial S}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_i j}{\partial x_j}+f_i;$$

σ_{ij} – компоненты вектора вязких напряжений; f_i – объемные плотности массовых сил. Заметим, однако, что это уравнение также незамкнуто.

Мусафир [9] из соотношений (5) и (14) вывел похожее уравнение для совершенного газа с постоянной удельной теплоемкостью и внешними источниками q, h:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{DB}{Dt}\right)-\frac{\nabla h\cdot\nabla B}{c^2}-\nabla^2 B=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(q+\frac{1}{R}\frac{DS}{Dt}\right)+\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c^2}\right)- \tag{15}$$
$$-\frac{\nabla h\cdot\boldsymbol{F}}{c^2}-\nabla\cdot\boldsymbol{F}.$$

Как и уравнение Доэка, оно справедливо для B и B'. Ограничение обоих подходов, как и для (6), – изоэнтропичность и отсутствие вихрей в течении.

Гольдштейн [15] воспользовался уравнением Лилли, чтобы выделить источники звука. Он предположил, что течение идеальное, эффекты вязкости и теплопроводности пренебрежимо малы –

$$u_i\equiv\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k}v_i',\qquad \pi\equiv\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k}-1.$$

В результате была получена следующая система уравнений:

$$\frac{D_0\pi}{Dt}+\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0, \tag{16}$$

$$\frac{D_0u_i}{Dt}+\delta_{1i}u\cdot\nabla U+\overline{c^2}\frac{\partial\pi}{\partial x_i}=f_i, \tag{17}$$

где f_i – внешняя силовая нагрузка:

$$f_i=-\frac{\partial}{\partial x_i}(1+\pi)v_i'v_j'-(c^2)'\frac{\partial\pi}{\partial x_i}. \tag{18}$$

По мнению Гольдштейна, f состоит из квадруполя скорости и температурного диполя. Этот вывод может быть оспорен, поскольку при выводе уравнений тепловыми эффектами пренебрегали [15]. В этом исследовании лишь отмечалось, что данная модель может быть скорректирована "...добавлением дополнительного слагаемого в функцию источника...". В любом случае, на использование данного подхода следовало бы наложить ограничение медленности температурных изменений по сравнению с процессами генерации и распространения звука в среде.

Позже Гольдштейн вывел следующую систему уравнений [16]:

$$\bar\rho\frac{\bar D}{Dt}\frac{\rho'}{\bar\rho}+\frac{\partial}{\partial x_j}\bar\rho u_j'=0, \tag{19}$$

$$\bar\rho\left(\frac{\bar D}{Dt}u_i'+u_j'\frac{\partial\tilde v_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}p_e'-$$
$$-\frac{\rho'}{\bar\rho}\frac{\partial\tilde\tau_{ij}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(e_{ij}'\tilde e_{ij}), \tag{20}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\bar{D}}{Dt}p'_e+\gamma p'_e\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial x_j}+\gamma\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{p}u'_j\right)-$$
$$-u'_i\frac{\partial\tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(\eta'_j-\eta'_j)+(e'_{ij}-\tilde{e}_{ij})\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial x_j}\,, \qquad (21)$$

где

$$\frac{\bar{D}}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\tilde{v}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,. \qquad (22)$$

Аналогично сказанному выше, переменные $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\bar{h}$, $\tilde{\nu}_i$, $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{q}_i$ – компоненты "основного" течения, а ρ', p', h', ν'_i, σ'_{ij}, q'_i – компоненты возмущений.

Эта формулировка также основана на идее декомпозиции "основного" течения и звуковых возмущений. Легко заметить, что она является развитием модели Блохинцева (7) – (10) для случая вязкой теплопроводящей среды. В качестве примеров "основного" течения Гольдштейн рассмотрел однородное течение, устойчивое непараллельное течение, нестационарное сжимаемое течение, неизлучающее нестационарное течение. Для этих случаев обсуждена трансформация системы уравнений (19) – (21).

Позже Гольдштейном была предложена процедура осреднения по времени для "идентификации истинных источников аэродинамического звука", что можно считать развитием идеи Федорченко [11].

Тем не менее, в рассмотренных моделях присутствует фундаментальный недостаток – в системе (19) – (21), как и у Блохинцева, не содержится неоднородное волновое уравнение, которым должен моделироваться процесс генерации звуковых волн.

Возникает вопрос: что же описывают "остаточные" компоненты ρ', p', h', ν'_i, σ'_{ij}, q'_i в этой модели – звуковую волну или псевдозвук, являющийся частью "основных" переменных в полной системе уравнений [2]? Уравнениеееволнового типа не позволяет выделить звук и псевдозвук из общего течения, поэтому Лайтхилл, Филлипс, Лилли и Хоу вывели неоднородные волновые уравнения, моделирующие распространение звука. Детальное разделение течения на составляющие – важнейшая проблема современной аэроакустики. Одно из возможных ее решений будет представлено в этой работе.

Еще одна трудность, возникающая на этом пути, состоит в том, что процедура осреднения по времени "впитывает" локальные неоднородности течения, если период осреднения по времени T не является пренебрежимо малым. Гольдштейн пишет по этому поводу: "Главным недостатком всех этих моделей течения является то, что нестационарные эффекты, которые на самом деле генерируют звук, должны быть включены как часть модели течения. . . " [7]. Здесь получается логическое противоречие, поскольку звук, генерируемый нестационарным "основным" течением, фактически оказывается включенным в него.

Если период осреднения значительно меньше, чем типичный временной масштаб процесса генерирования нестационарной волны, то процедура осреднения по времени бессмысленна – мы фактически имеем дело с непрерывными параметрами течения. Если же T не мал, то осреднение по времени в принципе способно разделить течение, являющееся источником звука, и акустическую составляющую. Однако течение после осреднения по времени уже не будет локально нестационарным и его изначальные черты, ответственные за генерацию звука, частично или полностью утрачиваются, что ставит под сомнение корректность проводимого разделения. Это – естественный результат любого процесса интегрирования, сглаживающего локально неоднородные свойства процесса и резкие изменения.

В работе [22] в течении выделяются основная (гидродинамическая) часть, первоначальное и вторичное звуковые поля:

$$q=q_o+q'_1+q'_2. \qquad (23)$$

Здесь q – скорость течения; а q'_1, q'_2 – первичное и вторичное звуковые поля; q_o – осредненное течение. Эта модель была предложена для невязкой сжимаемой среды и использовалась для расчета шума реактивного двигателя. Однако, как будет показано ниже, вторичное звуковое поле, как правило, пренебрежимо мало по сравнению с основным источником звука.

Обсуждаемая процедура разделения не всегда осуществима без потери информации о движущейся среде. Действительно, взаимодействие границы и потока может превращать изначально однородное и стационарное течение в существенно нестационарное, способное генерировать звук. После интегрирования же по времени мы фактически считаем, что звук распространяется в спокойной среде, что соответствует идее Лайтхилла о локализации источника. Таким образом, основная ошибка большинства существующих моделей состоит в подмене нестационарного течения успокоившимся (осредненным) течением.

Нечто похожее было предложено в исследовании Хардина [23] и видоизменено в работе Екатенарис [24]. Соответствующая процедура вычисления разбивалась на два этапа. Вначале решалась задача в рамках приближения вязкой несжимаемой среды, а затем – система уравнений Эйлера для идеальной сжимаемой среды. При этом полученные характеристики для модели несжимаемой среды считались источником звука при решении уравнений Эйлера. Следует, однако, отметить, что вязкость в среде не способствует образованию звука, а лишь вызывает его диссипацию. Это вызывает обоснованные сомнения в физической непротиворечивости описанного подхода в случае сильно вязких сред.

Еще одна интересная линейная модель Эверта и Шредера [25] подразумевает декомпозицию течения $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}^v+\boldsymbol{u}^a$, где $\bar{\boldsymbol{u}}$ означает осредненное по времени течение, $\boldsymbol{u}^v$ – соленоидальное возмущение, $\boldsymbol{u}^a$ – безвихревую акустическую компоненту. Такая модель используется для достаточно малых чисел Маха $M<0.1$. Результирующая система уравнений такова:

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\bar{c}^{\,2}\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\boldsymbol{u}^a+\bar{\boldsymbol{u}}\frac{p'}{\bar{c}^{\,2}}\right)=\bar{c}^2 q_c, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^a}{\partial t}+\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}^a)+\nabla\left(\frac{p'}{\bar{\rho}}\right)=q_m \qquad (25)$$

с источниками

$$q_c=-\nabla\rho\cdot\boldsymbol{u}^v+\frac{\bar{\rho}}{c_p}\frac{\bar{D}s'}{Dt}\,, \qquad (26)$$

$$q_m=\nabla\Phi_p+\nabla q_{\bar{\omega}}+T'\nabla s'-s'\nabla\bar{T}. \qquad (27)$$

Оператор $\bar{D}/Dt=\partial/\partial t+\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla$ обозначает субстанционную (полную) производную по времени. Запись выражений для источников q_c, q_m подразумевает особую роль для этой линейной аппроксимации. Однако линеаризация основной системы уравнений не годится для трансзвукового $(0.8<M<1.3)$ и сверхзвукового $(M>1.3)$ режимов и ее нельзя использовать для моделирования шума при больших скоростях течения.

Теоретический анализ акустического поля (см., например, [18]) показывает, что система уравнений для генерации звука нестационарным течением связывает компоненты полного (не "основного", а локально неоднородного) течения и генерируемых им же акустических возмущений. Однако, как уже отмечалось, нестационарное течение само становится источником генерируемого звука при взаимодействии с жесткой границей. В связи с этим термин "основное" (осредненное) течение бессмысленно использовать при решении такого рода задач. В то же время, в классических задачах излучения звуковые колебания порождаются колебаниями тела-излучателя, возмущающего среду, которая служит лишь для их распространения.

Нетрудно понять,что модели Лайтхилла и Блохинцева очень близки друг к другу физически – спокойное "основное" течение по Лайтхиллу родственно установившемуся течению по Блохинцеву. Федорченко пишет, что идея Лайтхилла о локализации источника и рапространении его в спокойной среде приводит в заблуждение молодых ученых, которые решают сложные задачи в неоднородной среде. Тем не менее, его попытка разделить различные источники, принимающие участие в процессе генерации звука, не бесспорна. Все компоненты сложного нестационарного течения взаимосвязаны между собой и выполнить декомпозицию (по Федорченко), по-сути, невозможно. Вместо этого можно выполнить оценку вклада каждой из компонент в генерацию звука [10].

В следующем разделе предлагается одна из возможных моделей процесса генерации звука вязким теплопроводящим нестационарным течением, являющаяся логическим следствием проанализированных выше подходов.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГЕНЕРАЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА ВО ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

В соплах реактивных двигателей поток газа перед выходом наружу претерпевает следующие изменения. Сначала струя охлаждается, а затем, непосредственно перед выходом в окружающую среду, происходит ее резкий нагрев. Из термодинамики известно, что в таком случае энтропия среды (а, следовательно, ее вязкость и скорость распространения звука) переменна.

Видимо, наиболее общий случай, учитывающей перечисленные особенности, соответствует вязкому газу Стокса [27]. Система уравнений, описывающая динамику вязкого газа, включает:

- уравнение Навье – Стокса

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla\left(p+\frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)+2\,\mathrm{Div}(\mu\dot{S}), \qquad (28)$$

  где $\dot{S}\equiv e_{ij}$ и $\boldsymbol{F}$ – тензор скоростей деформации и массовые силы соответственно;

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0, \qquad (29)$$

- уравнение баланса энергии

$$\rho\frac{d}{dt}\left(c_vT+\frac{v^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}+\mathrm{div}(\boldsymbol{v}P)+\rho q, \qquad (30)$$

где q и $P \equiv \sigma_{ij}$ – удельная тепловая энергия и тензор напряжений соответственно.

Уравнения (28) и (30) перепишем в более удобной форме:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\nabla v^2}{2}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right)= \\ =\rho\boldsymbol{F}-\nabla p-\frac{2}{3}\nabla(\mu\mathrm{div}\boldsymbol{v})+2\mathrm{Div}(\mu\dot{S}), \tag{31}$$

$$\rho\frac{d}{dt}(h+\frac{v^2}{2})=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{\partial p}{\partial t}+ \\ +\mathrm{div}\left[2\mu\,\nabla\left(\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right)- \\ -\frac{2}{3}\mu\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\frac{\mu}{\sigma}\nabla h\right], \tag{32}$$

Здесь σ – число Прандля [27]. Затем используем ту же процедуру, что и в работе [18] для случая невязкой среды. С этой целью уравнение (29) умножим на $\boldsymbol{v}$ и сложим с уравнением (31). В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\boldsymbol{v}+\rho\left(\nabla\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)+\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{v}= \\ =-a^2\nabla\rho+\rho\boldsymbol{F}-\frac{2}{3}\nabla(\mu\mathrm{div}\boldsymbol{v})+2\mathrm{Div}(\mu\dot{S}). \tag{33}$$

Далее, продифференцируем уравнение (29) по времени t и найдем дивергенцию от выражения (33):

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\mathrm{div}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{34}$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})\right)+ \\ +\mathrm{div}\left[\rho\left(\nabla\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)\right]+ \\ +\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v})=-\mathrm{div}(a^2\nabla\rho)+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{F})- \\ -\frac{2}{3}\nabla^2(\mu\mathrm{div}\boldsymbol{v})+2\,\mathrm{div}(\mathrm{Div}(\mu\dot{S})). \tag{35}$$

Вычтем уравнение (35) из (34) и проведем очевидные преобразования с учетом формул операторного анализа:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\rho= \\ =\mathrm{div}\left[\rho\left(\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)\right]+ \\ +\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v})+\nabla a^2\cdot\nabla\rho-\mathrm{div}(\rho\bar{F})+ \\ +\frac{2}{3}\nabla^2(\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{v})-2\mathrm{div}(\mathrm{Div}(\mu\dot{S})). \tag{36}$$

Это уравнение отличается от соотношений, полученных в [18], наличием вязких компонент и массовых сил. Если вязкость среды переменна, то вынести ее из под знака дифференциального оператора нельзя. Как уже упоминалось выше, этот эффект наблюдается в соплах реактивных двигателей, где велики локальные перепады температуры. Если же температурные градиенты не существенны, то вязкость можно приближенно считать постоянной и вместо уравнения (31) использовать упрощенную запись [19, 27]:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right)= \\ =\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{v}+\frac{\mu}{3}\nabla(\mathrm{div}\boldsymbol{v}). \tag{37}$$

Проделав с соотношением (37) те же выкладки, что и с (31), получим

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\rho= \\ =\mathrm{div}\left[\rho\left(\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)\right]- \\ -\frac{\mu}{3}\nabla^2\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v})+\nabla a^2\cdot\nabla\rho- \\ -\mathrm{div}\rho\boldsymbol{F}-\mu\mathrm{div}(\nabla^2\boldsymbol{v}). \tag{38}$$

Если рассматривается задача, в которой тепловые потери не существенны, то должна сохраняться полная энтропия:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S=0. \tag{39}$$

Таким образом, для вязкой сжимаемой среды имеются два случая описания:

1) система уравнений (29), (32), (36);

2) система уравнений (29), (38), (39).

Но указанные две системы уравнений пока еще не описывают генерацию звука непосредственно. В нестационарном потоке возмущенные переменные течения включают в себя не только звук, но и турбулентные пульсации, локальные неоднородности течения. В работе [18] подразумевалось, что в рассмотрение принимаются лишь те малые возмущения скорости и плотности, которые являются звуком. Поступим так же, как и в работе [18], полагая, что возмущенные переменные $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'$, $\rho+\rho'$ включают в себя все нестационарные эффекты поля скорости и плотности, но лишь добавки $\boldsymbol{v}'$, ρ' в них – чисто акустические. Именно в этом и заключается новизна предлагаемого подхода. Действительно, Лайтхилл считал среду невозмущенной вокруг локального источника, не выделив малые звуковые возмущения в полученном уравнении [1]. И лишь в работах [2, 10, 14, 17] проведено разделение на возмущенную и “фоновую” части потока.

Подставив возмущенные значения $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'$, $\rho+\rho'$, $h+h'$ в уравнения (29), (32), (36), получим

$$\frac{\partial(\rho+\rho')}{\partial t}+\mathrm{div}((\rho+\rho')(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'))=0, \qquad (40)$$

$$\begin{gathered}(\rho+\rho')\frac{d}{dt}\left(h+h'+\frac{(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')^2}{2}\right)=\\ =\boldsymbol{F}(\rho+\rho')(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')+\frac{\partial(p+p')}{\partial t}+\\ +\mathrm{div}\Bigg[2(\mu+\mu')\nabla\Bigg(\frac{(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')^2}{2}-\\ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\times(\nabla\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'))\Bigg)-\\ -\frac{2}{3}\mu(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\mathrm{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')+\frac{\mu}{\sigma}\nabla(h+h')\Bigg],\end{gathered} \qquad (41)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2(\rho+\rho')}{\partial t^2}-a^2\nabla^2(\rho+\rho')=\\ =\mathrm{div}\Bigg[(\rho+\rho')\Bigg(\nabla\frac{(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')^2}{2}+\\ +\nabla\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\Bigg)\Bigg]+\\ +\mathrm{div}\big[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\mathrm{div}((\rho+\rho')(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'))\big]+\\ +\nabla a^2\cdot\nabla(\rho+\rho')-\mathrm{div}((\rho+\rho')\boldsymbol{F})+\\ +\frac{2}{3}\nabla^2(\mu\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'))-2\mathrm{div}[\mathrm{Div}(\mu(\dot{S}+\dot{S}'))].\end{gathered} \qquad (42)$$

Расписав уравнения (29), (32), (36), вычтем их из соотношений (40) – (42) соответственно. Опустив величины второго порядка малости, имеем:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'\nabla\rho+\rho'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho'=0, \qquad (43)$$

$$\begin{gathered}\rho\frac{d}{dt}(h'+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}')+\rho'\frac{d}{dt}(h+v^2)=\\ =(\rho\boldsymbol{v}'+\rho'\boldsymbol{v})\boldsymbol{F}+\mathrm{div}\Bigg[2\mu\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}')-\\ -\frac{1}{2}\Bigg(\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}')+a^2\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\\ +(\nabla\times\boldsymbol{v}')\times\boldsymbol{v}\Bigg)-\\ -\frac{2}{3}\mu(\boldsymbol{v}\mathrm{div}\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'\mathrm{div}\boldsymbol{v})+\frac{\mu}{\sigma}\nabla h'\Bigg],\end{gathered} \qquad (44)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\rho'=\mathrm{div}\Bigg[\rho(\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}')+\\ +\rho'\left(\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)+\\ +\rho((\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}'+(\nabla\times\boldsymbol{v}')\times\boldsymbol{v})\Bigg]+\\ +\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}'+\rho'\boldsymbol{v}))+\mathrm{div}(\boldsymbol{v}'\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}))+\\ +\nabla a^2\cdot\nabla\rho'-\mathrm{div}(\rho'\boldsymbol{F})+\frac{2}{3}\nabla^2(\mu\mathrm{div}\boldsymbol{v}')-\\ -2\mathrm{div}(\mathrm{Div}\mu\dot{S}').\end{gathered} \qquad (45)$$

В уравнении (44) использовано соотношение

$$\frac{\partial p'}{\partial t}=a^2\frac{\partial\rho'}{\partial t},$$

которое может быть легко получено на основе свойства инвариантности первого дифференциала [19]. Действительно, ряды Тэйлора позволяют следующее разложение:

$$p-p_0=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S(\rho-\rho_0)+\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}\right)_S(\rho-\rho_0)^2+\ldots$$

Линейное приближение обычно используется для представления скорости звука

$$\begin{gathered}a^2=\frac{dp}{d\rho}\approx\frac{p-p_0}{\rho-\rho_0}\approx\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S=\frac{\partial p}{\partial\rho}\frac{\Delta t}{\Delta t}=\\ =\lim_{\Delta p,\Delta\rho,\Delta t\to0}\frac{\Delta p}{\Delta\rho}\frac{\Delta t}{\Delta t}=\frac{\partial p}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^{-1}.\end{gathered} \qquad (46)$$

Здесь a – местная скорость звука, которая приближенно равна адиабатической скорости звука $(\partial p/\partial\rho)_S = c^2$. Это соотношение хорошо известно в аэроакустике [7, формула (1.5)] и нелинейной волновой теории [20, формула (6.48)]. Отметим, что во многих приложениях аэроакустики величина c^2 используется вместо a^2.

Заметим, что при выводе соотношения (45) вязкость μ не варьировалась, в отличие от параметров ρ, $\boldsymbol{v}$, h. Причина этого в том, что вязкость среды зависит лишь от температуры, но не от давления и плотности. Поскольку звук представляет собой локальное изменение давления в виде чередующихся разрежений – сжатий, то малые изменения акустических переменных практически не изменяют величину μ, которая соответствует невозмущенному состоянию ρ, $\boldsymbol{v}$, h, рассчитываемому в каждый конкретный момент времени для нестационарного потока. Изменение вязкости будет проявляться лишь при достаточно существенных изменениях термодинамических свойств системы, что выходит за рамки выделенных малых звуковых возмущений. Вязкость определяется в каждой точке пространства как функция температуры [27]:

$$\mu = \text{const}\cdot\frac{T^{3/2}}{T+C}, \qquad C\approx 122. \tag{47}$$

Кроме того, нужно помнить, что слагаемые с вязкостью μ лишь способствуют затуханию звуковых волн, а ни в коей мере не генерации или усилению звука. В то же время, не учитывать их нельзя по той причине, что вязкость с увеличением температуры возрастает как $T^{3/2}$.

Однако следует заметить, что при взаимодействии потока с жесткой стенкой участие в генерации звука принимают все компоненты совокупного течения. В ходе этого сложного процесса потенциальная, кинетическая и тепловая составляющие полной энергии системы находится во взаимном динамическом преобразовании. По этой причине Лайтхилл оставил слагаемое с вязкостью в правой части полученного им неоднородного уравнения (1). Мы будем поступать аналогичным образом.

Более того, основное течение, которое в большинстве из существующих моделей пытаются отделить, принимает непосредственное участие в процессе генерации звука. Очевидно, что говорить об отделении звука от потока можно лишь после того, как генерация звука произошла. Поэтому и предлагается непосредственно выделять звук из нестационарного течения, ничего не осредняя.

Таким образом, получаем систему из трех уравнений (43), (44), (45), в которых присутствуют пять неизвестных – ρ', $\boldsymbol{v}'$ (три компоненты) и h'. Поскольку количество неизвестных превышает количество уравнений, данная система незамкнута.

Для того, чтобы сделать следующий шаг, согласно теореме Коши – Гельмгольца, представим поле скорости в виде [28]:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p + \nabla\left(\frac{1}{2}D\right) + \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{r}, \tag{48}$$

где D – тензор скоростей деформации; $\boldsymbol{\omega}_p = \nabla\times\boldsymbol{v}$ – вектор завихренности. Здесь учтено, что любое мгновенное состояние движения сплошной среды является в каждой точке суперпозицией поступательного движения, растяжения по трем взаимно ортогональным осям и вращения этих осей как твердого тела [29, глава 2].

Еще одна форма представления течения, описана в монографии [30, с. 82], согласно которой поле скорости в этой области состоит, на самом деле, из суперпозиции

a) однородного переноса со скоростью $u(x)$;

b) простой деформации движения, характеризуемой тензором скоростей деформации e_{ij}, который сам может быть разложен на изотропное растяжение (сжатие) и напряженное движение без изменения объема;

c) твердотельного вращения с угловой скоростью $\omega/2$.

Аналитически это выражается так, что скорость в положении $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}$ можно приближенно выразить как

$$u_i(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{2}r_j r_k e_{jk}\right) + \epsilon_{ijk}\omega_j r_k, \tag{49}$$

где e_{ij} и ω_j представлены в точке $\boldsymbol{x}$.

Вязкие члены, входящие в правую (источниковую) часть основного уравнения движения, также неявно влияют на процесс генерации звука. Поэтому "основное" течение не может быть осредненным по времени – оно играет активную роль во всех трех типах элементарных перемещений, отделение любого из которых может быть чревато потерей какой-то части возможных источников звука. Модели Лайтхилла и Блохинцева становятся неприемлемыми для сложного нестационарного неоднородного течения.

Поясним, что же представляет собой предлагаемая альтернативная физическая модель выделения генерируемого звука.

Следуя описанной выше идеологии, в качестве $\boldsymbol{v}'$ возьмем лишь ту часть малых приращений, которая представляет собой сжатие – разрежение, приписав все остальное к слагаемому $\boldsymbol{v}$. Действительно, каким бы сложным ни было течение, в каждый конкретный момент времени звук определяют лишь компоненты тензора e_{ij}, отвечающие за объемную деформацию. Все остальное – не звук, а лишь факторы, влияющие на его распространение, затухание или конвективное усиление.

На основании теоремы Коши – Гельмгольца представим возмущение скорости как $\boldsymbol{v}'=\nabla\varphi$, поскольку в уравнениях (48), (49) слагаемое, описывающее растяжение – сжатие, также представлено в градиентной форме. Таким образом, скорость нестационарного возмущенного движения примет вид $\boldsymbol{v}+\nabla\varphi$.

Тогда систему уравнений (43), (44), (45) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho\nabla^2\varphi+\nabla\varphi\cdot\nabla\rho+\rho'\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho'=0, \quad (50)$$

$$\begin{gathered}\rho\frac{d}{dt}(h'+\boldsymbol{v}\nabla\varphi)+\rho'\frac{d}{dt}(h+v^2)=\\ =(\rho\nabla\varphi+\rho'\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{F}+a^2\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\\ +\mathrm{div}\left[2\mu\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)-\frac{1}{2}\nabla\varphi\times(\nabla\times\boldsymbol{v})-\right.\\ \left.-\frac{2}{3}\mu(\boldsymbol{v}\cdot\nabla^2\varphi+\nabla\varphi\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v})+\frac{\mu}{\sigma}\nabla h'\right],\end{gathered} \quad (51)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\rho'=\mathrm{div}\left[\rho(\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi+\right.\\ +(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\nabla\varphi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)+\\ \left.+\rho'\left(\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\times\boldsymbol{v})\right]-\\ -\mathrm{div}(\rho'\boldsymbol{F})+\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}(\rho\nabla\varphi+\rho'\boldsymbol{v}))+\\ +\mathrm{div}(\nabla\varphi\cdot\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v})+\nabla a^2\cdot\nabla\rho'+\\ +\frac{2}{3}\nabla^2(\mu\nabla^2\varphi)-2\mathrm{div}(\mathrm{Div}(\mu\dot{S}')).\end{gathered} \quad (52)$$

Система (50) – (52) замкнута относительно неизвестных φ, ρ', h'. Для решения задачи акустики необходимо сначала решить задачу гидродинамики, а затем, зная все необходимые гидродинамические переменные, разрешить систему (50) – (52) относительно φ, ρ', h'.

Есть еще два важных вопроса, представляющие определенный научный интерес. Один из них состоит в том, насколько точным будет расчет звукового поля на основании системы (50) – (52). Действительно, здесь используются переменные, полученные из предварительного решения задачи аэродинамики. На самом же деле, в уравнениях (50) – (52) они представлены без малых возмущений φ, ρ', h', описывающих звук. Заметим, однако, что подстановка полных полевых величин $\boldsymbol{v}+\nabla\varphi$, $\rho+\rho'$, $h+h'$ приводит к тому, что при их перемножении с малыми φ, ρ', h' возникают добавки второго порядка малости. Однако это – точность, с которой и была выведена система уравнений (50) – (52). Следовательно, подстановка полных переменных вместо их "неакустических" частей вполне оправдана.

Проведенный анализ позволил в строгой математической форме ответить и на вопрос о том, почему обратным влиянием звука на поток фактически можно пренебречь. Лайтхилл писал, что генерируемый звук не оказывает на поток такого влияния, которое повлекло бы за собой изменение акустического поля. Вопросу изучения обратного влияния звукового поля на течение были посвящены исследования Рэлея, а несколько позже – Чу и Коважного [31]. В их этих работ установлено, что звуковое поле может генерировать завихренность через эффекты взаимодействия второго порядка. Таким образом, обратное влияние звука на течение есть, но оно относится к величинам высших порядков малости. Полученная система уравнений (50) – (52) как раз соответствует этой точности – до второго порядка.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

3.1. Вязкое квазиизоэнтропическое течение

Считаем, что газ вязкий, но теплообменом можно пренебречь. В этом случае соотношение (50) сохраняется, в отличие от уравнений (51), (52). Кроме того, поскольку энтропия – это функция, характеризующая степень взаимодействия молекул, выраженную в изменении теплового баланса, то в данном случае $dS/dt\approx 0$ с точностью до малых величин высших порядков. Если в потоке нет зон с резким изменением термодинамических параметров и при достаточно больших скоростях течения теплообмен происходит "медленне", чем генерация звука, то все процессы можно считать изотермическими.

Проведя с уравнениями (37), (38) те же преобразования, что и с (31),(35), получим:

$$\frac{\partial S'}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S')+(\boldsymbol{v}'\cdot\nabla S)=0, \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\rho'=\mathrm{div}\Big[\rho(\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi+ \\ +(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\nabla\varphi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)+ \\ +\rho'\left(\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)\Big]+ \\ +\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}(\rho\nabla\varphi+\rho'\boldsymbol{v}))-\mathrm{div}(\rho'\boldsymbol{F})+ \\ +\mathrm{div}(\nabla\varphi\cdot\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v})+\nabla a^2\cdot\nabla\rho'- \\ -\mu\mathrm{div}(\nabla^2(\nabla\varphi))-\frac{\mu}{3}\nabla^2(\nabla^2\varphi). \tag{54}$$

Для замыкания системы необходимо добавить уравнение (50).

3.2. Невязкое изоэнтропическое течение

Если течение невязкое (идеальное) и в нем присутствуют вихри, то тепловые изменения можно считать пренебрежимо малыми. В этом случае энтропия как тепловая функция, характеризующая интенсивность теплового взаимодействия молекул, практически неизменна [18]. Такая физическая модель вполне приемлема в дозвуковом и трансзвуковом режимах течения вблизи лопастей пропеллеров летательных аппаратов.

Тогда система уравнений, описывающая генерацию и распространение звука, будет состоять из уравнения (50) и основного уравнения

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\rho'=\mathrm{div}\Big[\rho(\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi+ \\ +(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\nabla\varphi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)+ \\ +\rho'\left(\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)\Big]+ \\ +\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}(\rho\nabla\varphi+\rho'\boldsymbol{v}))-\mathrm{div}(\rho'\boldsymbol{F})+ \\ +\mathrm{div}(\nabla\varphi\cdot\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v})+\nabla a^2\cdot\nabla\rho'. \tag{55}$$

4. ЗАМЕЧАНИЕ О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ

Для того, чтобы решить задачу о генерации звука нестационарным теплопроводящим потоком, необходимо вначале найти полные значения переменных на основе решения одной из двух систем уравнений: (29), (32), (36) или (28), (29), (30). Ими можно воспользоваться, поскольку нам не обязательно, чтобы в уравнении движения был выделен волновой оператор (36).

Что же касается применимости численных схем, то при решении системы уравнений для звуковых возмущений (50), (51), (52), скорее всего, целесообразно будет использовать алгоритмы, пригодные для решения аналогичной по виду системы (29), (32), (36). Следует также отметить, что для известных форм записи основных уравнений аэродинамики уже разработаны достаточно эффективные численные схемы, поэтому решение системы (28), (29), (30) не должно представлять принципиальных трудностей.

Возможность упрощения общей задачи требуют дополнительных оценок. Не исключено, что в последующем для отдельных практически важных случаев удастся получить более компактные варианты записи полной системы уравнений.

Во второй части данного исследования будет предложено решение задачи о генерации шума при близком взаимодействии лопасти вертолета и вихрей Тэйлора.

ВЫВОДЫ

1. Предложена альтернативная модель, описывающая генерацию звука вязким нестационарным теплопроводящим течением. В качестве ее математической формулировки получена замкнутая система из трех уравнений. Рассмотрены основные случаи упрощения этой системы.

2. Показано, что предложенная модель выделения звуковых колебаний из общего течения имеет точность второго порядка малости. При этом отброшенные величины практически не оказывают обратного воздействия на поток.

3. Представлена общая схема решения сквозной задачи.

1. *Lighthill M. J.* On sound Generated Aerodynamically. Part I: General Theory // Proc. Royal Soc. Lond.– 1952.– **A211**, № 1107.– P. 564–587.
2. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды.– М.: Наука, 1981.– 206 с.
3. *Howe M. S.* Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute // J. Fluid Mech.– 1975.– **71**, № 4.– P. 625–673.
4. *Мунин А. Г.* Авиационная акустика. Часть 1.– М.: Машиностроение, 1976.– 244 с.
5. *Phillips O. M.* On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers // J. Fluid Mech.– **9**, № 1.– 1960.– P. 1–28.
6. *Lilley G. M.* On the noise from air jets.– Aeronaut. Res. Council: Noise Res. Committee, 1948.– 42 p.

7. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 296 с.
8. *Mohring W.* Modeling low Mach number noise // Proc. Sympos. Mech. Sound Generation in Flow.– Berlin: Springer Verlag, 1979.– P. 85–96.
9. *Musafir R. E.* A discussion on the structure of aeroacoustic wave equations // Proc. 4-th French Congr. Acoust. Vol. 2.– Marselle.– 1997.– P. 923–925.
10. *Fedorchenko A. T.* On some fundamental flaws in present aeroacoustic theory // J. Sound Vib.– 2000.– **232**, № 4.– P. 719–782.
11. *Федорченко А. Т.* К теории генерации распространения звука в нестационарном потоке // Акустический журнал.– **34**, № 6.– 1988.– С. 1109–1115.
12. *Федорченко А. Т.* Уравнения акустики нестационарного дозвукового потока // Докл. АН СССР.– **301**, № 6.– 1988.– С. 1332–1336.
13. *Федорченко А. Т.* К нелинейной теории аэродинамических источников звука // Доклады академии наук СССР.– 1988.– **344**, № 1.– С. 48–51.
14. *Doak P. E.* Fluctuating total enthalpy as the basic generalized acoustic field // Theor. Comp. Fluid Dyn.– **10**.– 1998.– P. 115–133.
15. *Goldstein M. E.* An exact form of Lilley's equation with velocity quadrupole / temperature dipole source term // J. Fluid Mech.– **443**.– 2001.– P. 231–236.
16. *Goldstein M. E.* A generalized acoustic analogy // J. Fluid Mech.– 2003.– **488**.– P. 315–333.
17. *Goldstein M. E.* On identifying the true sources of aerodynamic sound // J. Fluid Mech.– 2005.– **526**.– P. 337–347.
18. *Лукьянов П. В.* Система уравнений аэроакустики для среды с завихренностью: Общий случай.– Збірн. праць акуст. симпоз. "КОНСОНАНС-2007": К.: Ін-т гідромех. НАНУ, 25 – 27 вересня 2007.– 163–168 с.
19. *Путята В. И., Сідляр М. М.* Гідроаеромеханіка.– К.: Вид. Київ. ун-ту, 1963.– 480 с.
20. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.– М.: Мир, 1974.– 624 с.
21. *Коул Дж., Кук Л.* Трансзвуковая аэродинамика.– М.: Мир, 1989.– 360 с.
22. *Sankar L. N., Reddy N. N., Hariharan N.* A comparative study of numerical schemes for aeroacoustic applications // Computational Aero- and Hydro-Acoustics, ASME Fluid Eng. Div.– 1993.– **147**.– P. 35–40.
23. *Hardin J. C., Pope D. S.* An acoustic splitting technique for computational aeroacoustics // Theor. Comput. Fluid Dyn.– **6**.– 1994.– P. 334–340.
24. *Ekaterinaris J. A.* A new formulation of Hardin – Pope equations for aeroacoustics // AIAA J.– **37**, № 9.– 1999.– P. 1033–1039.
25. *Ewert R., Schroder W.* Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering // J. Comput. Phys.– **188**.– 2003.– P. 365–398.
26. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
27. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
28. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости.– М.: ИИЛ, 1963.– 256 с.
29. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: том 1.– М.: Наука, 1970.– 492 с.
30. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 760 с.
31. *Chu B.-T., Kovasznay L. S. G.* Non-linear interaction in viscous heat-conducting gas // J. Fluid Mech.– **3**.– Oct. 1957 – Mar. 1958.– P. 494–515.
32. *Липман Г. В.,Рошко А.* Элементы газовой динамики.– М.: ИИЛ, 1960.– 520 с.